3.- TRIGONOMETRÍA

1.- EL RADIÁN

1. Pasa a radianes los siguientes ángulos:
a) 200° b) 300°
Solución: a) 10π/9 rad, b) 5π/3 rad.

2. Pasa a radianes los siguientes ángulos:
a) 270° b) 126°
Solución: a) 3π/2 rad, b) 7π/10 rad.

3. Halla, sin utilizar la calculadora:
a) $2\cos\frac{\pi}{2}+\cos 0 - 2\cos\pi+\cos\frac{3\pi}{2}-\cos 2\pi$
b) $2\operatorname{tg}\pi - \cos\frac{\pi}{2}+\operatorname{tg}0 - \operatorname{sen}\frac{3\pi}{2}+\operatorname{sen}2\pi$
Solución: a) 2·0+1-2.(-1)+0-1 = 2; b) 0-0-0-(-1)+0 = 1

4. Halla sin utilizar la calculadora:
a) $\cos\frac{\pi}{4}+\cos\frac{\pi}{2}+\cos 3\pi$
b) $\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}-\operatorname{sen}\frac{2\pi}{3}-\operatorname{sen}\pi$
Solución: a) $\frac{\sqrt{2}}{2}+0-1=\frac{\sqrt{2}-2}{2}$*, b)* $\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}-0=0$

5. Pasa a grados sexagesimales los siguientes ángulos en radianes:
a) 3π/4 rad, b) 7π/4 rad.
Solución: a) 135° b) 315°

6. Indica, sin pasar a grados, en qué cuadrante está cada uno de los siguientes ángulos:
a) 1 rad b) 3 rad c) 6 rad
Solución: a) 1º cuadrante b) 2º cuadrante c) 4º cuadrante

2.- FÓRMULAS TRIGONOMÉTRICAS

7. Demuestra que:
$$\frac{2\operatorname{sen}a - \operatorname{sen}2a}{2\operatorname{sen}a+\operatorname{sen}2a}=\left(\operatorname{tg}\frac{a}{2}\right)^2$$

8. ¿Es verdadera la igualdad $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha=\frac{1}{\cos\alpha.\operatorname{sen}\alpha}$
Solución: Sí.

9. ¿Es verdadera la igualdad $\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha}{\sec\alpha+\operatorname{cosec}\alpha}=\frac{1}{\cos\alpha+\operatorname{sen}\alpha}$
Solución: Sí.

10. ¿Es verdadera la igualdad $\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta}=\operatorname{tg}\alpha.\operatorname{tg}\beta$
Solución: Sí.

11. ¿Es verdadera la igualdad $\frac{\text{ctg}\alpha + \text{tg}\alpha}{\text{ctg}\alpha - \text{tg}\alpha} = \frac{1}{\cos^2\alpha - \text{sen}^2\alpha}$

Solución: Sí.

12. ¿Es verdadera la igualdad $\text{ctg}\alpha - \frac{\text{ctg}^2\alpha - 1}{\text{ctg}\alpha} = \text{tg}\alpha$

Solución: Sí.

13. Si ctg α = - 3/4 y cos α > 0, calcula las razones trigonométricas de 2α .

Solución: sen2α = $\frac{24}{25}$ *, cos2α =* $\frac{-7}{25}$ *.*

14. Calcula las razones trigonométricas de -600°

Solución: sen(-600 º) = $\frac{\sqrt{3}}{2}$ *, cos (-600 º) =* $\frac{1}{2}$ *, tg(-600 º) =* $\sqrt{3}$ *.*

15. Si tg α = $\frac{3}{4}$, halla las tangentes de 90°-α, 90°+α, 180°-α, 180°-α.

*Solución: tg(*90°-α) = $\frac{4}{3}$, tg(90°+α) = $-\frac{4}{3}$, tg(180°-α) = $-\frac{3}{4}$, tg(180°-α) = $\frac{3}{4}$.

16. Si tg α = $\frac{3}{4}$, halla las tangentes de 270°-α, 270°+α, -α.

Solución: tg(270°-α) = $\frac{4}{3}$, tg(270°+α) = $-\frac{4}{3}$, tg(-α) = $-\frac{3}{4}$.

17. Calcula el valor exacto de: a) sen 75º, b) cos 75º

Solución: a) sen 75º = $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ *, b) cos 75º =* $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

18. Calcula el valor exacto de: a) sen 15º, b) cos 15º

Solución: a) sen 15º = $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ *, b) cos 15º =* $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

19. Encuentra una fórmula para calcular: a) sen(3x), b) sen(4x)

Solución: sen(3x) = 3 sen x – 4sen^{3}x, b) sen(4x) = 4senx.cosx – 8sen^{3}x.cosx.

20. Transforma en sumas la expresión sen(x-5y).sen(-x+3y)

Solución: a) $-\frac{1}{2}\left[\cos 2y - \cos(2x - 8y)\right]$

21. Desarrolla y simplifica la expresión $\text{sen}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$.

Solución: -cos x.

3.- RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE UN ÁNGULO AGUDO

22. Halla las razones trigonométricas del ángulo agudo de un triángulo rectángulo sabiendo que su hipotenusa mide 13 cm, su cateto adyacente 12 cm y su cateto opuesto 5 cm.

Solución: sen α = $\frac{5}{13}$*, cos α =* $\frac{12}{13}$*, tg α =* $\frac{5}{12}$*, ctg α =* $\frac{12}{5}$

23. Una escalera de 8'25 m. de longitud está apoyada en una pared alcanzando 6 m. de altura. ¿Cuál es el ángulo formado por la pared y la escalera?

Solución: $\alpha = \text{arc cos} \dfrac{6}{8{,}25}$

24. Calcula seno, coseno, tangente y cotangente de los ángulos agudos que forma la altura de un triángulo isósceles de base 8 cm y altura 3 cm.

Solución: $\text{sen } \alpha = \dfrac{4}{5}$, $\cos \alpha = \dfrac{3}{5}$, $\text{tg } \alpha = \dfrac{4}{3}$, $\text{ctg } \alpha = \dfrac{3}{4}$

25. Halla los ángulos de un triángulo rectángulo sabiendo que su base es 6 cm y su altura 6 cm.

Solución: A = 90°, B = 45°, C = 45°.

4.- RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS CUALESQUUIERA

26. Halla los valores de las razones trigonométricas del ángulo de 30° a partir del ángulo de 60°.

Solución: $\text{sen}(30°) = \dfrac{1}{2}$, $\cos(30°) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\text{tg}(30°) = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ y $\text{ctg}(30°) = \sqrt{3}$.

27. Halla los valores de las razones trigonométricas del ángulo de 120° a partir del ángulo de 60°.

Solución: $\text{sen}(120°) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos(120°) = -\dfrac{1}{2}$, $\text{tg}(120°) = -\sqrt{3}$, $\text{ctg}(120°) = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

28. Halla los valores de las razones trigonométricas del ángulo de 240° a partir del ángulo de 60°.

Solución: $\text{sen}(240°) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos(240°) = -\dfrac{1}{2}$, $\text{tg}(240°) = \sqrt{3}$, $\text{ctg}(240°) = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

29. Halla los valores de las razones trigonométricas del ángulo de 150° a partir del ángulo de 60°.

Solución: $\text{sen}(150°) = \dfrac{1}{2}$, $\cos(150°) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\text{tg}(150°) = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$, $\text{ctg}(150°) = -\sqrt{3}$.

30. Halla los valores de las razones trigonométricas del ángulo de -60° a partir del ángulo de 60°.

$\text{sen}(60°) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos(60°) = \dfrac{1}{2}$, $\text{tg}(60°) = -\sqrt{3}$ y $\text{ctg}(60°) = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

5.- ECUACIONES TRIGONOMÉTRICAS

31. Resuelve la ecuación trigonométrica: sen(4x) - cos(2x) = 0

Solución: $x = \begin{cases} 15° + 180°K \\ 75° + 180°K \end{cases}$

32. Resuelve la ecuación $2\cos^2 x + \cos(2x) = 1$.

Solución: x = 45°+90°k.

33. Resuelve la ecuación $\cos^3 x + \text{sen}(2x) = -2\cos x$.

Solución: x = 90°+180°k.

34. Resuelve la ecuación $-3\text{sen } x + \cos^2 x = 3$.

Solución: x = 270°+360°k.

35. 5.- Resuelve la ecuación cos(5x) - cos x = 0.

Solución: x = 60°k , 90°k.

36. Resuelve la ecuación sen x - 2.cos(2x) = -1/2.

Solución: x = 30°+360°k, x = 150°+360°k, x = 48°35' 24''.

37. Resuelve la ecuación cos(2x) = -1
Solución: x = 90°+180°k.

38. Resuelve la ecuación $\cos^2 x - \text{sen}^2 x = \frac{1}{2}$

Solución: x = $\begin{cases} 30° + 180°K \\ -30° + 180°K \end{cases}$

39. Resuelve la siguiente ecuación trigonométrica:
$2\ \text{sen}^2 x + 3\cos x = 0$
Solución: x = 120°+ 360°K , x = 240°+ 360°K.

40. Resuelve la ecuación trigonométrica:
cos 2x = 1 + 4 sen x
Solución: x = 180°K.

41. Resuelve la ecuación sen(2x) +sen(x) = 0
Solución: x = 180°K, x = 120°+ 360°K , x = 240°+ 360°K.

42. Resuelve las siguientes ecuaciones trigonométricas:
a) $\cos x = -\frac{1}{2}$
b) sen x = 0
Solución: a) x = 120°+ 360°K , x = 240°+ 360°K; b) x = 180°K .

43. Resuelve las siguientes ecuaciones trigonométricas:
a) tg x = 1
b) tg x = $-\sqrt{3}$
Solución: x = 45°+ 180°K ; b) x = 120°+ 180°K.

44. Resuelve las siguientes ecuaciones trigonométricas:
a) $\cos(2x - \pi) = -\frac{1}{2}$
b) $\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \text{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right) = \text{sen}x$
Solución: a) x = 150°, x = 210°; b) x = 45°+180°K.

45. Resuelve las siguientes ecuaciones trigonométricas:
a) sen (3x) = 1
b) ctg x + $\frac{\text{sen}x}{1+\cos x}$ = 2
Solución :a) x = 30°+120°K; b) $\begin{cases} x = 180° + 360°K \\ x = 30° + 360°K \end{cases}$, *x = 150°+360°K*

46. Resuelve las siguientes ecuaciones trigonométricas:
a) sen(x) = $\frac{\sqrt{3}}{2}$
b) $\cos(2x) + \text{sen}^2(x) = 4\text{sen}2x$
Solución: a) $\begin{cases} x = 60° + 360°K \\ x = 120° + 360°K \end{cases}$, b) $\begin{cases} x = 180°K \\ x = \text{arc tg}\left(\frac{1}{8}\right) \end{cases}$

47. Resuelve las siguientes ecuaciones trigonométricas:

a) tg(2x) = -tg(x)

b) sen(π-3x) = $\frac{\sqrt{2}}{2}$

Solución: x = 0°, x = 60°, x = 120°, x = 180°, x = 240°, x = 300°; b) x = $\frac{\pi}{4}$ *, x =* $\frac{\pi}{12}$.

48. Resuelve las siguientes ecuaciones trigonométricas:

a) sen(3x) +cos(3x) = $\sqrt{2}$

b) sen(2x).cosx = 3sen^{2}x

Solución: a) x = $\frac{\pi}{12}$ *+ 120°K; b) 180°K,* $\begin{cases} x = 30° + 360°K \\ x = 150° + 360°K \end{cases}$

49. Resuelve las siguientes ecuaciones trigonométricas:

a) tg(2x) = -1

b) 2cos(2x) = -3senx -2sen^{2}2x

Solución: a) x = $\frac{3\pi}{4} + \pi K$ *, b)* $\begin{cases} x = 210° + 360°K \\ x = 330° + 360°K \end{cases}$

6.- SISTEMAS TRIGONOMÉTRICOS

50. Resuelve el sistema:

$$\begin{cases} senx + seny = 1 \\ senx - seny = 1 \end{cases}$$

Solución: x = 90° +360°K, y = 0° +180°K

51. Resuelve el sistema:

$$\begin{cases} sen\ x.cos\ y = \frac{3}{4} \\ cos\ x.sen\ y = \frac{1}{4} \end{cases}$$

Solución: x = 60°, y = 30°

52. Resuelve el sistema

$$\begin{cases} senx + seny = \frac{3}{2} \\ cos\frac{x-y}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

Solución: x = 90°, y = 30°

53. Resuelve el sistema

$$\begin{cases} cos(x+y) = 1 \\ x + y = 120° \end{cases}$$

Solución: No tiene.

54. Resuelve el sistema

$$\begin{cases} cos(x+y) = 1 \\ cos\ x + cos\ y = 1 \end{cases}$$

Solución: x = 60°, y = -30°

55. Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones :

$$\left.\begin{array}{lcl} \cos x \cos y & = & -1/2 \\ \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y & = & 1/2 \end{array}\right\}$$

Solución: x = 90°, x = 90°.

56. Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones :

$$\left.\begin{array}{lcl} 2\operatorname{sen} x & = & 1-\cos y \\ 2\cos x & = & 1+\cos y \end{array}\right\}$$

Solución: x = 90°, x = 180°.

57. Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{lcl} \operatorname{sen} x-\operatorname{sen} y & = & 1/2 \\ x+y & = & \dfrac{2\pi}{3} \end{array}\right\}$$

Solución: x = 90°, x = 30°.

58. Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{lcl} \operatorname{sen} x+\operatorname{sen} y & = & 3/2 \\ \cos\dfrac{x-y}{2} & = & \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{array}\right\}$$

Solución: x = 90°, x = 30°.

59. Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{lcl} x+\operatorname{sen}^2 y & = & 2 \\ x+\cos^2 y & = & 1 \end{array}\right\}$$

Solución: x = 1, x = $\frac{\pi}{2}$

7.- RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS

60. Resuelve los triángulos rectángulos tales que un ángulo A y la hipotenusa c son:
a) A = 60° y c = 5.
b) A = 40° y c = 3.
Solución: a) B = 30°, a = $\frac{5\sqrt{3}}{2}$ *, b =* $\frac{5}{2}$ *; b) B = 50°, a = 1,93, b = 2,30.*

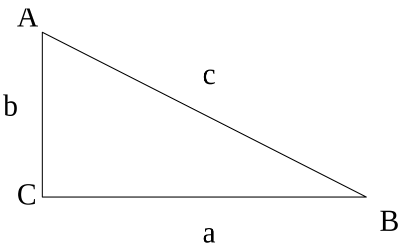
61. Resuelve los triángulos rectángulos tales que un ángulo A y un cateto b son:
a) A = 60° y b = 5
b) A = 40° y b = 5
Solución: a) B = 30°, *a =* $5\sqrt{3}$ *, c =10* ; b) B = 50°, a = 4,20, c = 6,53.

62. Resuelve los triángulos rectángulos tales que un cateto b y la hipotenusa c son:
a) b = 4 y c = 5.
b) b = 5 y c = 5.
Solución: a) a = 3, A = 36°52'12'', B = 53°7'48'', b) a = $\sqrt{11}$ *, A = 33°54', B = 56°6'.*

63. Resuelve los triángulos rectángulos tales que los catetos a y b son:
a) a = 4 y b = 5.
b) a = 5 y b = 5.
Solución: a) c = $\sqrt{41}$ *, A = 38°39'36'', B = 51°20'24''; b) c =* $5\sqrt{2}$ *, A = 45°, B = 45°.*

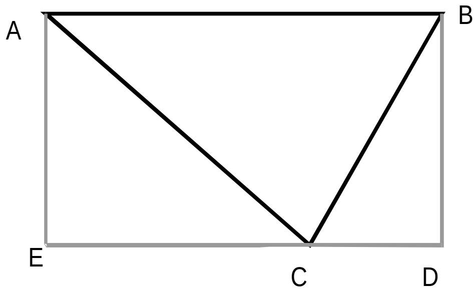
64. El área de un triángulo rectángulo es $25 m^2$. Calcula su perímetro.

Solución: Se necesitan más datos.



65. En el triángulo de la figura sabemos que:
c = 4 m y tgA = 2.
Calcula los otros dos lados y tg B
Solución: $b = \frac{4\sqrt{5}}{5}$, $a = \frac{8\sqrt{5}}{5}$, $tg\ B = \frac{1}{2}$

66. En la figura adjunta sabemos que AE = 3m, EC = 4m, CD = 2m.
Calcula:
a) Medidas de los lados del triángulo ABC
b) Área del triángulo ABC
c) Medidas de los ángulos del triángulo ABC
d) Medidas de los ángulos del triángulo AEC
Solución: a) AB = 6m; AC = 5m, AC = $\sqrt{13}$ *m*
b) 9 m^2
c) A=*36°52'12'', B=56°18'36'', C= 86°49'12''.*
d) E = 90°, A=53°7'48'', C= 36°52'12''.



8.- RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS CUALESQUIERA

67. Calcula el ángulo $\hat{A}$ de un triángulo ABC sabiendo que dos de sus lados son a = 2 y b = $\sqrt{12}$, y un ángulo es $\hat{C}$ = 60°.
Solución: $\hat{A}$ *= 35°6'.*

68. Calcula el lado a de un triángulo ABC sabiendo que uno de sus lados es b = 4 y dos de sus ángulos son $\hat{A}$ = 60° y $\hat{B}$ = 30°.
Solución: a = $4\sqrt{3}$.

69. Calcula el lado a de un triángulo ABC sabiendo que dos de sus lados son b = 2 y c = 6 y el ángulo comprendido entre ellos es $\hat{A}$ = 30°.
Solución: a = 4,38.

70. Resuelve un triángulo ABC sabiendo que dos lados, a y b, y el ángulo comprendido, $\hat{C}$, son:
a) a = 23, b = 10 y $\hat{C}$ = 35°.
b) a = 25, b = 17 y $\hat{C}$ = 15°.
Solución: a) 15,87, $\hat{A}$ *= 56°12',* $\hat{B}$ *= 88°48'; b) C = 9,46,* $\hat{A}$ *= 43°9'25'',* $\hat{B}$ *= 121°50'35''.*

71. Resuelve un triángulo ABC sabiendo que dos de sus lados, a y b, y un ángulo opuesto, $\hat{A}$, son:
a) a = 23, b = 20 y $\hat{C}$ = 35°.
b) a = 25, b = 50 y $\hat{C}$ = 15°.

Solución: a) $\hat{B}$ *= 29°55'48'',* $\hat{C}$ = 115°4'12'', c=36,42*; b)* $\hat{B}$ *=31°19'48'',* $\hat{C}$ = 133°40'12'', c= 69,87.

72. Resuelve el triángulo ABC sabiendo que uno de sus lados, a, y dos ángulos, $\hat{B}$ y $\hat{C}$, son:
a) a = 23, $\hat{B}$ = 30° y $\hat{C}$ = 35°.
b) a = 35, $\hat{B}$ = 45° y $\hat{C}$ = 50°.
Solución: a) $\hat{A}$ *= 115°, b= 12,69, c = 14,56; b)* $\hat{A}$ *= 85°, b = 24,84, c = 26,91.*

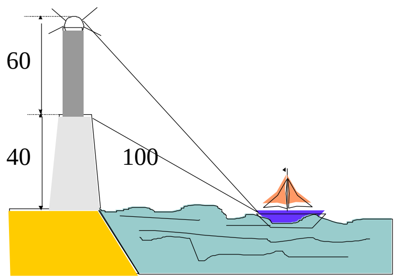
73. Calcula el área de un hexágono cuyo lado sea 3.
Solución: 23,4 m^2.

74. Dos localidades distan de una tercera 12 y 8 respectivamente, si las carreteras que la unen a estas suponemos que son rectas y forman entre si un ángulo de 30°, ¿a qué distancia se encuentran las dos localidades?
Solución: 6,46 km.

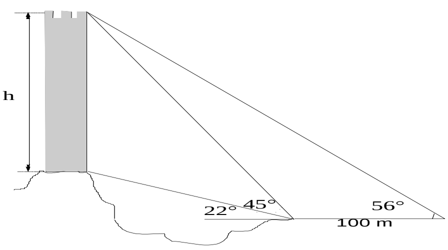
75. Un globo está unido a la tierra mediante un cable tirante de 100 m de longitud que forma un ángulo con la horizontal de 60°. Calcular la altura a la que se encuentra el globo.
Solución: h = 86,6 m.

76. Desde lo alto de un poste se tiende una cuerda tirante que forma con la horizontal un ángulo de 60°con la horizontal. Si la longitud de la cuerda es de 150 mts. cuál es la altura de la torre.
Solución: h = 129,9 m.

77. Sabiendo que el ángulo bajo el que se ve el faro de la figura desde el extremo del barco, es de 30°, que la altura del faro es de 60 m., la del promontorio 40 m y la distancia desde el extremo del barco al pie del faro es de 100 metros, halla la distancia desde el barco hasta el extremo superior del faro.
Solución: D = 135,65 m.



78. Calcula la altura, h, de una torre de pie inaccesible, que está situada sobre el promontorio de la figura, sabiendo que la distancia que se mueve el observador es de 100 metros.
Solución: h = 333,5 m



79. Dos observadores de artillería antiaérea que se encuentran separados entre si 4 km divisan un avión. Si uno lo ve bajo un ángulo de 60° y otro bajo un ángulo de 45°, ¿a qué altura se encuentra el avión?
Solución: h = 5.479 m.

80. Desde dos merenderos situados en la orilla de un rio y distantes entre si 200 metros se observa un bañista que se está ahogando en la otra orilla, bajo ángulos de 60° y 45°. Si en el primer merendero hay un nadador que nada a 100 metros/ minuto y en el segundo merendero hay un nadador que nada a 120 metros/ minuto, ¿cuál salvará al bañista si se lanzan a la vez en su auxilio?
Solución: El nadador del primer merendero.