EXAMEN DE MATEMÁTICAS TRIGONOMETRÍA

Apellidos: ____________________________ Nombre: ________________

Curso: **1º** Grupo: C Día: **11- XI- 15** CURSO 2015-16

1. Calcula las restantes razones de α sabiendo que tg α = $-\sqrt{2}$ y que 90° < α < 180°.

2. Halla el valor exacto de estas expresiones sin usar la calculadora:
a) $\cos\frac{5\pi}{3} + \operatorname{tg}\frac{4\pi}{3} - \operatorname{tg}\frac{7\pi}{6}$
b) $\sqrt{3}\cos\frac{\pi}{6} + \operatorname{sen}\frac{\pi}{6} - \sqrt{2}\cos\frac{\pi}{4} - 2\sqrt{3}\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}$

3. Demuestra que se verifica esta igualdad.
1 + sen 2α = 2 sen (α+ 45°) cos (α−45°)

4. Resuelve la ecuación trigonométrica:
sen x + cos x = $\sqrt{2}$

5. Resuelve el siguiente sistema en el intervalo [0°, 360°]
$$\begin{cases} \operatorname{sen}x.\cos y = \dfrac{1}{4} \\ \cos x.\operatorname{sen}y = \dfrac{1}{4} \end{cases}$$

6. Resuelve un triángulo ABC sabiendo que a= 41, b = 9 y c = 40.

7. En una pared hay dos argollas distantes 8 m entre sí. Un niño ata cada extremo de una cuerda a las argollas y se aleja de la pared hasta que la cuerda queda tensa. En ese momento, la cuerda forma ángulos de 50° y 37° con la pared.
a) ¿Cuánto mide la cuerda?
b) ¿A qué distancia está el niño de la pared?

8. Un globo aerostático se encuentra sujeto al suelo, mediante dos cables de acero, en dos puntos que distan 60 m. El cable más corto mide 80 m y el ángulo que forma el otro cable con el suelo es de 37°. Calcula.
a) La medida del otro cable.
b) La distancia del globo al suelo.

Solución del examen

1. Calcula las restantes razones de α sabiendo que tg α = -$\sqrt{2}$ y que 90° < α < 180°.

Solución:
Al ser un ángulo del 2º cuadrante son negativas todas las razones salvo el seno y cosecante.
La cotangente la hallamos como la inversa de la tangente:
ctg $\alpha = \frac{1}{\text{tg}\,\alpha} = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

El coseno lo obtenemos dividiendo la ecuación fundamental del Álgebra por coseno y despejamos la expresión obtenida:
$\text{sen}^2\,\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \text{tg}^2\,\alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha}$
$\cos^2\alpha = \frac{1}{\text{tg}^2\alpha+1} \Rightarrow \cos^2\alpha = \frac{1}{2+1} = \frac{1}{3} \Rightarrow \cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

Determinamos la secante a partir del coseno:
$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} = \frac{1}{-\frac{\sqrt{3}}{3}} = -\frac{3}{\sqrt{3}} = -\frac{3\sqrt{3}}{3} = -\sqrt{3}$

De la ecuación fundamental del Álgebra despejamos sen α:
$\text{sen}^2\,\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \text{sen}^2\,\alpha = 1 - \cos^2\alpha \Rightarrow \text{sen}^2\,\alpha = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \Rightarrow \text{sen}\,\alpha = \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$
Determinamos la cosecante a partir del seno:
$\text{cosec}\,\alpha = \frac{1}{\text{sen}\,\alpha} = \sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$

2. Halla el valor exacto de estas expresiones sin usar la calculadora:
a) $\boldsymbol{\cos\frac{5\pi}{3} + tg\frac{4\pi}{3} - tg\frac{7\pi}{6}}$
b) $\boldsymbol{\sqrt{3}\cos\frac{\pi}{6} + sen\frac{\pi}{6} - \sqrt{2}\cos\frac{\pi}{4} - 2\sqrt{3}\,sen\frac{\pi}{3}}$

Solución:
a) $\cos\frac{5\pi}{3} + \text{tg}\frac{4\pi}{3} - \text{tg}\frac{7\pi}{6} = \frac{1}{2} + \sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{2} + \frac{2\sqrt{3}}{3} = \frac{3+4\sqrt{3}}{6}$
b) $\sqrt{3}\cos\frac{\pi}{6} + \text{sen}\frac{\pi}{6} - \sqrt{2}\cos\frac{\pi}{4} - 2\sqrt{3}\,\text{sen}\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}.\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} - \sqrt{2}.\frac{\sqrt{2}}{3} - 2\sqrt{3}\,.\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} - 1 - 3 = -2$

3. Demuestra que se verifica esta igualdad.
1 + sen 2α = 2 sen (α+ 45°) cos (α–45°)

Solución:
Aplicamos las fórmulas del seno y coseno de una suma
2 sen (α+ 45°) cos (α–45°) = 2(senα· cos 45°+cosα· sen 45°)(cosα· cos 45°+senα· sen 45°) =

Sustituimos los valores de cos 45° y sen 45° y efectuamos factor común:
$= 2(\text{sen}\alpha\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + \cos\alpha\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}).(\cos\alpha\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + \text{sen}\alpha\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}) = 2.\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}.(\text{sen}\alpha\cdot + \cos\alpha).(\cos\alpha + \text{sen}\alpha)$

Multiplicamos las expresiones obtenidas y utilizamos las formulas del seno y coseno del ángulo doble:
$\text{sen}^2\alpha + 2\,\text{sen}\alpha.\cos\alpha + \cos^2\alpha = \cos^2\alpha + \text{sen}^2\alpha + 2\text{sen}\alpha.\cos\alpha = 1 + \text{sen}\,2\alpha$

4. Resuelve la ecuación trigonométrica: sen x + cos x = $\sqrt{2}$

Solución:
Expresamos cos x en función de sen x y elevamos al cuadrado la ecuación obtenida:
$\text{sen}\,x + \sqrt{1-sen^2x} = \sqrt{2} \Rightarrow \sqrt{1-sen^2x} = \sqrt{2} - \text{sen}\,x \Rightarrow 1 - \text{sen}^2x = 2 + \text{sen}^2x - 2\sqrt{2}\,\text{sen}\,x$

Reordenamos y obtenemos una ecuación de 2º grado con variable sen x:
$2\ \text{sen}^2 x - 2\sqrt{2}\ \text{sen}\ x + 1 = 0$

Con soluciones:
$\text{sen}\ x = \dfrac{2\sqrt{2}\pm\sqrt{8-8}}{4} = \dfrac{2\sqrt{2}}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Por lo tanto:
x = 45°+360°.K solución válida
x = 135°+360°.K solución no válida

5. Resuelve el siguiente sistema en el intervalo [0°, 360°]

$$\begin{cases} \mathbf{senx.cosy = 1/4} \\ \mathbf{cosx.seny = 1/4} \end{cases}$$

Solución:
Utilizamos las fórmulas de transformación de productos en suma y simplificamos las expresiones obtenidas:

$$\begin{cases} \text{senx.cosy} = 1/4 \\ \text{cosx.seny} = 1/4 \end{cases}$$

Sumamos y restamos las dos ecuaciones obteniendo el nuevo sistema:

$$\begin{cases} \text{senx.cosy} + \text{cosx.seny} = 1/2 \\ \text{senx.cosy} - \text{cosx.seny} = 0 \end{cases}$$

Aplicando las formulas del seno de la suma y de la diferencia:

$$\begin{cases} \text{sen}(x+y) = \dfrac{1}{2} \\ \text{sen}(x-y) = 0 \end{cases}$$

Que resolvemos:
$\text{sen}(x+y) = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x+y = 30° \\ x+y = 150° \end{cases}$
$\text{sen}(x-y) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x-y = 0° \\ x-y = 180° \end{cases}$

Con soluciones:
(x = 15°, y = 15°), (x = 75°, y = 75°) válidas
(x = 105°, y = -75°), (x = -75°, y = 105°), (x = 165°, y = -15°),(x = -15°, y = 165°) no válidas

6. Resuelve un triángulo ABC sabiendo que a= 41, b = 9 y c = 40.

Solución:
De la ecuación del coseno $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos A$:
$\cos A = \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \dfrac{9^2+40^2-41^2}{2.9.40} = 0 \Rightarrow$ **A = 90°**

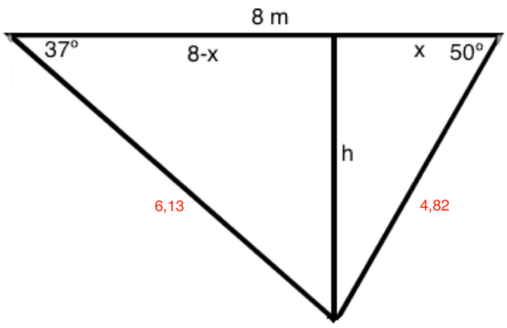
De la ecuación del coseno $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac.\cos B$:
$\cos B = \dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac} = \dfrac{41^2+40^2-9^2}{2.40.41} = 0{,}9756 \Rightarrow$ **B = 12° 40′ 58″**

Como la suma de los ángulos de un triángulo son 180°
C = 180°- (A+B) = 180°- (90°+12° 40′ 58″) = **77° 19′ 2″**

7. En una pared hay dos argollas distantes 8 m entre sí. Un niño ata cada extremo de una cuerda a las argollas y se aleja de la pared hasta que la cuerda queda tensa. En ese momento, la cuerda forma ángulos de 50° y 37° con la pared.
a) ¿Cuánto mide la cuerda?
b) ¿A qué distancia está el niño de la pared?

Solución:

a) La altura del lado conocido divide al triángulo inicial en dos triángulos rectángulos. Aplicamos la definición de tangente en los ángulos conocidos y formamos un sistema de ecuaciones.



$$\begin{cases} \text{tg } 50° = \frac{h}{x} \\ \text{tg } 37° = \frac{h}{8-x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} h = x.\text{tg } 50° \\ h = (8-x).\text{tg } 37° \end{cases}$$

Que resolvemos por igualación:

x.tg 50° = (8-x) .tg 37° $\Rightarrow$ x = $\frac{8.\text{tg } 37°}{\text{tg } 37°+\text{tg } 50°}$ = 3,1 m

Calculamos la longitud de la cuerda:

sen 50° = $\frac{3,69}{c}$ $\Rightarrow$ c = 3,69.sen 50° = 4,82 m

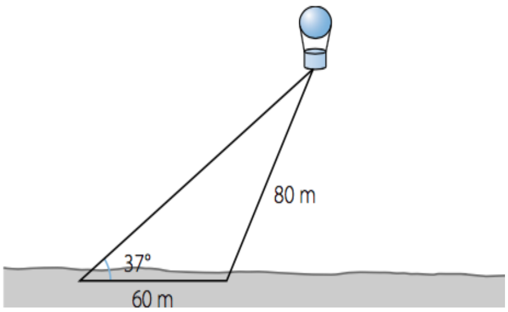
sen 37° = $\frac{3,69}{b}$ $\Rightarrow$ b = 3,69.sen 37° = 6,13 m

Sumamos los valores de los pedazos:
4,82+6,13=10,95m
La cuerda mide 10,95 m.

b) Sustituyendo en la 1º ecuación:
h = 3,1.tg50° = 3,69m
El niño está a una distancia de 3,69 m de la pared.

8. **Un globo aerostático se encuentra sujeto al suelo, mediante dos cables de acero, en dos puntos que distan 60 m. El cable más corto mide 80 m y el ángulo que forma el otro cable con el suelo es de 37°. Calcula.**

a) La medida del otro cable.
b) La distancia del globo al suelo.



Solución:

a) Aplicamos el teorema del seno para calcular la medida del otro cable:

$\frac{c}{\text{sen C}} = \frac{a}{\text{sen A}} \Rightarrow \frac{60}{\text{sen C}} = \frac{80}{\text{sen } 37°}$ $\Rightarrow$ sen C = 0,4514
luego C = 26° 49′ 52”

Como la suma de los ángulos de un triángulo son 180°
B = 180°- (A+C) = 180°- (90°+26° 49′ 52”) = 116° 10′ 8”

Aplicando el teorema del seno nuevamente:

$\frac{b}{\text{sen B}} = \frac{a}{\text{sen A}} \Rightarrow \frac{b}{\text{sen } 116° \, 10' \, 8''} = \frac{80}{\text{sen } 37°}$ $\Rightarrow$ b = 119,31 m

La medida del otro cable es 119,31 m.

b) Calculamos la distancia del globo al suelo:

sen 37° = $\frac{h}{119,31}$ $\Rightarrow$ h = 71,8 m

El globo está a 71,8 m de altura.