TRIGONOMETRÍA 1 (Resumen)

- **Definiciones en triángulos rectángulos**

$$\text{sen}\,\alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} \qquad \text{cosec}\,\alpha = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto opuesto}}$$

$$\cos\alpha = \frac{\text{cateto contiguo}}{\text{hipotenusa}} \qquad \sec\alpha = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto contiguo}}$$

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto contiguo}} \qquad \text{cotg}\,\alpha = \frac{\text{cateto contiguo}}{\text{cateto opuesto}}$$

- **Razones de 30º, 60º y 45º**

$$\text{sen}\,30^\circ = \frac{1}{2} \qquad \text{sen}\,60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \text{sen}\,45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \cos 60^\circ = \frac{1}{2} \qquad \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

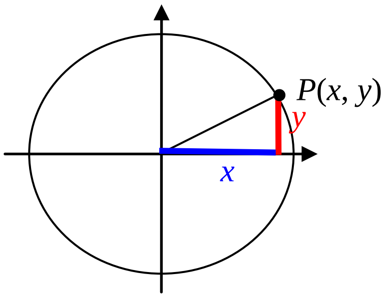
$$\text{tg}\,30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3} \qquad \text{tg}\,60^\circ = \sqrt{3} \qquad \text{tg}\,45^\circ = 1$$

- **Definiciones generales (válidas para cualquier ángulo de cualquier cuadrante)**

$$\text{sen}\,\alpha = \frac{y}{r} \qquad \text{cosec}\,\alpha = \frac{r}{y}$$

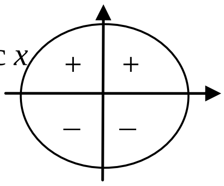
$$\cos\alpha = \frac{x}{r} \qquad \sec\alpha = \frac{r}{x}$$

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{y}{x} \qquad \text{cotg}\,\alpha = \frac{x}{y}$$

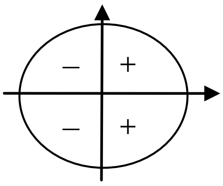


- **Signos de las razones según los cuadrantes**

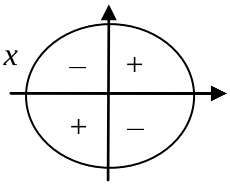
sen x
cosec x



cos x
sec x

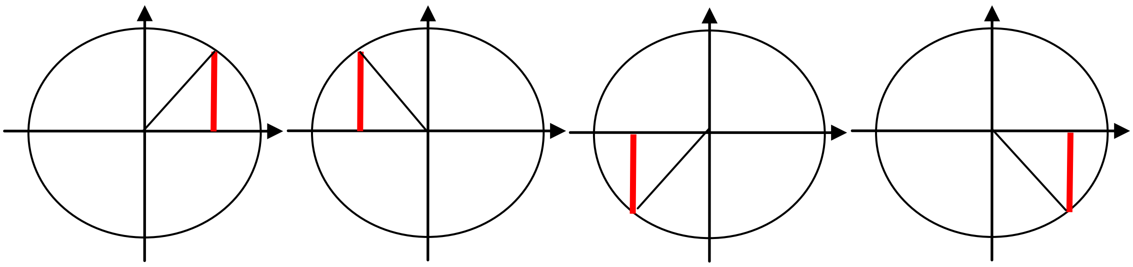


tg x
cotg x

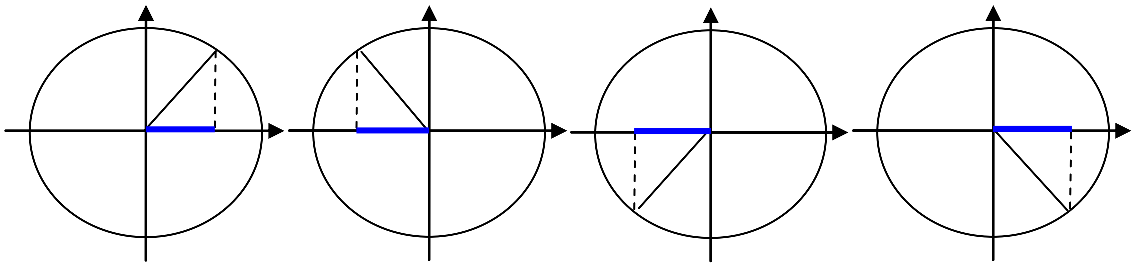


- **Las razones en la circunferencia trigonométrica (radio = 1)**

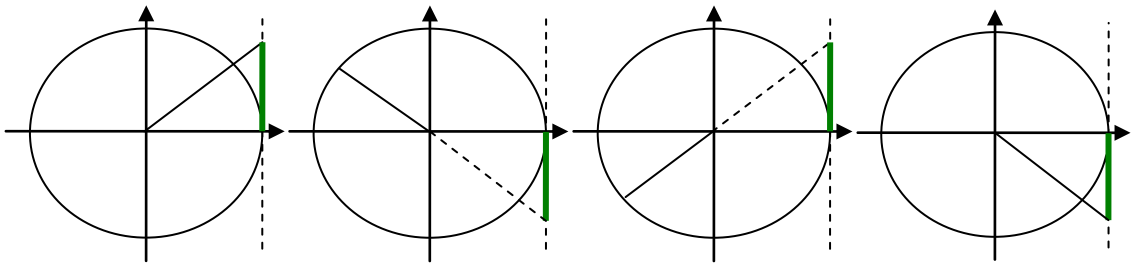
sen *x*



cos *x*



tg *x*



- **Recorrido**

  $-1 \leq \text{sen } x \leq 1 \qquad -1 \leq \cos x \leq 1 \qquad -\infty < \text{tg } x < +\infty, \qquad \forall x$

- **Situar un ángulo en la circunferencia**
- Si el ángulo es mayor de 360º, lo dividimos entre 360 (sin eliminar ceros en dividendo y divisor, si se pudiera) y coincide con la posición del resto de la división sobre la circunferencia. Ejemplo:

$$\begin{array}{r|l} 2100 & 360 \\ \hline 300 & 5 \end{array}$$

$\Rightarrow$ 2100 = 5·360 + 300 (5 vueltas completas + 300º) $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ 2100º y 300º coinciden sobre la circunferencia.

- Si el ángulo es negativo y menor de – 360º, dividimos entre 360 su valor absoluto, como antes. El ángulo coincide con el resto negativo. Sumándole 360º se convierte en un ángulo entre 0º y 360º. Ejemplo: Tomemos – 2100º; se tiene:

$$\begin{array}{r|l} 2100 & 360 \\ \hline 300 & 5 \end{array}$$

$\Rightarrow$ 2100 = 5·360 + 300 $\Rightarrow$ – 2100 = 5·(– 360) – 300 $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ – 2100º y – 300º coinciden sobre la circunferencia.
Pero – 300º coincide sobre la circunferencia con – 300º + 360º = 60º. Por tanto, – 2100º coincide con 60º.

• Fórmulas fundamentales

1) $\operatorname{cotg} \alpha = \dfrac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$

2) $\sec \alpha = \dfrac{1}{\cos \alpha}$

3) $\operatorname{cosec} \alpha = \dfrac{1}{\operatorname{sen} \alpha}$

4) $\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$

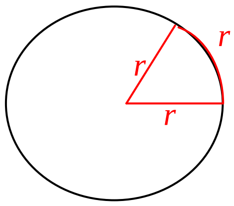
5) $\operatorname{tg} \alpha = \dfrac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha}$

6) $\operatorname{cotg} \alpha = \dfrac{\cos \alpha}{\operatorname{sen} \alpha}$

7) $1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \dfrac{1}{\cos^2 \alpha}$

8) $1 + \operatorname{cotg}^2 \alpha = \dfrac{1}{\operatorname{sen}^2 \alpha}$

• El radián

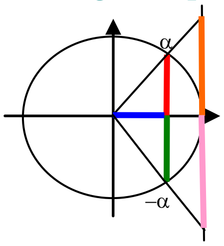


El *radián* es una medida de ángulos. Un ángulo mide 1 radián (y se denota como 1 rad) si delimita un arco de circunferencia cuya longitud coincide con el radio.
Como la longitud de la circunferencia es $2\pi r$, dicha longitud (el arco que delimita) es 2π veces mayor que el radio. Por tanto, un ángulo de 360º es 2π veces mayor que aquél que mide 1 rad. Luego 360º equivale a 2π rad. Y por ello, 180º equivale a π rad. Así, una regla de 3 permite pasar de grados a radianes, o al revés:

$$\frac{180^\circ}{\pi \text{ rad}} = \frac{\text{Ángulo en grados}}{\text{Ángulo en rad}}$$

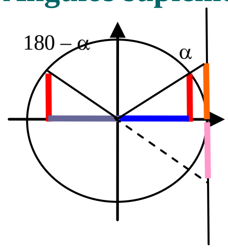
• Relaciones entre razones de distintos ángulos

Ángulos opuestos: α y – α



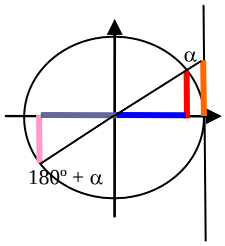
sen (– α) = – sen α
cos (– α) = cos α
tg (– α) = – tgα

Ángulos suplementarios: α y 180º–α



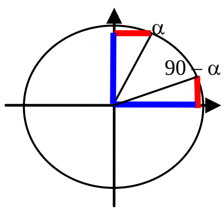
sen (180º – α) = sen α
cos (180º – α) = – cos α
tg (180º – α) = – tgα

Áng. que difieren en 180º: α y 180º+α



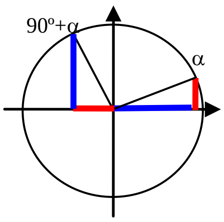
sen (180º +α) = – sen α
cos (180º +α) = – cos α
tg (180º +α) = tg α

Ángulos complementarios: α y 90º–α



sen (90º – α) = cos α
cos (90º – α) = sen α
tg (90º – α) = cotgα

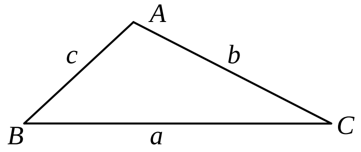
Áng. que difieren en 90º: α y α + 90º



sen (90º + α) = cos α
cos (90º + α) = – sen α
tg (90º + α) = – cotg α

• Resolución de triángulos no rectángulos

Teorema de los senos

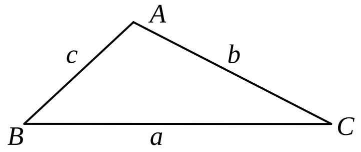


$$\frac{a}{\text{sen } A} = \frac{b}{\text{sen } B} = \frac{c}{\text{sen } C}$$

Observaciones relativas al Teorema de los senos:

1) Sirve para resolver un triángulo conocidos dos ángulos y un lado o dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos.
2) Cuando se calcula un ángulo hay, en principio, dos soluciones: α y $180^\circ - \alpha$. Hay que comprobar si ambas son válidas: La suma de los tres ángulos no puede superar 180º, y un triángulo tiene, a lo sumo, un solo ángulo obtuso.
3) Si en un problema determinado, para calcular un ángulo, podemos optar por aplicar el Teorema de los senos o el Teorema del coseno, hay que elegir siempre el del coseno (porque el de los senos puede aportar dos soluciones falsamente válidas en estos casos).

Teorema del coseno



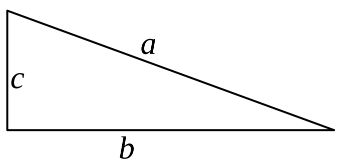
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,b\,c\cos A$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2\,a\,c\cos B$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2\,a\,b\cos C$$

Observaciones relativas al Teorema del coseno:

1) Sirve para resolver un triángulo conocidos los tres lados o dos lados y el ángulo comprendido entre ellos.
2) Si en un problema determinado, para calcular un ángulo, podemos optar por aplicar el Teorema de los senos o el Teorema del coseno, hay que elegir siempre el del coseno (porque el de los senos puede aportar dos soluciones falsamente válidas en estos casos).

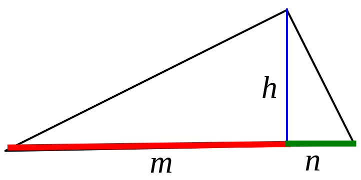
• Otras fórmulas útiles

Teorema de Pitágoras



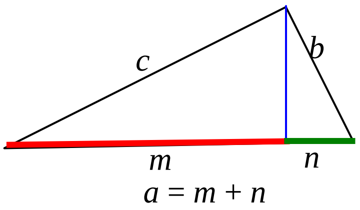
Sólo en triángulos rectángulos:
$a^2 = b^2 + c^2$ (*a* es la *hipotenusa*)

Teorema de la altura



Sólo en triángulos rectángulos:
$h^2 = m \cdot n$ ($a = m + n$ es la *hipotenusa*)

Teorema del cateto



Sólo en triángulos rectángulos:
$c^2 = m \cdot a$ (*a* es la *hipotenusa*)
$b^2 = n \cdot a$

Fórmula de Herón

Calcula el área de un triángulo <u>cualquiera</u> conocidos sus tres lados. Si llamamos p al *semiperímetro* del triángulo, esto es: $p = \dfrac{a+b+c}{2}$, se tiene:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

Área de un triángulo

$$S = \frac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2}$$

Longitud de la circunferencia

$$l = 2\pi r$$

Área del círculo

$$S = \pi r^2$$

TRIGONOMETRÍA 2 (Resumen)

- **Razones de la suma de dos ángulos**

sen $(a + b)$ = sen a cos b + cos a sen b
cos $(a + b)$ = cos a cos b – sen a sen b

$$\operatorname{tg}(a+b)=\frac{\operatorname{tg}a+\operatorname{tg}b}{1-\operatorname{tg}a\operatorname{tg}b}$$

- **Razones de la diferencia de dos ángulos**

sen $(a – b)$ = sen a cos b – cos a sen b
cos $(a – b)$ = cos a cos b + sen a sen b

$$\operatorname{tg}(a-b)=\frac{\operatorname{tg}a-\operatorname{tg}b}{1+\operatorname{tg}a\operatorname{tg}b}$$

- **Razones del ángulo doble**

sen $2a$ = 2 sen a cos a
cos $2a$ = $\cos^2 a - \operatorname{sen}^2 a$

$$\operatorname{tg}2a=\frac{2\operatorname{tg}a}{1-\operatorname{tg}^2 a}$$

- **Razones del ángulo mitad**

$$\operatorname{sen}\frac{a}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos a}{2}}$$

$$\cos\frac{a}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos a}{2}}$$

$$\operatorname{tg}\frac{a}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos a}{1+\cos a}}$$

El signo (+ ó –) se decide según el cuadrante en el que se encuentre $a/2$.
Si se está demostrando una identidad (válida para cualquier a) o se está resolviendo una ecuación, hay que trabajar con ambos signos a la vez (±).

- **Transformación de sumas en productos**

$$\operatorname{sen}A+\operatorname{sen}B=2\operatorname{sen}\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$$

$$\operatorname{sen}A-\operatorname{sen}B=2\cos\frac{A+B}{2}\operatorname{sen}\frac{A-B}{2}$$

$$\cos A+\cos B=2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$$

$$\cos A-\cos B=-2\operatorname{sen}\frac{A+B}{2}\operatorname{sen}\frac{A-B}{2}$$

- **Demostrar identidades**

Para demostrar que una igualdad es cierta para cualquier ángulo, hay que utilizar las fórmulas conocidas y seguir una de las siguientes estrategias:

1) Desarrollar uno de los miembros hasta conseguir llegar al otro. Normalmente se hace con el que es más grande.
2) Desarrollar ambos miembros hasta conseguir la misma expresión.

3) Cambiar la igualdad por otra equivalente más sencilla o que se sepa, ya, que es cierta. Se hace despejando o utilizando fórmulas conocidas.

- **Resolver ecuaciones trigonométricas**

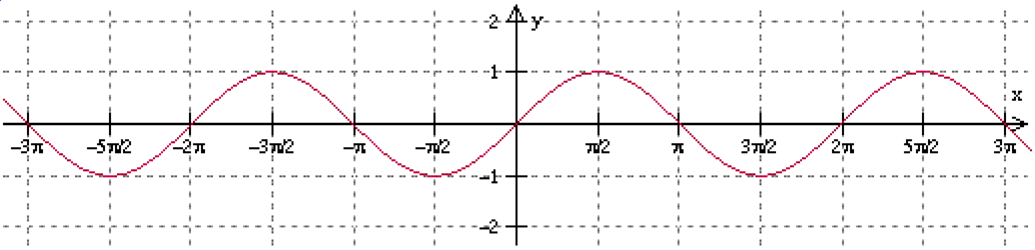
Una ecuación hay que transformarla en otra consistente en una sola expresión trigonométrica de un único ángulo igual a un número. De ahí se deduce el valor del ángulo.
Para ello, si hay más de ángulo (x, $2x$, $3x$, …), hay que utilizar las fórmulas trigonométricas para conseguir en todas el mismo ángulo; y si hay más de una razón trigonométrica, hay que hacer lo propio para conseguir una única razón.
Habitualmente, tienen infinitas soluciones: todas las que se encuentren en la primera vuelta a la circunferencia, más o menos vueltas completas ($+360^{o}k$ ó $+2\pi k$, $\forall k\in Z$, según trabajemos en grados o radianes).

TRIGONOMETRÍA 3 – FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS (Resumen)

- **Funciones trigonométricas**

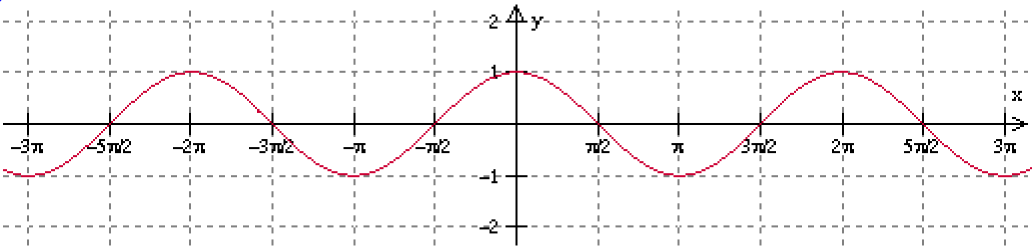
Trabajan exclusivamente en radianes (jamás en grados).

- ***y* = sen *x***



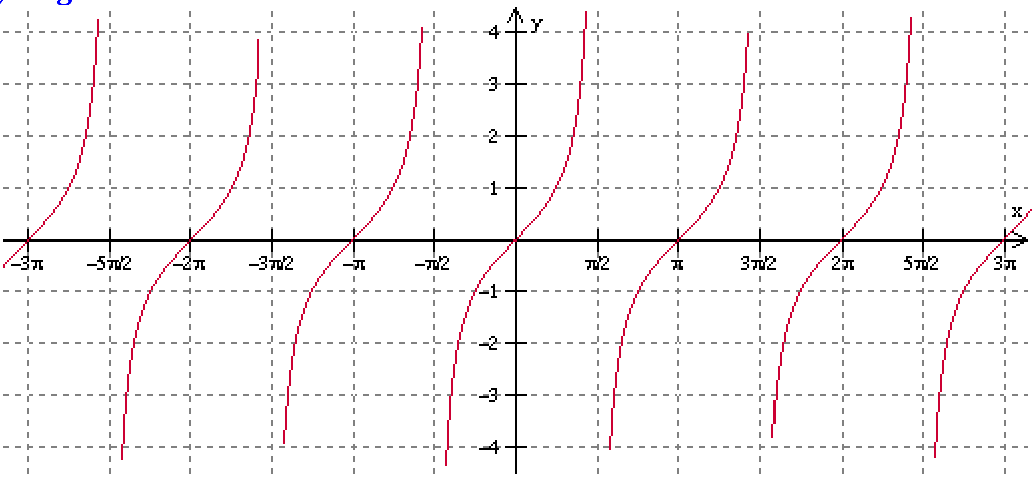
- Dom(*f*) = R
- Rec(*f*) = [–1, 1]
- Período principal: 2π
- Impar
- No tiene asíntotas
- $\nexists \lim_{x\to\infty} \text{sen } x$

- ***y* = cos *x***



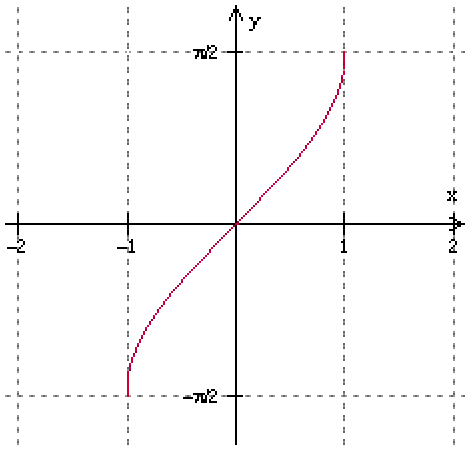
- Dom(*f*) = R
- Rec(*f*) = [–1, 1]
- Período principal: 2π
- Par
- No tiene asíntotas
- $\nexists \lim_{x\to\infty} \cos x$

- ***y* = tg *x***



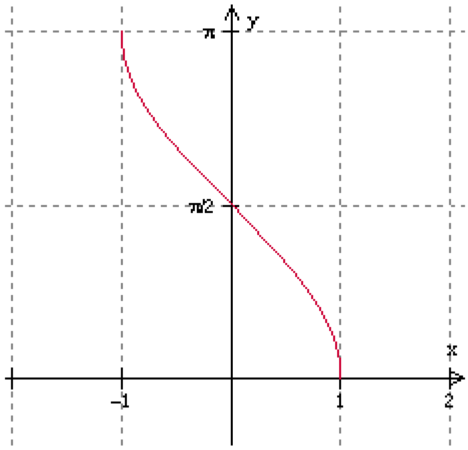
- Dom(*f*) = R – $\{x\in R \,/\, x = \pi/2+k\pi,\ k\in Z\}$
- Rec(*f*) = (–∞, ∞)
- Período principal: π
- Impar
- Tiene asíntotas verticales: todas las rectas de la forma $x = \pi/2+k\pi,\ k\in Z$
- $\nexists \lim_{x\to\infty} \text{tg } x$

- ***y* = arcsen *x***



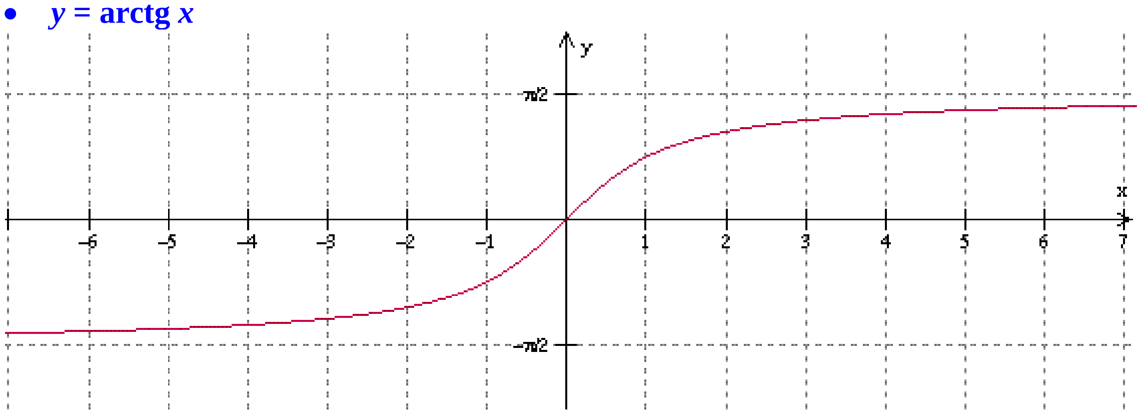
  - Dom(*f*) = [–1, 1]
  - Rec(*f*) = [–π/2, π/2]
  - Impar
  - No es periódica

- ***y* = arccos *x***



  - Dom(*f*) = [–1, 1]
  - Rec(*f*) = [0, π]
  - Impar
  - No es periódica

- ***y* = arctg *x***



  - Dom(*f*) = R
  - Rec(*f*) = [–π/2, π/2]
  - Impar
  - No es periódica
  - Tiene dos asíntotas horizontales: *y* = – π/2; *y* = π/2
  - $\lim_{x\to-\infty} \operatorname{tg} x = -\frac{\pi}{2}$
  - $\lim_{x\to+\infty} \operatorname{tg} x = \frac{\pi}{2}$