

## UNIDAD 1: Trigonometría I

### 1. INTRODUCCIÓN. SISTEMAS DE MEDIDAS DE ÁNGULOS

Trigonometría proviene del griego: *trigonos* (triángulo) y *metrón* (medida). También a veces se usa el término Goniometría, que proviene de *gonia* (ángulo). En sus orígenes esta rama de la matemática se utilizó para resolver problemas de agrimensura y astronomía, pero con el desarrollo de la ciencia se ha convertido en un instrumento indispensable en la física, la ingeniería, la medicina y todo otro proceso en el que se encuentren comportamientos que se repiten cíclicamente. Posee numerosas aplicaciones, entre las que se encuentran: las técnicas de triangulación, por ejemplo, son usadas en astronomía para medir distancias a estrellas próximas, en la medición de distancias entre puntos geográficos, y en sistemas globales de navegación por satélites.

Definición: Ángulo es la porción del plano limitada por dos semirrectas que tienen un origen común.



Según el sentido del giro decimos que:

- Un ángulo es positivo si el giro para describirlo es de sentido contrario al de las agujas del reloj.
- Un ángulo es negativo si el giro para describirlo es del mismo sentido que el giro de las agujas del reloj.

Los ángulos más conocidos son:

- El giro o ángulo completo.
- El ángulo llano.
- El cuadrante o ángulo recto.

Los ángulos se suelen representar con las letras griegas:  $\alpha$  (alpha),  $\beta$  (beta),  $\gamma$  (gamma),  $\omega$  (omega),  $\varphi$  (phi)

Para medir ángulos pueden adoptarse distintas unidades. Los sistemas más usados son

#### a) Sistema sexagesimal

La unidad de medida angular es el *grado sexagesimal*, que es la noventa-ava parte del ángulo recto (ó bien, el ángulo completo son  $360^\circ$  grados sexagesimales) y se simboliza  $1^\circ$ . Cada grado tiene 60 minutos:  $1^\circ = 60'$

Cada minuto tiene 60 segundos:  $1' = 60''$

A partir de los segundos se usa sistema decimal

Un ángulo llano mide  $180^\circ$  y un giro completo mide  $360^\circ$ . Un ángulo recto son  $90^\circ$

Ejemplo: Son ángulos  $\alpha = 27^\circ 15' 23.14''$ ,  $\beta = -126^\circ 1'$

#### Operaciones con ángulos en sistema sexagesimal

Veamos mediante ejemplos como se efectúan la suma y diferencia de ángulos, así como el producto por un  $n^\circ$  entero o la división por un  $n^\circ$  entero.

Ejemplo: Dados los ángulos  $\alpha = 57^\circ 35' 23.14''$ ,  $\beta = 67^\circ 59' 43''$  y  $\gamma = 25^\circ 50' 44''$ , calcular:

a)  $\alpha + \beta$

|                    |             |                     |                       |
|--------------------|-------------|---------------------|-----------------------|
| $\alpha =$         | $57^\circ$  | $35'$               | $23.14''$             |
| $\beta =$          | $67^\circ$  | $59'$               | $43.00''$             |
| $\alpha + \beta =$ | $124^\circ$ | $94' = 1^\circ 34'$ | $66.14'' = 1' 6.14''$ |
| $\alpha + \beta =$ | $125^\circ$ | $34'$               | $66.14'' = 1' 6.14''$ |
| $\alpha + \beta =$ | $125^\circ$ | $35'$               | $6.14''$              |

Por tanto,  $\alpha + \beta = 125^\circ 35' 6.14''$ .

b)  $\beta - \alpha$

|                    |            |       |           |
|--------------------|------------|-------|-----------|
| $\beta =$          | $67^\circ$ | $59'$ | $43.00''$ |
| $\alpha =$         | $57^\circ$ | $35'$ | $23.14''$ |
| $\beta - \alpha =$ | $10^\circ$ | $24'$ | $19.86''$ |

Por tanto,  $\beta - \alpha = 10^\circ 24' 19.86''$ . Observamos que todas las cantidades de minutos y segundos del minuendo ( $\beta$ ) son superiores a los correspondientes del sustraendo ( $\alpha$ ), con lo cual se puede realizar la diferencia sin problemas

c)  $\alpha - \beta$

En este caso, el nº de grados de  $\beta$ , es mayor que el de  $\alpha$ , por tanto el resultado es un ángulo negativo y la forma de proceder es calcular  $\beta - \alpha$  y cambiarle el signo, pues  $\alpha - \beta = -(\beta - \alpha)$ . Por tanto por el apartado anterior, como ya lo tenemos hecho,  $\alpha - \beta = -10^\circ 24' 19.86''$

d)  $\alpha - \gamma$

En este caso los minutos y segundos del minuendo son inferiores a los minutos y segundos del sustraendo, por lo que debemos aumentar los del minuendo para poder realizar la resta.

|                                           |            |       |           |
|-------------------------------------------|------------|-------|-----------|
| $\alpha =$                                | $57^\circ$ | $35'$ | $23.14''$ |
| $\alpha =$ (pasamos un grado a minutos)   | $56^\circ$ | $95'$ | $23.14''$ |
| $\alpha =$ (pasamos un minuto a segundos) | $56^\circ$ | $94'$ | $83.14''$ |
| $\gamma =$                                | $25^\circ$ | $50'$ | $44.00''$ |
| $\alpha - \gamma =$ (ya podemos restar)   | $31^\circ$ | $44'$ | $39.14''$ |

Por tanto,  $\alpha - \gamma = 31^\circ 44' 39.14''$

e)  $8\alpha$

|                                           |             |                                            |                                                  |
|-------------------------------------------|-------------|--------------------------------------------|--------------------------------------------------|
| $\alpha =$                                | $57^\circ$  | $35'$                                      | $23.14''$                                        |
| $8\alpha =$                               | $456^\circ$ | $280'$                                     | $185.12''$                                       |
| $8\alpha =$<br>(pasamos minutos a grados) | $456^\circ$ | $280' = 4 \cdot 60' + 40' = 4^\circ + 40'$ | $185.12''$                                       |
| $8\alpha =$ (pasamos segundos a minuto)   | $460^\circ$ | $40'$                                      | $185.12'' = 3 \cdot 60'' + 5.12'' = 3' + 5.12''$ |
| $8\alpha =$                               | $460^\circ$ | $43'$                                      | $5.12''$                                         |

Por tanto,  $8\alpha = 460^\circ 43' 5.12''$

f)  $\frac{1}{5}\beta$

Para hacer la división procedemos como en una división normal y los restos los vamos añadiendo a la unidad inmediatamente inferior

|                  |                  |                   |                       |
|------------------|------------------|-------------------|-----------------------|
| $67^\circ$       | $59'$            | $43''$            | $5$                   |
| $-65^\circ$      | $120'$           |                   | $13^\circ 35' 56.6''$ |
| $2^\circ = 120'$ | (sumamos) $179'$ | $43''$            |                       |
|                  | $-175'$          | $240''$           |                       |
|                  | $4' = 240''$     | (sumamos) $283''$ |                       |
|                  |                  | $-283''$          |                       |
|                  |                  | $0$               |                       |

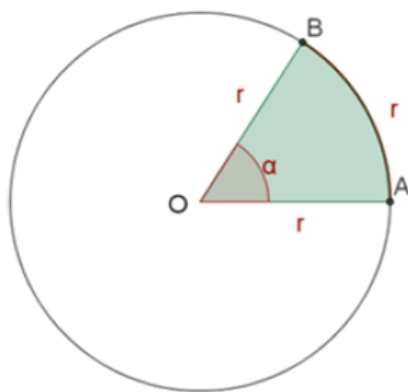
Por tanto,  $\frac{1}{5}\beta = 13^\circ 35' 56.6''$

**NOTA:** Todos estos cálculos se pueden realizar en la calculadora de manera fácil. La calculadora se ha de encontrar en modo DEG

## b) El radián

Definición: Un radián es el ángulo cuyo arco mide igual que el radio con el que ha sido trazado.

Como podemos observar en el dibujo, el ángulo  $\alpha$  mide 1 radián pues el radio  $r$  de la circunferencia coincide con la longitud del arco que determina. Diremos que  $\alpha = 1 \text{ rad}$



Como sabemos la longitud de una circunferencia es  $L = 2\pi \cdot r$ , es decir, el radio se repite  $2\pi$  veces. Como 1 rad abarca un arco que mide un radio, un ángulo completo ( $360^\circ$ ) es  $2\pi$  radianes.

Ya tenemos la primera equivalencia entre los dos sistemas:

$$2\pi \text{ rad} = 360^\circ$$

Ejemplo: Pasar a radianes los siguientes ángulos en sistema sexagesimal:

a)  $180^\circ$    b)  $90^\circ$

a)  $180^\circ = \frac{360^\circ}{2} = \frac{2\pi \text{ rad}}{2} = \pi \text{ rad}$

También se puede hacer mediante una regla de tres simple

$$b) \quad 90^\circ = \frac{360^\circ}{4} = \frac{2 \cdot \pi \text{ rad}}{4} = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$$

Construimos una tabla con las equivalencias más importantes:

| SEXAGESIMAL | RADIÁN                   |
|-------------|--------------------------|
| 0°          | 0                        |
| 90°         | $\frac{\pi}{2}$          |
| 180°        | $\pi$                    |
| 270°        | $\frac{3 \cdot \pi}{2}$  |
| 360°        | $2 \cdot \pi$            |
| 30°         | $\frac{\pi}{6}$          |
| 45°         | $\frac{\pi}{4}$          |
| 60°         | $\frac{\pi}{3}$          |
| 120°        | $\frac{2 \cdot \pi}{3}$  |
| 135°        | $\frac{3 \cdot \pi}{4}$  |
| 150°        | $\frac{5 \cdot \pi}{6}$  |
| 210°        | $\frac{7 \cdot \pi}{6}$  |
| 225°        | $\frac{5 \cdot \pi}{4}$  |
| 240°        | $\frac{4 \cdot \pi}{3}$  |
| 300°        | $\frac{5 \cdot \pi}{3}$  |
| 315°        | $\frac{7 \cdot \pi}{4}$  |
| 330°        | $\frac{11 \cdot \pi}{6}$ |

De manera similar se puede pasar de radianes a grados, pero casi siempre nos hará falta el uso de la calculadora.

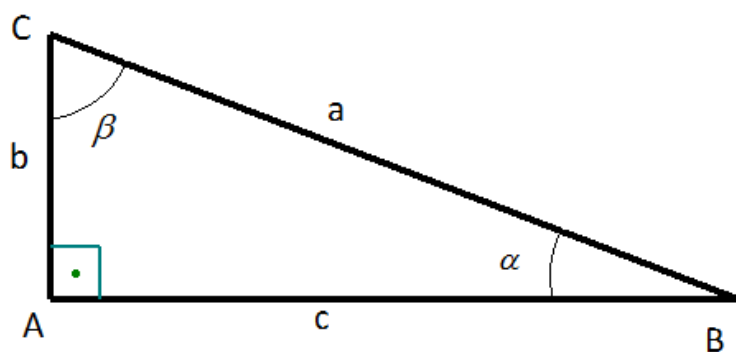
Ejemplo: Pasar a grados sexagesimales los siguientes ángulos:

- $2 \text{ rad} = 2 \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = (\text{ahora hay que usar la calculadora}) = 114^\circ 35' 29.6''$
- $1 \text{ rad} = 1 \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = (\text{ahora hay que usar la calculadora}) = 57^\circ 17' 44.81''$
- $\frac{\pi}{5} \text{ rad} = \frac{180^\circ}{5} = 36^\circ$

## 2. RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS AGUDOS

Vamos a usar un triángulo rectángulo para definir las razones trigonométricas de un ángulo agudo.

Sea el triángulo rectángulo siguiente:



En él tenemos que:

- $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$
- a es la hipotenusa
- b es el cateto opuesto a  $\alpha$ , o bien, el cateto contiguo a  $\beta$
- c es el cateto opuesto a  $\beta$ , o bien, el cateto contiguo a  $\alpha$

Se definen las razones trigonométricas como sigue:

|                                                                                                                                     |                                                                                                                                         |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| - <u>SENO</u><br>$\text{sen } \alpha = \frac{\text{cateto opuesto de } \alpha}{\text{hipotenusa}} = \frac{b}{a}$                    | - <u>COSECANTE</u><br>$\text{cosec } \alpha = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto opuesto de } \alpha} = \frac{a}{b}$                 |
| - <u>COSENO</u><br>$\text{cos } \alpha = \frac{\text{cateto contiguo de } \alpha}{\text{hipotenusa}} = \frac{c}{a}$                 | - <u>SECANTE</u><br>$\text{sec } \alpha = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto contiguo de } \alpha} = \frac{a}{c}$                    |
| - <u>TANGENTE</u><br>$\text{tg } \alpha = \frac{\text{cateto opuesto de } \alpha}{\text{cateto contiguo de } \alpha} = \frac{b}{c}$ | - <u>COTANGENTE</u><br>$\text{cotg } \alpha = \frac{\text{cateto contiguo de } \alpha}{\text{cateto opuesto de } \alpha} = \frac{c}{b}$ |

**NOTA:** Estas razones dependen sólo del ángulo  $\alpha$  y no de las medidas de los lados del triángulo construido

Propiedad: Se cumple que:

$$\text{a) } \boxed{\text{tg } \alpha = \frac{\text{sen } \alpha}{\text{cos } \alpha}} \quad \text{b) } \boxed{\text{cotg } \alpha = \frac{\text{cos } \alpha}{\text{sen } \alpha} = \frac{1}{\text{tg } \alpha}} \quad \text{c) } \boxed{\text{sec } \alpha = \frac{1}{\text{cos } \alpha}} \quad \text{d) } \boxed{\text{cosec } \alpha = \frac{1}{\text{sen } \alpha}}$$

Demostración:

$$\text{a) } \frac{\text{sen } \alpha}{\text{cos } \alpha} = \frac{\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}} = \frac{b}{c} = \text{tg } \alpha$$

Las demás son análogas, y las dejo como ejercicio

Propiedad fundamental: Se tiene que:  $\boxed{\text{sen}^2 \alpha + \text{cos}^2 \alpha = 1}$

O bien  $\text{sen}^2 \alpha = 1 - \text{cos}^2 \alpha$       ó       $\text{cos}^2 \alpha = 1 - \text{sen}^2 \alpha$

Demostración: Tenemos que

$$\text{sen}^2 \alpha + \text{cos}^2 \alpha = \frac{b^2}{a^2} + \frac{c^2}{a^2} = \frac{b^2 + c^2}{a^2} = (\text{como estamos en un triángulo rectángulo,}$$

$$\text{se verifica el teorema de Pitágoras, luego } a^2 = b^2 + c^2) = \frac{a^2}{a^2} = 1$$

### Consecuencias de la propiedad fundamental:

Se verifica que:

$$a) \quad 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} = \sec^2 \alpha$$

Demostración:

$$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = 1 + \frac{\operatorname{sen}^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{\cos^2 \alpha + \operatorname{sen}^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{1}{\cos^2 \alpha} = \sec^2 \alpha$$

$$b) \quad 1 + \operatorname{cotg}^2 \alpha = \frac{1}{\operatorname{sen}^2 \alpha} = \operatorname{cosec}^2 \alpha$$

Demostración:

$$1 + \operatorname{cotg}^2 \alpha = 1 + \frac{\cos^2 \alpha}{\operatorname{sen}^2 \alpha} = \frac{\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\operatorname{sen}^2 \alpha} = \frac{1}{\operatorname{sen}^2 \alpha} = \operatorname{cosec}^2 \alpha$$

$$c) \quad -1 \leq \operatorname{sen} \alpha \leq 1, \text{ y } -1 \leq \cos \alpha \leq 1$$

Ejercicio: Demostrar la siguiente igualdad trigonométrica:  $\operatorname{sen}^2 \alpha = 1 - \frac{\operatorname{cotg}^2 \alpha}{\operatorname{cosec}^2 \alpha}$

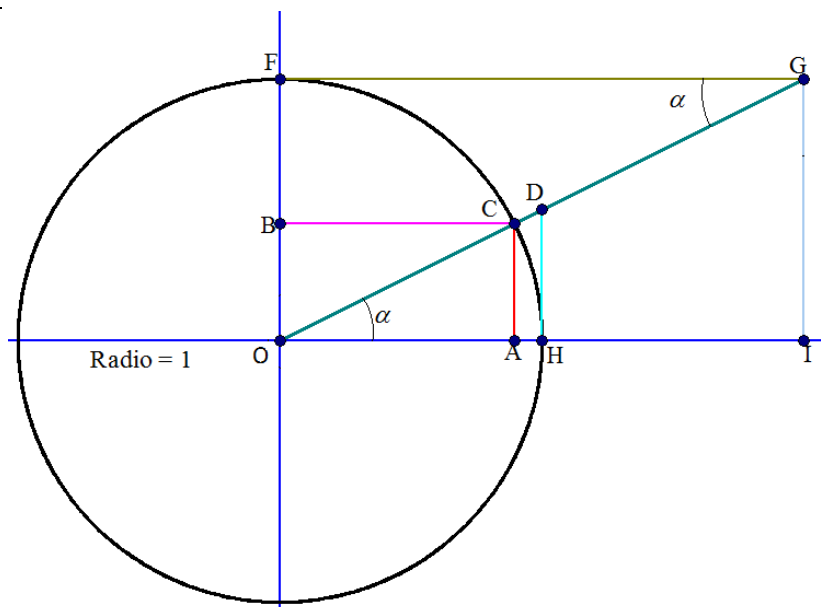
Partimos del segundo miembro y sustituimos por seno y coseno

$$1 - \frac{\operatorname{cotg}^2 \alpha}{\operatorname{cosec}^2 \alpha} = 1 - \frac{\cos^2 \alpha / \operatorname{sen}^2 \alpha}{1 / \operatorname{sen}^2 \alpha} = 1 - \frac{\cos^2 \alpha \cdot \operatorname{sen}^2 \alpha}{\operatorname{sen}^2 \alpha} = 1 - \cos^2 \alpha = \operatorname{sen}^2 \alpha \text{ con lo cual queda demostrado}$$

### **3. CIRCUNFERENCIA TRIGONOMÉTRICA UNIDAD. SEGMENTOS TRIGONOMÉTRICOS**

Vamos a considerar una circunferencia de radio 1 y sobre ella dibujamos un ángulo  $\alpha$ . Dependiendo del cuadrante donde se encuentre  $\alpha$  vamos a ver que segmentos representan las razones trigonométricas y los signos de éstas.

$\alpha \in \text{I CUADRANTE}$



Vemos que:

$\text{sen } \alpha = \frac{\overline{AC}}{\overline{OC}} = \frac{\overline{AC}}{1} = \overline{AC} = \overline{OB}$ . La distancia  $\overline{OB}$  es positiva, luego  $\text{sen } \alpha$  es positivo

$\text{cos } \alpha = \frac{\overline{OA}}{\overline{OC}} = \frac{\overline{OA}}{1} = \overline{OA}$ . La distancia  $\overline{OA}$  es positiva, luego  $\text{cos } \alpha$  es positivo

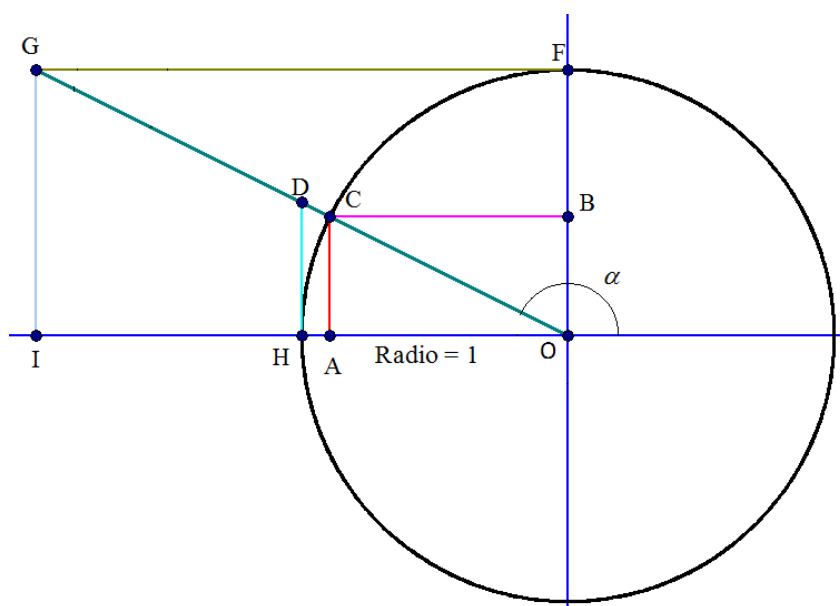
$\text{tg } \alpha = \frac{\overline{AC}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{HD}}{\overline{OH}} = \frac{\overline{HD}}{1} = \overline{HD}$ . Como  $\text{tg } \alpha = \frac{\text{sen } \alpha}{\text{cos } \alpha}$ , luego  $\text{tg } \alpha$  es positiva

$\text{cosec } \alpha = \frac{\overline{OC}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{OG}}{\overline{OF}} = \frac{\overline{OG}}{1} = \overline{OG}$ . Como  $\text{cosec } \alpha = \frac{1}{\text{sen } \alpha}$ , al ser el seno positivo,  $\text{cosec } \alpha$  es positivo

$\text{sec } \alpha = \frac{\overline{OC}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{OD}}{\overline{OH}} = \frac{\overline{OD}}{1} = \overline{OD}$ . Como  $\text{sec } \alpha = \frac{1}{\text{cos } \alpha}$ , al ser el coseno positivo,  $\text{sec } \alpha$  es positivo

$\text{cotg } \alpha = \frac{\overline{OA}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{FG}}{\overline{OF}} = \frac{\overline{FG}}{1} = \overline{FG}$ . Como  $\text{cotg } \alpha = \frac{1}{\text{tg } \alpha}$ , al ser la tangente positiva,  $\text{cotg } \alpha$  es positiva

### $\alpha \in \text{II CUADRANTE}$



De forma análoga, se tiene que:

$\text{sen } \alpha = \overline{OB}$ . La distancia  $\overline{OB}$  es positiva, luego  $\text{sen } \alpha$  es positivo

$\text{cos } \alpha = \overline{OA}$ . La distancia  $\overline{OA}$  es negativa, luego  $\text{cos } \alpha$  es negativo

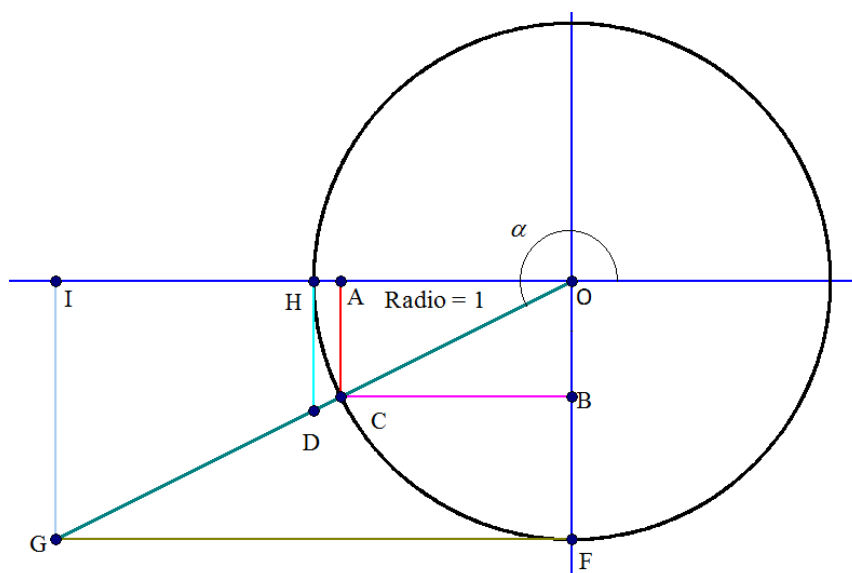
$\text{tg } \alpha = \overline{HD}$ . Como  $\text{tg } \alpha = \frac{\text{sen } \alpha}{\text{cos } \alpha}$ , luego  $\text{tg } \alpha$  es negativa

$\text{cosec } \alpha = \overline{OG}$ . Como  $\text{cosec } \alpha = \frac{1}{\text{sen } \alpha}$ , al ser el seno positivo,  $\text{cosec } \alpha$  es positivo

$\text{sec } \alpha = \overline{OD}$ . Como  $\text{sec } \alpha = \frac{1}{\text{cos } \alpha}$ , al ser el coseno negativo,  $\text{sec } \alpha$  es negativo

$\text{cotg } \alpha = \overline{FG}$ . Como  $\text{cotg } \alpha = \frac{1}{\text{tg } \alpha}$ , al ser la tangente negativa,  $\text{cotg } \alpha$  es negativa

### $\alpha \in \text{III CUADRANTE}$



De forma análoga, se tiene que:

$\text{sen } \alpha = \overline{OB}$ . La distancia  $\overline{OB}$  es negativa, luego  $\text{sen } \alpha$  es negativa

$\text{cos } \alpha = \overline{OA}$ . La distancia  $\overline{OA}$  es negativa, luego  $\text{cos } \alpha$  es negativo

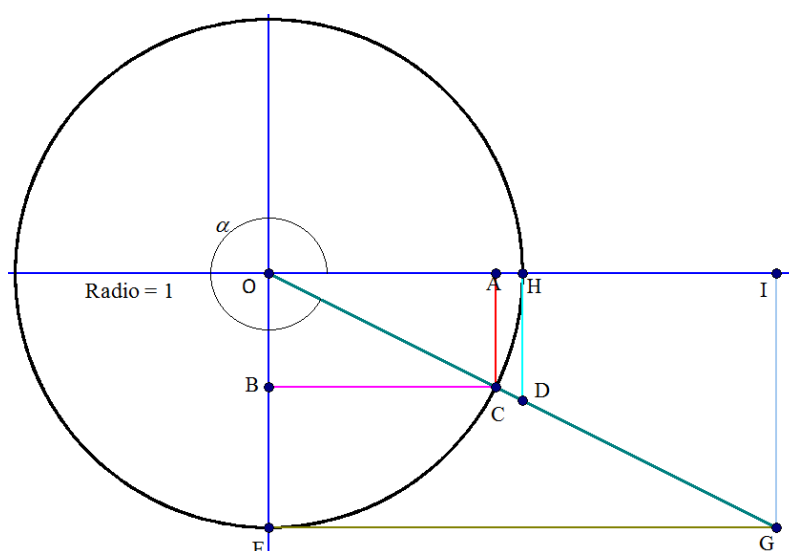
$\text{tg } \alpha = \overline{HD}$ . Como  $\text{tg } \alpha = \frac{\text{sen } \alpha}{\text{cos } \alpha}$ , luego  $\text{tg } \alpha$  es positiva

$\text{cosec } \alpha = \overline{OG}$ . Como  $\text{cosec } \alpha = \frac{1}{\text{sen } \alpha}$ , al ser el seno negativo,  $\text{cosec } \alpha$  es negativo

$\text{sec } \alpha = \overline{OD}$ . Como  $\text{sec } \alpha = \frac{1}{\text{cos } \alpha}$ , al ser el coseno negativo,  $\text{sec } \alpha$  es negativo

$\text{cotg } \alpha = \overline{FG}$ . Como  $\text{cotg } \alpha = \frac{1}{\text{tg } \alpha}$ , al ser la tangente positiva,  $\text{cotg } \alpha$  es positiva

### $\alpha \in \text{IV CUADRANTE}$



De forma análoga, se tiene que:

$\text{sen } \alpha = \overline{OB}$ . La distancia  $\overline{OB}$  es negativa, luego  $\text{sen } \alpha$  es negativo

$\text{cos } \alpha = \overline{OA}$ . La distancia  $\overline{OA}$  es positiva, luego  $\text{cos } \alpha$  es positivo

$\text{tg } \alpha = \overline{HD}$ . Como  $\text{tg } \alpha = \frac{\text{sen } \alpha}{\text{cos } \alpha}$ , luego  $\text{tg } \alpha$  es negativa

$\operatorname{cosec} \alpha = \overline{OG}$ . Como  $\operatorname{cosec} \alpha = \frac{1}{\operatorname{sen} \alpha}$ , al ser el seno negativo,  $\operatorname{cosec} \alpha$  es negativo

$\sec \alpha = \overline{OD}$ . Como  $\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha}$ , al ser el coseno positivo,  $\sec \alpha$  es positivo

$\cotg \alpha = \overline{FG}$ . Como  $\cotg \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$ , al ser la tangente negativa,  $\cotg \alpha$  es negativa

#### CUADRO RESUMEN DE SIGNOS DEL SENO, COSENO Y TANGENTE

|          | I Cuadrante | II Cuadrante | III Cuadrante | IV Cuadrante |
|----------|-------------|--------------|---------------|--------------|
| Seno     | +           | +            | -             | -            |
| Coseno   | +           | -            | -             | +            |
| tangente | +           | -            | +             | -            |

Ejercicio: Sabiendo que un ángulo  $\alpha \in \text{II CUADRANTE}$  y que  $\operatorname{sen} \alpha = \frac{2}{3}$ , calcula las restantes razones trigonométricas.

Solución: Por la igualdad fundamental tenemos que:  $\cos^2 \alpha + \operatorname{sen}^2 \alpha = 1 \Rightarrow \cos^2 \alpha = 1 - \operatorname{sen}^2 \alpha \Rightarrow$

$$\cos^2 \alpha = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2 \Rightarrow \cos^2 \alpha = 1 - \frac{4}{9} \Rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{5}{9} \Rightarrow \cos \alpha = \pm \sqrt{\frac{5}{9}} \Rightarrow \cos \alpha = \pm \frac{\sqrt{5}}{3}$$

Como estamos en el II Cuadrante, el coseno es negativo, por tanto,  $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{3}$

Ya tenemos el seno y el coseno, por lo cual podemos conocer todas las demás razones:

#### TANGENTE

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{2}{3}}{-\frac{\sqrt{5}}{3}} \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = -\frac{2}{\sqrt{5}} \text{ Racionalizamos, } \operatorname{tg} \alpha = -\frac{2}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = -\frac{2 \cdot \sqrt{5}}{5}, \text{ que sale negativa, como}$$

bien sabemos, pues estamos en el II Cuadrante.

#### COSECANTE

$$\operatorname{cosec} \alpha = \frac{1}{\operatorname{sen} \alpha} = \frac{1}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2}$$

#### SECANTE

$$\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha} = \frac{1}{-\frac{\sqrt{5}}{3}} = -\frac{3}{\sqrt{5}} \Rightarrow \sec \alpha = -\frac{3}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} \Rightarrow \sec \alpha = -\frac{3 \cdot \sqrt{5}}{5}$$

#### COTANGENTE

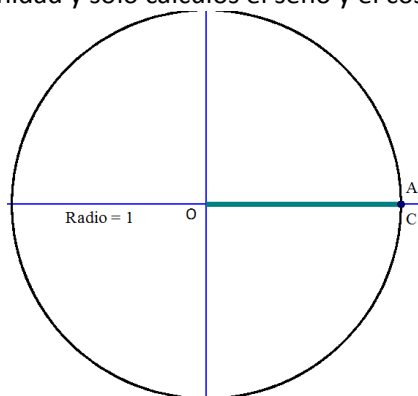
$$\cotg \alpha = \frac{\cos \alpha}{\operatorname{sen} \alpha} = \frac{-\frac{\sqrt{5}}{3}}{\frac{2}{3}} \Rightarrow \cotg \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{2}$$

#### 4. RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS NOTABLES

Vamos a calcular las razones trigonométricas de los ángulos más usados.

a. Ángulo  $0^\circ = 0 \text{ rad}$

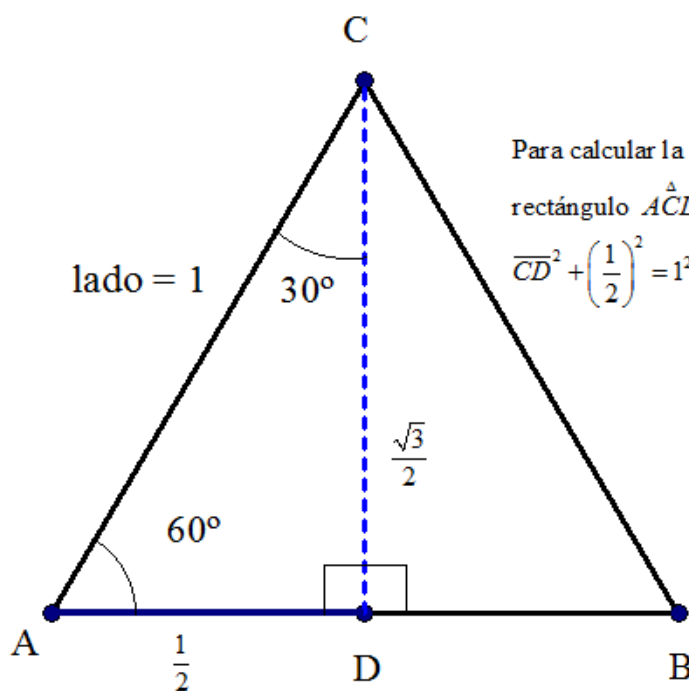
Vamos a basarnos en la circunferencia unidad y sólo cálculos el seno y el coseno y a partir de ellas todas las demás



|                                                                                                                              |                                                                                                              |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\text{sen } 0 = \frac{\overline{AC}}{\text{radio}} =$<br>(como A y C coinciden) $\frac{\overline{AA}}{1} = \frac{0}{1} = 0$ | $\text{cosec } 0 = \frac{1}{0}$<br>(diremos que no existe $\neg \exists$ o bien que es $\infty$ ) = $\infty$ |
| $\text{cos } 0 = \frac{\overline{OA}}{\text{radio}} = \frac{1}{1} = 1$                                                       | $\text{sec } 0 = \frac{1}{1} = 1$                                                                            |
| $\text{tg } 0 = \frac{0}{1} = 0$                                                                                             | $\text{cotg } 0 = \frac{1}{0}$ (diremos que no existe $\neg \exists$ o bien que es $\infty$ ) = $\infty$     |

b. Ángulo  $30^\circ = \frac{\pi}{6} \text{ rad}$

Para calcular las razones trigonométricas del ángulo  $30^\circ = \frac{\pi}{6} \text{ rad}$  vamos a utilizar un triángulo equilátero de lado 1 como el de la figura siguiente:



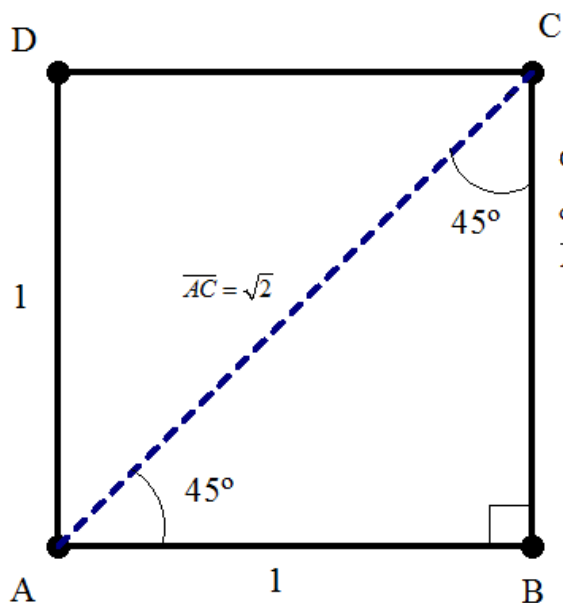
Para calcular la altura  $\overline{CD}$  aplicamos el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo  $\triangle ACD$ ,

$$\overline{CD}^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1^2 \Rightarrow \overline{CD}^2 = 1 - \frac{1}{4} \Rightarrow \overline{CD}^2 = \frac{3}{4} \Rightarrow \overline{CD} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

|                                                                                                                                                     |                                                                                                                        |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\text{sen } \frac{\pi}{6} = \frac{\overline{AD}}{\overline{AC}} = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2}$                                             | $\text{cosec } \frac{\pi}{6} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$                                                              |
| $\text{cos } \frac{\pi}{6} = \frac{\overline{CD}}{\overline{AC}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1} = \frac{\sqrt{3}}{2}$                               | $\text{sec } \frac{\pi}{6} = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$                                        |
| $\text{tg } \frac{\pi}{6} = \frac{\overline{AD}}{\overline{CD}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ | $\text{cotg } \frac{\pi}{6} = \frac{\overline{CD}}{\overline{AD}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$ |

c. Ángulo  $45^\circ = \frac{\pi}{4}$  rad

Para calcular las razones trigonométricas del ángulo  $45^\circ = \frac{\pi}{4}$  rad vamos a utilizar un cuadrado de lado 1 como el de la figura siguiente:

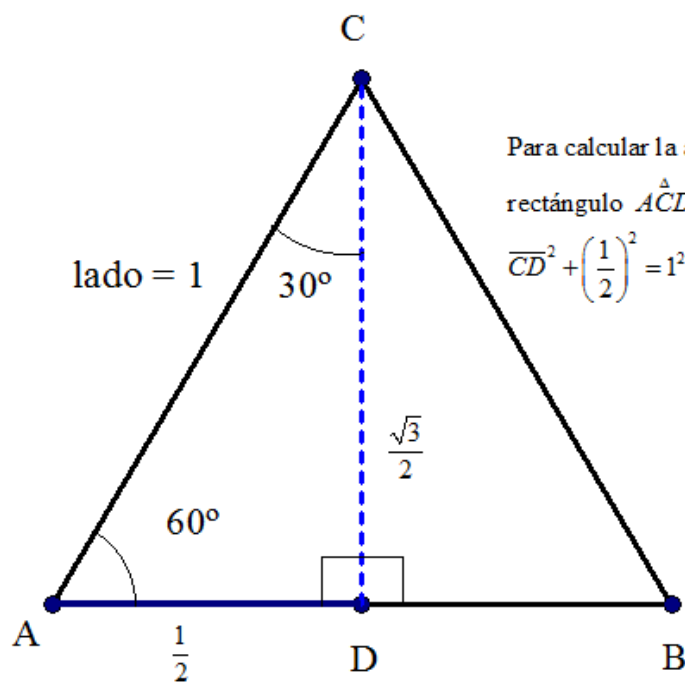


Calculamos la longitud de la diagonal,  $\overline{AC}$ , aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo  $\triangle ABC$   
 $\overline{AC}^2 = 1^2 + 1^2 \Rightarrow \overline{AC}^2 = 2 \Rightarrow \overline{AC} = \sqrt{2}$

|                                                                                                                                                                  |                                                                         |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------|
| $\text{sen } \frac{\pi}{4} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\text{cosec } \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \sqrt{2}$ |
| $\text{cos } \frac{\pi}{4} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\text{sec } \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \sqrt{2}$   |
| $\text{tg } \frac{\pi}{4} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{1}{1} = 1$                                                                               | $\text{cotg } \frac{\pi}{4} = \frac{1}{1} = 1$                          |

d. Ángulo  $60^\circ = \frac{\pi}{3}$  rad

Para calcular las razones trigonométricas del ángulo  $60^\circ = \frac{\pi}{3}$  rad vamos a utilizar un triángulo equilátero de lado 1 como el usado anteriormente:



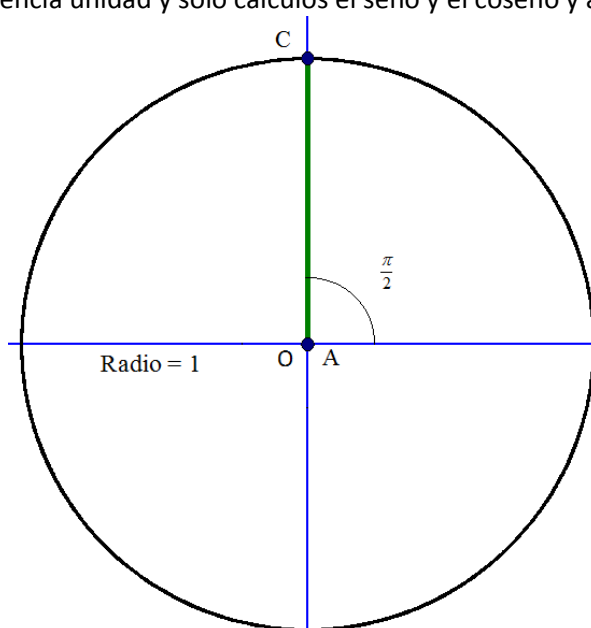
Para calcular la altura  $\overline{CD}$  aplicamos el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo  $\triangle ACD$ ,

$$\overline{CD}^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1^2 \Rightarrow \overline{CD}^2 = 1 - \frac{1}{4} \Rightarrow \overline{CD}^2 = \frac{3}{4} \Rightarrow \overline{CD} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

|                                                                                                                       |                                                                                                                                  |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\text{sen } \frac{\pi}{3} = \frac{\overline{CD}}{\overline{AC}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\text{cosec } \frac{\pi}{3} = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$                                                |
| $\text{cos } \frac{\pi}{3} = \frac{\overline{AD}}{\overline{AC}} = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2}$               | $\text{sec } \frac{\pi}{3} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$                                                                          |
| $\text{tg } \frac{\pi}{3} = \frac{\overline{CD}}{\overline{AD}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$  | $\text{cotg } \frac{\pi}{3} = \frac{\overline{AD}}{\overline{CD}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ |

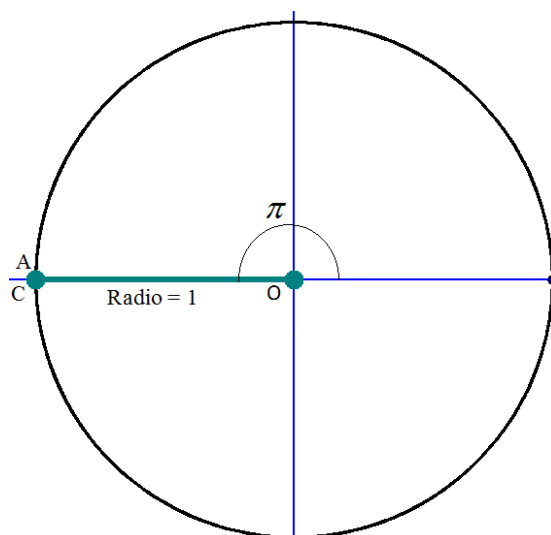
e. Ángulo  $90^\circ = \frac{\pi}{2}$  rad

Vamos a basarnos en la circunferencia unidad y sólo cálculos el seno y el coseno y a partir de ellas todas las demás



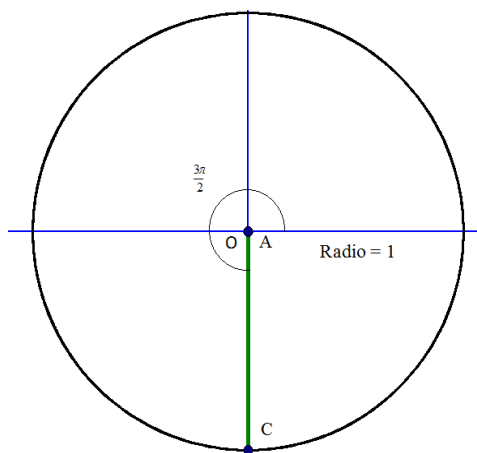
|                                                                                                                                          |                                                                                                                        |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\text{sen } \frac{\pi}{2} = \frac{\overline{AC}}{\text{radio}} = \frac{1}{1} = 1$                                                       | $\text{cosec } \frac{\pi}{2} = \frac{1}{1} = 1$                                                                        |
| $\text{cos } \frac{\pi}{2} = \frac{\overline{OA}}{\text{radio}} =$<br>(como A y O coinciden) $\frac{\overline{AA}}{1} = \frac{0}{1} = 0$ | $\text{sec } \frac{\pi}{2} = \frac{1}{0}$<br>(diremos que no existe $\neg \exists$ o bien que es $\infty$ ) = $\infty$ |
| $\text{tg } \frac{\pi}{2} = \frac{1}{0}$ (diremos que no existe $\neg \exists$ o bien que es $\infty$ ) = $\infty$                       | $\text{cotg } \frac{\pi}{2} = \frac{0}{1} = 0$                                                                         |

f. Ángulo  $180^\circ = \pi$  rad



|                                                                                                                                |                                                                                                                |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\text{sen } \pi = \frac{\overline{AC}}{\text{radio}} =$<br>(como A y C coinciden) $\frac{\overline{AA}}{1} = \frac{0}{1} = 0$ | $\text{cosec } \pi = \frac{1}{0}$<br>(diremos que no existe $\neg \exists$ o bien que es $\infty$ ) = $\infty$ |
| $\text{cos } \pi = \frac{\overline{OA}}{\text{radio}} = \frac{-1}{1} = -1$                                                     | $\text{sec } \pi = \frac{1}{-1} = -1$                                                                          |
| $\text{tg } \pi = \frac{0}{1} = 0$                                                                                             | $\text{cotg } \pi = \frac{1}{0}$ (diremos que no existe $\neg \exists$ o bien que es $\infty$ ) = $\infty$     |

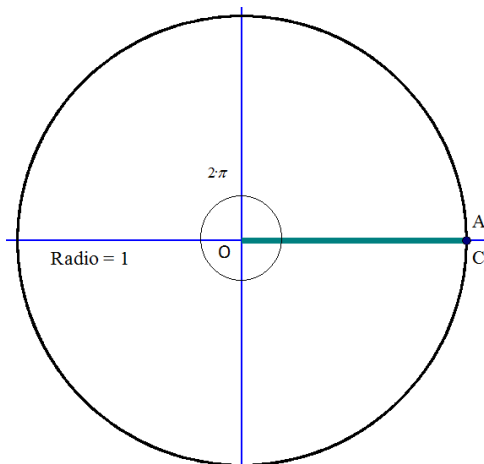
g. Ángulo  $270^\circ = \frac{3\pi}{2}$  rad



|                                                                                                                                           |                                                                                                                         |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\text{sen } \frac{3\pi}{2} = \frac{\overline{AC}}{\text{radio}} = \frac{-1}{1} = -1$                                                     | $\text{cosec } \frac{3\pi}{2} = \frac{1}{-1} = -1$                                                                      |
| $\text{cos } \frac{3\pi}{2} = \frac{\overline{OA}}{\text{radio}} =$<br>(como A y O coinciden) $\frac{\overline{AA}}{1} = \frac{0}{1} = 0$ | $\text{sec } \frac{3\pi}{2} = \frac{1}{0}$<br>(diremos que no existe $\neg \exists$ o bien que es $\infty$ ) $= \infty$ |
| $\text{tg } \frac{3\pi}{2} = \frac{1}{0}$ (diremos que no existe $\neg \exists$ o bien que es $\infty$ ) $= \infty$                       | $\text{cotg } \frac{3\pi}{2} = \frac{0}{1} = 0$                                                                         |

h. Ángulo  $360^\circ = 2\pi$  rad

Al dar una vuelta completa, las razones son iguales y empiezan a repetirse, luego las razones trigonométricas de  $2\pi$  rad son iguales a las de 0 rad



|                                                                                                                                 |                                                                                                                 |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\text{sen } 2\pi = \frac{\overline{AC}}{\text{radio}} =$<br>(como A y C coinciden) $\frac{\overline{AA}}{1} = \frac{0}{1} = 0$ | $\text{cosec } 2\pi = \frac{1}{0}$<br>(diremos que no existe $\neg \exists$ o bien que es $\infty$ ) $= \infty$ |
| $\text{cos } 2\pi = \frac{\overline{OA}}{\text{radio}} = \frac{1}{1} = 1$                                                       | $\text{sec } 2\pi = \frac{1}{1} = 1$                                                                            |
| $\text{tg } 2\pi = \frac{0}{1} = 0$                                                                                             | $\text{cotg } 2\pi = \frac{1}{0}$ (diremos que no existe $\neg \exists$ o bien que es $\infty$ ) $= \infty$     |

Hagamos una tabla resumen con el seno, coseno y tangente de los ángulos notables:

|                                        | SENO                                      | COSENO                                    | TANGENTE                                  |
|----------------------------------------|-------------------------------------------|-------------------------------------------|-------------------------------------------|
| $0^\circ = 0 \text{ rad}$              | 0                                         | 1                                         | 0                                         |
| $30^\circ = \frac{\pi}{6} \text{ rad}$ | $\frac{1}{2}$                             | $\frac{\sqrt{3}}{2}$                      | $\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ |
| $45^\circ = \frac{\pi}{4} \text{ rad}$ | $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ | 1                                         |
| $60^\circ = \frac{\pi}{3} \text{ rad}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$                      | $\frac{1}{2}$                             | $\sqrt{3}$                                |

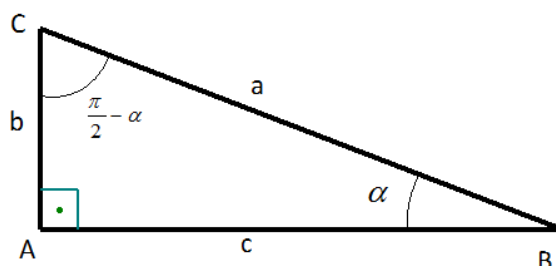
|                                          |    |    |          |
|------------------------------------------|----|----|----------|
| $90^\circ = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$   | 1  | 0  | $\infty$ |
| $180^\circ = \pi \text{ rad}$            | 0  | -1 | 0        |
| $270^\circ = \frac{3\pi}{2} \text{ rad}$ | -1 | 0  | $\infty$ |
| $360^\circ = 2\pi \text{ rad}$           | 0  | 1  | 0        |

## 5. RELACIONES ENTRE LAS RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS DE DISTINTOS CUADRANTES

### a. Ángulos complementarios

Son aquellos ángulos cuya suma es  $90^\circ$ . Es decir, si un ángulo es  $\alpha$ , su complementario es  $90^\circ - \alpha$ . O bien, usando radianes,  $\alpha$  y  $\frac{\pi}{2} - \alpha$ , son complementarios.

En este tipo de ángulos el seno de uno es el coseno del otro y viceversa. Y por tanto la tangente y la cotangente también. Se observa fácilmente en la figura siguiente:



Como se observa:

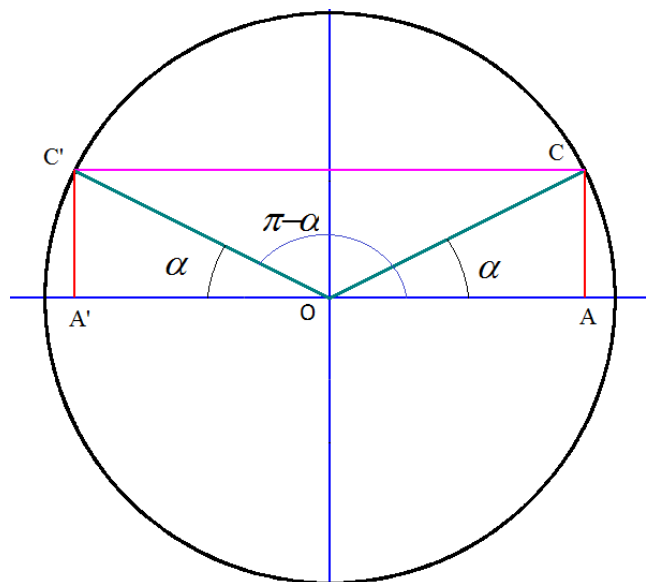
$$\begin{cases} \operatorname{sen} \alpha = \cos \left( \frac{\pi}{2} - \alpha \right) = \frac{b}{a} \\ \cos \alpha = \operatorname{sen} \left( \frac{\pi}{2} - \alpha \right) = \frac{c}{a} \\ \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{cotg} \left( \frac{\pi}{2} - \alpha \right) = \frac{b}{c} \end{cases}$$

Ejemplo: Los ángulos de  $60^\circ$  y  $30^\circ$  son complementarios, y como hemos visto ya, el seno de uno es el coseno del otro.

### b. Ángulos suplementarios

Son aquellos ángulos cuya suma es  $180^\circ$ . Es decir, si un ángulo es  $\alpha$ , su suplementario es  $180^\circ - \alpha$ . O bien, usando radianes,  $\alpha$  y  $\pi - \alpha$ , son suplementarios.

En este tipo de ángulos los senos coinciden pero los cosenos son opuestos, y por tanto las tangentes también son opuestas. Veámoslo gráficamente:



$$\begin{cases} \sin(\pi - \alpha) = \frac{\overline{A'C'}}{\text{radio}} = \frac{\overline{AC}}{\text{radio}} = \sin \alpha \\ \cos(\pi - \alpha) = \frac{\overline{OA'}}{\text{radio}} = \frac{-\overline{OA}}{\text{radio}} = -\cos \alpha \\ \operatorname{tg}(\pi - \alpha) = \frac{\sin(\pi - \alpha)}{\cos(\pi - \alpha)} = \frac{\sin \alpha}{-\cos \alpha} = -\operatorname{tg} \alpha \end{cases}$$

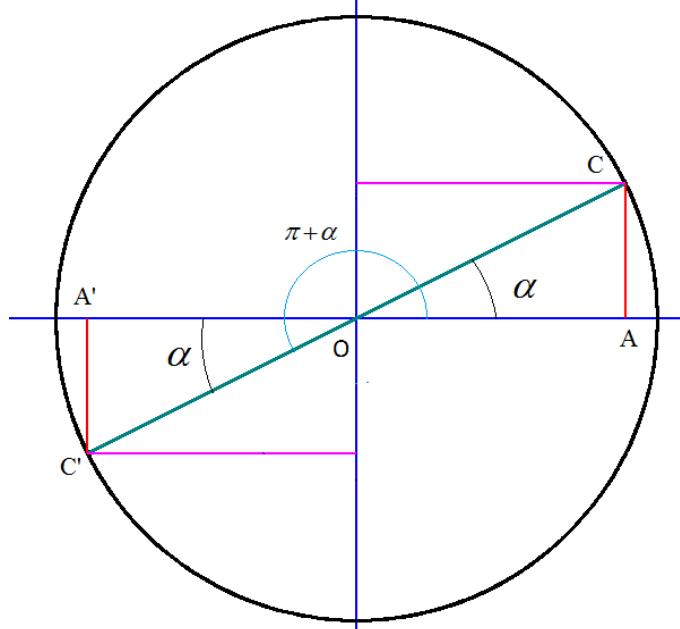
Ejemplo: Calcula las razones trigonométricas de  $120^\circ$

Nos damos cuenta que  $60^\circ$  es el suplementario de  $120^\circ$ , luego como ya conocemos las de  $60^\circ$ , ya tenemos que:

$$\begin{cases} \sin 120^\circ = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \cos 120^\circ = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2} \\ \operatorname{tg} 120^\circ = -\operatorname{tg} 60^\circ = -\sqrt{3} \end{cases}$$

c. Ángulos que se diferencian en  $180^\circ$

Son ángulos de la forma,  $\alpha$  y  $180^\circ + \alpha$ , que si los restamos da  $180^\circ$ . O bien usando radianes,  $\alpha$  y  $\pi + \alpha$ . Estos ángulos tienen el seno y el coseno cambiado de signo, y por tanto la tangente es la misma.



$$\begin{cases} \sin(\pi + \alpha) = \frac{\overline{A'C'}}{\text{radio}} = \frac{-\overline{AC}}{\text{radio}} = -\sin \alpha \\ \cos(\pi + \alpha) = \frac{\overline{OA'}}{\text{radio}} = \frac{-\overline{OA}}{\text{radio}} = -\cos \alpha \\ \operatorname{tg}(\pi + \alpha) = \frac{\sin(\pi + \alpha)}{\cos(\pi + \alpha)} = \frac{-\sin \alpha}{-\cos \alpha} = \operatorname{tg} \alpha \end{cases}$$

Ejemplo: Calcular la secante, la cosecante y la cotangente de  $\frac{5\pi}{4}$  rad

En primer lugar pasamos el ángulo dado a grados, pues nos puede resultar más fácil.

$\frac{5\pi}{4} \text{ rad} = \frac{5 \cdot 180^\circ}{4} = 225^\circ$  y ahora nos damos cuenta que  $225^\circ$  y  $45^\circ$  difieren  $180^\circ$ , pues  $225^\circ - 180^\circ = 45^\circ$  o lo

que es lo mismo,  $225^\circ = 180^\circ + 45^\circ$ . Esto expresado en radianes sería que  $\frac{5\pi}{4} = \pi + \frac{\pi}{4}$

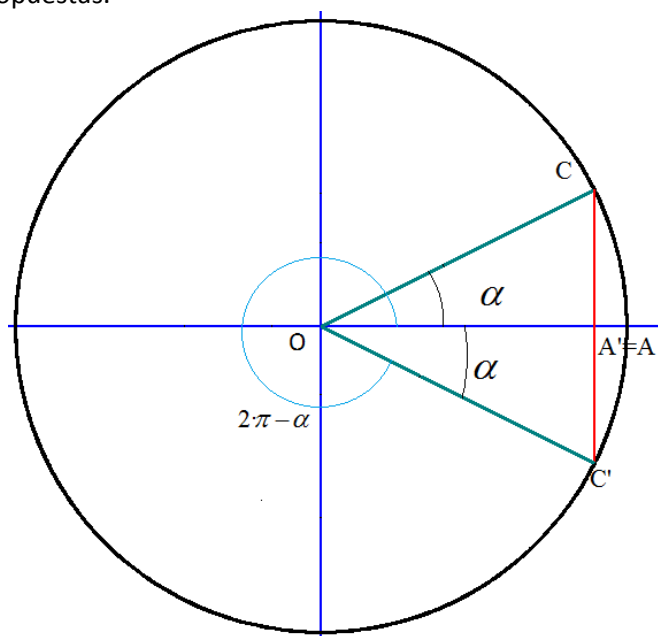
Por tanto, empleando radianes como es el dato del problema,

$$\left\{ \begin{array}{l} \sin \frac{5\pi}{4} = -\sin \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \operatorname{cosec} \frac{5\pi}{4} = \frac{1}{\sin \frac{5\pi}{4}} = \frac{1}{-\frac{\sqrt{2}}{2}} = -\sqrt{2} \\ \cos \frac{5\pi}{4} = -\cos \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \sec \frac{5\pi}{4} = \frac{1}{\cos \frac{5\pi}{4}} = \frac{1}{-\frac{\sqrt{2}}{2}} = -\sqrt{2} \\ \operatorname{tg} \frac{5\pi}{4} = \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 1 \end{array} \right.$$

d. Ángulos que suman  $360^\circ$

Son aquellos ángulos cuya suma es  $360^\circ$ . Es decir, si un ángulo es  $\alpha$ , el otro es  $360^\circ - \alpha$ . O bien, usando radianes,  $\alpha$  y  $2\pi - \alpha$ , suman  $2\pi - \alpha$ .

En este tipo de ángulos los cosenos coinciden pero los senos son opuestos, y por tanto las tangentes también son opuestas.



$$\left\{ \begin{array}{l} \sin (2\pi - \alpha) = \frac{\overline{A'C'}}{\text{radio}} = \frac{-\overline{AC}}{\text{radio}} = -\sin \alpha \\ \cos (2\pi - \alpha) = \frac{\overline{OA'}}{\text{radio}} = \frac{\overline{OA}}{\text{radio}} = \cos \alpha \\ \operatorname{tg} (2\pi - \alpha) = \frac{\sin (2\pi - \alpha)}{\cos (2\pi - \alpha)} = \frac{-\sin \alpha}{\cos \alpha} = -\operatorname{tg} \alpha \end{array} \right.$$

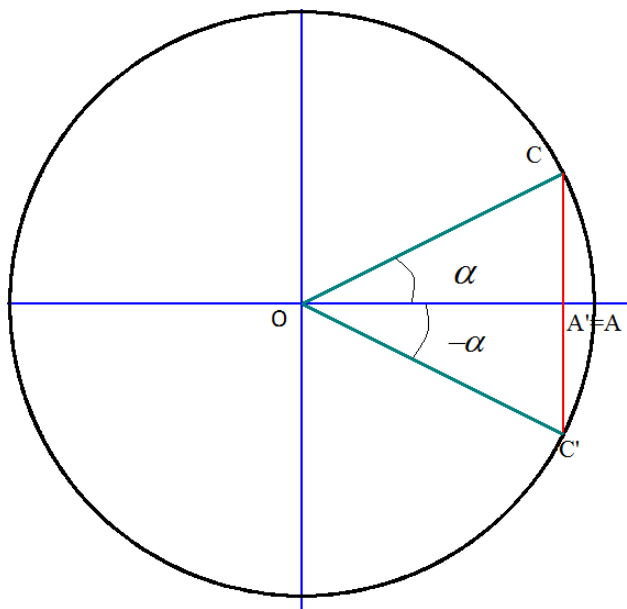
Ejemplo: Calcular la tangente del ángulo de  $330^\circ$

Nos damos cuenta que  $330^\circ$  y  $30^\circ$  suman  $360^\circ$ , luego aplicando lo anterior, tenemos que

$$\operatorname{tg} (330^\circ) = \frac{\sin 330^\circ}{\cos 330^\circ} = \frac{-\sin 30^\circ}{\cos 30^\circ} = -\operatorname{tg} 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

e. Ángulos opuestos

Son ángulos de signo opuesto, es decir,  $\alpha$  y  $-\alpha$ . Como vemos en el dibujo su comportamiento es análogo al anterior, ángulos que suman  $360^\circ$



$$\begin{cases} \sin(-\alpha) = \frac{\overline{A'C'}}{\text{radio}} = \frac{-\overline{AC}}{\text{radio}} = -\sin \alpha \\ \cos(-\alpha) = \frac{\overline{OA'}}{\text{radio}} = \frac{\overline{OA}}{\text{radio}} = \cos \alpha \\ \operatorname{tg}(-\alpha) = \frac{\sin(-\alpha)}{\cos(-\alpha)} = \frac{-\sin \alpha}{\cos \alpha} = -\operatorname{tg} \alpha \end{cases}$$

Ejemplo: Calcular el coseno de  $-\frac{\pi}{4}$

$$\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

f. Ángulos que se diferencian en un nº enteros de vueltas

Son ángulos que superan los  $360^\circ$  o inferiores a  $-360^\circ$ , es decir, realizan vueltas completas. Son de la forma  $\alpha + k \cdot 360^\circ$  con  $k \in \mathbb{Z}$  o bien  $\alpha + k \cdot 2\pi$  con  $k \in \mathbb{Z}$  si es en radianes. Se suele poner como  $\alpha + 2 \cdot k \cdot \pi$  con  $k \in \mathbb{Z}$ . Hay que dividir el ángulo dado por 360, y el cociente es el nº de vueltas y el resto es el ángulo con el que coinciden todas las razones trigonométricas. Las razones coinciden con la de  $\alpha$ .

$$\begin{cases} \sin(\alpha + k \cdot 360^\circ) = \sin \alpha \\ \cos(\alpha + k \cdot 360^\circ) = \cos \alpha \\ \operatorname{tg}(\alpha + k \cdot 360^\circ) = \operatorname{tg} \alpha \end{cases}$$

Ejemplo: Calcular el coseno de  $855^\circ$

Hacemos la división de 855 entre 360 y nos da de cociente 2 y de resto 135, es decir,  $855^\circ = 135^\circ + 2 \cdot 360^\circ$ . Por tanto,

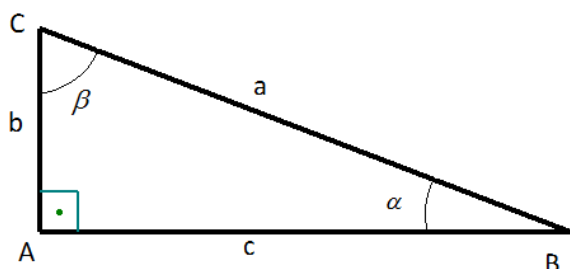
$$\cos 855^\circ = \cos(135 + 2 \cdot 360^\circ) = \cos 135^\circ = (135^\circ \text{ y } 45^\circ \text{ son suplementarios}) = -\cos 45^\circ = \frac{-\sqrt{2}}{2}$$

## UNIDAD 2: Trigonometría II

### 1. RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS

Resolver un triángulo es conocer la longitud de cada uno de sus lados y la medida de cada uno de sus ángulos. En el caso de triángulos rectángulos, ya sabemos la medida de uno de sus ángulos,  $90^\circ$ , el ángulo recto.

Dado un triángulo rectángulo como el de la figura, se cumple que:



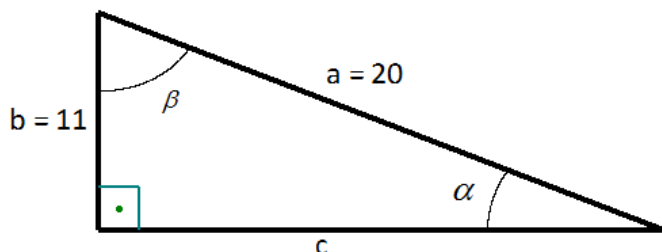
$$\alpha + \beta = 90^\circ$$

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{b}{a}, \cos \alpha = \frac{c}{a}, \operatorname{tg} \alpha = \frac{b}{c}$$

Teorema de Pitágoras:

$$b^2 + c^2 = a^2$$

Ejemplo: En un triángulo rectángulo se conocen un cateto  $b = 11 \text{ cm}$  y la hipotenusa  $a = 20 \text{ cm}$ . Halla los demás elementos.



Por el teorema de Pitágoras podemos calcular el otro cateto:

$$11^2 + c^2 = 20^2 \Rightarrow 121 + c^2 = 400$$

$$\Rightarrow c^2 = 279 \Rightarrow c = 16'7$$

Por la definición de seno, por ejemplo, tenemos que:

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{11}{20} = 0'55 \Rightarrow$$

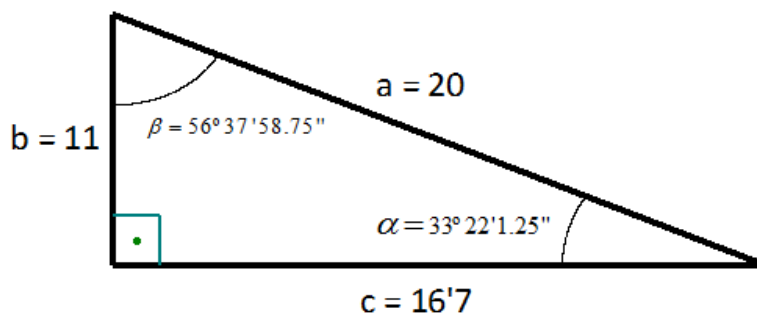
$$(\text{usando la calculadora}) \alpha = 33^\circ 22' 1.25''$$

Por último, como

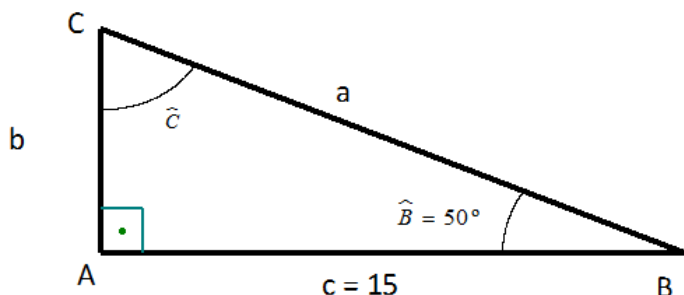
$$\alpha + \beta = 90^\circ \Rightarrow 33^\circ 22' 1.25'' + \beta = 90^\circ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \beta = 56^\circ 37' 58.75''$$

Ya tenemos por tanto nuestro triángulo resuelto:



Ejemplo: En un triángulo rectángulo del que se conocen  $B = 50^\circ$ , y un cateto  $c = 15 \text{ cm}$ , calcula los demás elementos.



Tenemos que:

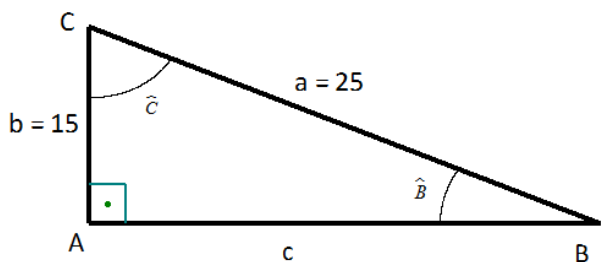
$$50^\circ + C = 90^\circ \Rightarrow C = 40^\circ$$

$$\operatorname{tg} 50^\circ = \frac{b}{15} \Rightarrow b = 15 \cdot \operatorname{tg} 50^\circ \Rightarrow b = 17'88 \text{ cm}$$

$$\cos 50^\circ = \frac{15}{a} \Rightarrow a = \frac{15}{\cos 50^\circ} \Rightarrow a = 23'34 \text{ cm}$$

**Ejemplo:** Si queremos que una cinta transportadora de 25 metros eleve una carga hasta una altura de 15 metros, ¿qué ángulo se deberá inclinar la cinta?

Tenemos una situación como la siguiente:



$a = 25$  es la longitud de la cinta transportadora

$b = 15$  es la altura que queremos que eleve el material

$B$ , es lo que queremos calcular.

Por la definición de seno,

$$\text{sen } B = \frac{15}{25} \Rightarrow (\text{usando la calculadora}) B = 36^\circ 52' 11.63''$$

Ese es el ángulo de inclinación

## 2. RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE LA SUMA Y DIFERENCIA DE DOS ÁNGULOS

### - Razones trigonométricas de la suma de dos ángulos

Se tiene que:

$$\text{sen } (\alpha + \beta) = \text{sen } \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \text{sen } \beta$$

$$\cos (\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \text{sen } \alpha \cdot \text{sen } \beta$$

$$\text{tg } (\alpha + \beta) = \frac{\text{tg } \alpha + \text{tg } \beta}{1 - \text{tg } \alpha \cdot \text{tg } \beta}$$

**Ejemplo:** Calcula las siguientes razones trigonométricas sin usar calculadora:

$$\text{a) } \text{sen } 75^\circ = \text{sen } (45^\circ + 30^\circ) = \text{sen } 45^\circ \cdot \cos 30^\circ + \cos 45^\circ \cdot \text{sen } 30^\circ \Rightarrow$$

$$\text{sen } 75^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow \text{sen } 75^\circ = \frac{\sqrt{2}}{4} (\sqrt{3} + 1)$$

$$\text{b) } \cos 75^\circ = \cos (45^\circ + 30^\circ) = \cos 45^\circ \cdot \cos 30^\circ - \text{sen } 45^\circ \cdot \text{sen } 30^\circ \Rightarrow$$

$$\cos 75^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow \cos 75^\circ = \frac{\sqrt{2}}{4} (\sqrt{3} - 1)$$

$$\text{c) } \text{tg } 75^\circ = \text{tg } (45^\circ + 30^\circ) = \frac{\text{tg } 45^\circ + \text{tg } 30^\circ}{1 - \text{tg } 45^\circ \cdot \text{tg } 30^\circ} = \frac{1 + \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 - \frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{\frac{3 + \sqrt{3}}{3}}{\frac{3 - \sqrt{3}}{3}} \Rightarrow$$

$$\text{tg } 75^\circ = \frac{3 + \sqrt{3}}{3 - \sqrt{3}} \Rightarrow (\text{racionalizamos}) \text{tg } 75^\circ = \frac{3 + \sqrt{3}}{3 - \sqrt{3}} \cdot \frac{3 + \sqrt{3}}{3 + \sqrt{3}} = \frac{(3 + \sqrt{3})^2}{9 - 3} \Rightarrow$$

$$\text{tg } 75^\circ = \frac{9 + 6\sqrt{3} + 3}{6} = \frac{12 + 6\sqrt{3}}{6} \Rightarrow \text{tg } 75^\circ = 2 + \sqrt{3}$$

- Razones trigonométricas de la diferencia de dos ángulos

Se tiene que:

$$\boxed{\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta - \cos \alpha \cdot \sin \beta}$$

$$\boxed{\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta}$$

$$\boxed{\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta}}$$

Ejemplo: Calcula las siguientes razones trigonométricas sin usar calculadora:

d)  $\sin 15^\circ = \sin(45^\circ - 30^\circ) = \sin 45^\circ \cdot \cos 30^\circ - \cos 45^\circ \cdot \sin 30^\circ \Rightarrow$

$$\sin 15^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow \sin 15^\circ = \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3} - 1)$$

e)  $\cos 15^\circ = \cos(45^\circ - 30^\circ) = \cos 45^\circ \cdot \cos 30^\circ + \sin 45^\circ \cdot \sin 30^\circ \Rightarrow$

$$\cos 15^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow \cos 15^\circ = \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3} + 1)$$

f)  $\operatorname{tg} 15^\circ = \operatorname{tg}(45^\circ - 30^\circ) = \frac{\operatorname{tg} 45^\circ - \operatorname{tg} 30^\circ}{1 + \operatorname{tg} 45^\circ \cdot \operatorname{tg} 30^\circ} = \frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 + \frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{3 - \sqrt{3}}{3 + \sqrt{3}} \Rightarrow$

$$\operatorname{tg} 15^\circ = \frac{3 - \sqrt{3}}{3 + \sqrt{3}} \Rightarrow (\text{racionalizamos}) \operatorname{tg} 15^\circ = \frac{3 - \sqrt{3}}{3 + \sqrt{3}} \cdot \frac{3 - \sqrt{3}}{3 - \sqrt{3}} = \frac{(3 - \sqrt{3})^2}{9 - 3} \Rightarrow$$

$$\operatorname{tg} 15^\circ = \frac{9 - 6\sqrt{3} + 3}{6} = \frac{12 - 6\sqrt{3}}{6} \Rightarrow \operatorname{tg} 15^\circ = 2 - \sqrt{3}$$

### 3. RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DEL ÁNGULO DOBLE Y DEL ÁNGULO MITAD

- Razones trigonométricas del ángulo doble

Se tiene que:

$$\boxed{\sin(2\alpha) = 2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha}$$

$$\boxed{\cos(2\alpha) = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}$$

$$\boxed{\operatorname{tg}(2\alpha) = \frac{2 \cdot \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}}$$

- Razones trigonométricas del ángulo mitad

Se tiene que:

$$\boxed{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}}$$

$$\boxed{\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}}$$

$$\boxed{\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}}}$$

(Dependiendo del cuadrante donde se encuentre  $\alpha$ , tomaremos el signo + o el - correspondiente)

Ejemplo: Sabiendo que  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{-3}{4}$ , y que  $\alpha \in II$  Cuadrante, calcula:

a)  $\operatorname{sen} (2\alpha)$     b)  $\cos (2\alpha)$     c)  $\operatorname{tg} (2\alpha)$     d)  $\operatorname{sen} \left( \frac{\alpha}{2} \right)$     e)  $\cos \left( \frac{\alpha}{2} \right)$     f)  $\operatorname{tg} \left( \frac{\alpha}{2} \right)$

Lo primero que vamos a hacer es calcular las razones correspondientes al ángulo  $\alpha$ .

$$\text{Como } 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Rightarrow 1 + \left( \frac{-3}{4} \right)^2 = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Rightarrow \frac{25}{16} = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{16}{25} \Rightarrow$$

$$\cos \alpha = \pm \sqrt{\frac{16}{25}} \Rightarrow \cos \alpha = \pm \frac{4}{5} \Rightarrow (\text{como } \alpha \text{ es del } 2^\circ \text{ Cuadrante, el } + \text{ no es válido}) \Rightarrow \boxed{\cos \alpha = -\frac{4}{5}}$$

Ahora como

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha \cdot \cos \alpha = \operatorname{sen} \alpha \Rightarrow \operatorname{sen} \alpha = \left( \frac{-3}{4} \right) \left( -\frac{4}{5} \right) \Rightarrow \boxed{\operatorname{sen} \alpha = \frac{3}{5}}$$

a)

$$\operatorname{sen} (2\alpha) = 2 \cdot \operatorname{sen} \alpha \cdot \cos \alpha \Rightarrow \operatorname{sen} (2\alpha) = 2 \cdot \frac{3}{5} \cdot \left( -\frac{4}{5} \right) \Rightarrow \boxed{\operatorname{sen} (2\alpha) = -\frac{24}{25}}$$

b)

$$\cos (2\alpha) = \cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha \Rightarrow \cos (2\alpha) = \left( -\frac{4}{5} \right)^2 - \left( \frac{3}{5} \right)^2 = \frac{16}{25} - \frac{9}{25} \Rightarrow \boxed{\cos (2\alpha) = \frac{7}{25}}$$

c)

$$\operatorname{tg} (2\alpha) = \frac{2 \cdot \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{2 \cdot \left( -\frac{3}{4} \right)}{1 - \left( -\frac{3}{4} \right)^2} \Rightarrow \operatorname{tg} (2\alpha) = \frac{-\frac{6}{4}}{1 - \frac{9}{16}} = \frac{-\frac{6}{4}}{\frac{7}{16}} \Rightarrow \boxed{\operatorname{tg} (2\alpha) = -\frac{24}{7}}$$

d) Como  $\alpha \in II$  Cuadrante  $\Rightarrow \frac{\alpha}{2} \in I$  Cuadrante, y con ello podemos elegir bien los signos. Todos son positivos.

$$\operatorname{sen} \left( \frac{\alpha}{2} \right) = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}} \text{ (el } - \text{ no es válido pues es del I Cuadrante)} \Rightarrow$$

$$\operatorname{sen} \left( \frac{\alpha}{2} \right) = + \sqrt{\frac{1 - \left( -\frac{4}{5} \right)}{2}} \Rightarrow \operatorname{sen} \left( \frac{\alpha}{2} \right) = \sqrt{\frac{1 + \frac{4}{5}}{2}} \Rightarrow \operatorname{sen} \left( \frac{\alpha}{2} \right) = \sqrt{\frac{\frac{9}{5}}{2}} \Rightarrow \operatorname{sen} \left( \frac{\alpha}{2} \right) = \sqrt{\frac{9}{10}} \Rightarrow$$

$$\operatorname{sen} \left( \frac{\alpha}{2} \right) = \frac{3}{\sqrt{10}} \Rightarrow (\text{racionalizamos}) \operatorname{sen} \left( \frac{\alpha}{2} \right) = \frac{3}{\sqrt{10}} \cdot \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{10}} \Rightarrow \boxed{\operatorname{sen} \left( \frac{\alpha}{2} \right) = \frac{3\sqrt{10}}{10}}$$

$$e) \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{1+\cos \alpha}{2}} \text{ (el - no es válido pues es del I Cuadrante)} \Rightarrow$$

$$\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = +\sqrt{\frac{1+\left(-\frac{4}{5}\right)}{2}} \Rightarrow \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \sqrt{\frac{1-\frac{4}{5}}{2}} \Rightarrow \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \sqrt{\frac{\frac{1}{5}}{2}} \Rightarrow \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \sqrt{\frac{1}{10}} \Rightarrow$$

$$\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{10}} \Rightarrow \text{(racionalizamos)} \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{10}} \cdot \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{10}} \Rightarrow \boxed{\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\sqrt{10}}{10}}$$

$$f) \operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{1-\cos \alpha}{1+\cos \alpha}} \text{ (el - no es válido pues es del I Cuadrante)} \Rightarrow$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = +\sqrt{\frac{1-\left(-\frac{4}{5}\right)}{1+\left(-\frac{4}{5}\right)}} \Rightarrow \operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \sqrt{\frac{1+\frac{4}{5}}{1-\frac{4}{5}}} \Rightarrow \operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \sqrt{\frac{\frac{9}{5}}{\frac{1}{5}}} \Rightarrow \operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \sqrt{9} \Rightarrow \boxed{\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 3}$$

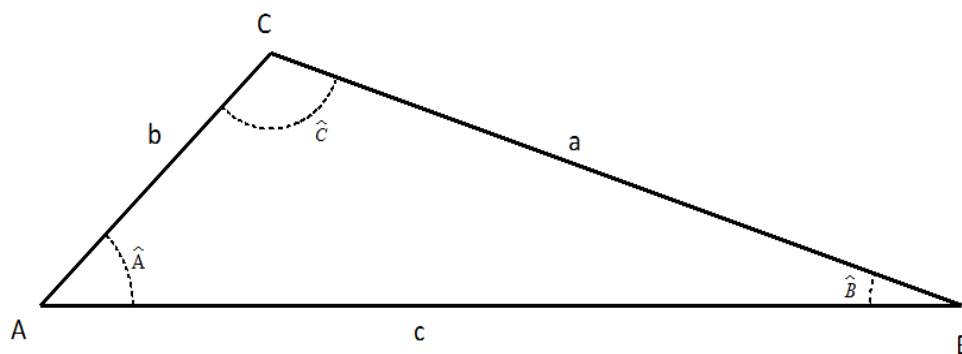
NOTA: Podíamos haber calculado la tangente por la definición, de una manera más rápida quizás

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \Rightarrow \operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\frac{3\sqrt{10}}{10}}{\frac{\sqrt{10}}{10}} \Rightarrow \boxed{\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 3}$$

#### 4. TEOREMA DE LOS SENOS Y DEL COSENO

Estos teoremas se usan para resolver triángulos que no sean rectángulos. Será necesario el uso de la calculadora.

Teorema de los senos: En un triángulo cualquiera como el de la figura, se cumple que:



$$\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B} = \frac{c}{\operatorname{sen} C}$$

O bien

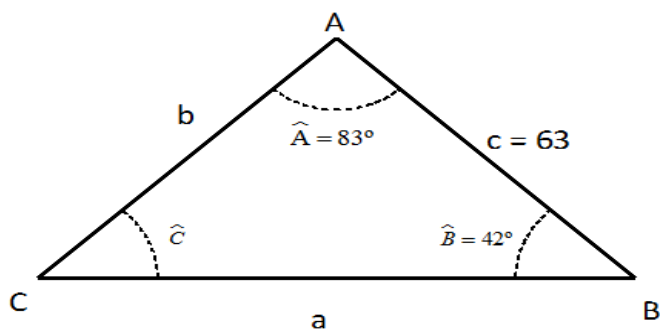
$$\frac{\operatorname{sen} A}{a} = \frac{\operatorname{sen} B}{b} = \frac{\operatorname{sen} C}{c}$$

Se aplica cuando conocemos:

- Dos ángulos y un lado
- Dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos

A veces puede haber dos soluciones, pues entre  $0^\circ$  y  $180^\circ$  hay dos ángulos con el mismo seno, uno agudo y otro obtuso.

Ejemplo: En un triángulo  $\triangle ABC$  conocemos la longitud del lado  $c = 63$  m y los ángulos  $A = 83^\circ$  y  $B = 42^\circ$ . Resuélvelo.



Hemos dibujado el triángulo, y ahora pasamos a resolverlo.

$$A + B + C = 180^\circ \Rightarrow 83^\circ + 42^\circ + C = 180^\circ \Rightarrow C = 55^\circ$$

Aplicamos ahora el teorema de los senos:

$$\frac{a}{\sin 83^\circ} = \frac{b}{\sin 42^\circ} = \frac{63}{\sin 55^\circ} \Rightarrow \begin{cases} \frac{a}{\sin 83^\circ} = \frac{63}{\sin 55^\circ} \\ \frac{b}{\sin 42^\circ} = \frac{63}{\sin 55^\circ} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{63 \sin 83^\circ}{\sin 55^\circ} \\ b = \frac{63 \sin 42^\circ}{\sin 55^\circ} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 76,34 \text{ m} \\ b = 51,46 \text{ m} \end{cases}$$

Ejemplo: Resolver el triángulo donde conocemos  $a = 4$  m,  $b = 5$  m y  $B = 30^\circ$

Por el teorema de los senos,  $\frac{\sin A}{4} = \frac{\sin 30^\circ}{5} = \frac{\sin C}{c}$ , obtenemos de la primera igualdad que:

$$\frac{\sin A}{4} = \frac{\sin 30^\circ}{5} \Rightarrow \sin A = \frac{4 \cdot \sin 30^\circ}{5} \Rightarrow \sin A = 0,4 \Rightarrow \begin{cases} A_1 = 23^\circ 34' 41,44'' \\ A_2 = 156^\circ 25' 18,56'' \end{cases} \quad \text{De estas dos posibles}$$

soluciones, la solución  $A_2 = 156^\circ 25' 18,56''$  no es válida pues en ese caso

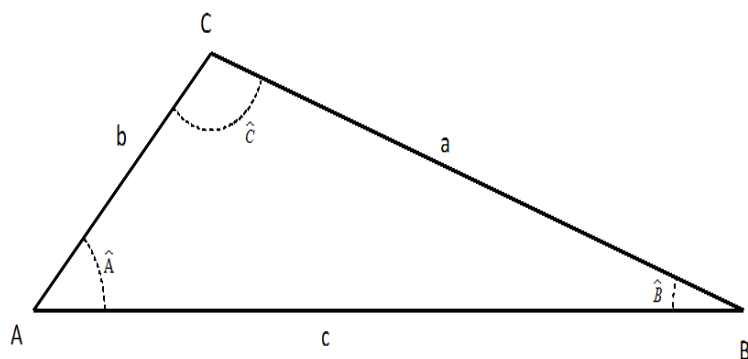
$A_2 + B + C = 156^\circ 25' 18,56'' + 30^\circ + C = 180^\circ$ , daría un ángulo  $C$  negativo y eso no es posible.

Por tanto  $A = 23^\circ 34' 41,44''$ , de ahí obtenemos  $C$ :  $23^\circ 34' 41,44'' + 30^\circ + C = 180^\circ \Rightarrow C = 126^\circ 25' 18,56''$

Por último calculamos el lado que nos falta:  $\frac{\sin 30^\circ}{5} = \frac{\sin 126^\circ 25' 18,56''}{c} \Rightarrow c = \frac{5 \cdot \sin 126^\circ 25' 18,56''}{\sin 30^\circ} \Rightarrow$

$$c = 8,05 \text{ m}$$

Teorema del coseno: En un triángulo cualquiera como el de la figura, se cumple que:



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos A$$

O bien

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos B$$

O bien

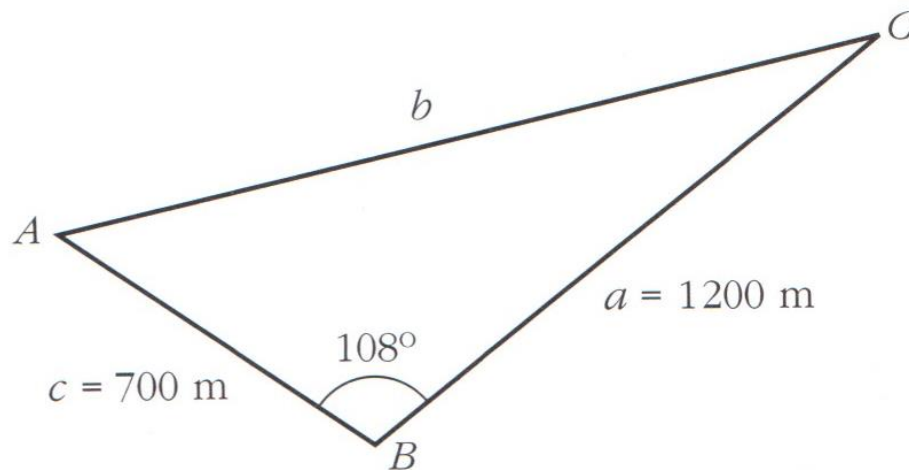
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos C$$

Se aplica cuando conocemos:

- Los tres lados
- Dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos
- Dos lados y el ángulo que forman

Se usan conjuntamente los dos teoremas para resolver triángulos.

Ejemplo: Resuelve el triángulo de la figura:



Aplicamos el teorema del coseno para calcular el lado

$$b \Rightarrow b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos B \Rightarrow b^2 = 1200^2 + 700^2 - 2 \cdot 1200 \cdot 700 \cdot \cos 108^\circ \Rightarrow$$

$$b = \sqrt{1200^2 + 700^2 - 2 \cdot 1200 \cdot 700 \cdot \cos 108^\circ} \Rightarrow \boxed{b = 1564,98 \text{ m}}$$

Aplicamos ahora el teorema del seno para calcular el ángulo A

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} \Rightarrow \frac{\sin A}{1200} = \frac{\sin 108^\circ}{1564,98} \Rightarrow \sin A = \frac{1200 \cdot \sin 108^\circ}{1564,98} \Rightarrow \sin A = 0,729 \Rightarrow A = \begin{cases} 46^\circ 49' 26'' \\ 133^\circ 10' 34'' \end{cases} \text{ Sólo}$$

es válida la solución del ángulo agudo, pues con la otra sumarían más de  $180^\circ$ . Por tanto,  $\boxed{A = 46^\circ 49' 26''}$

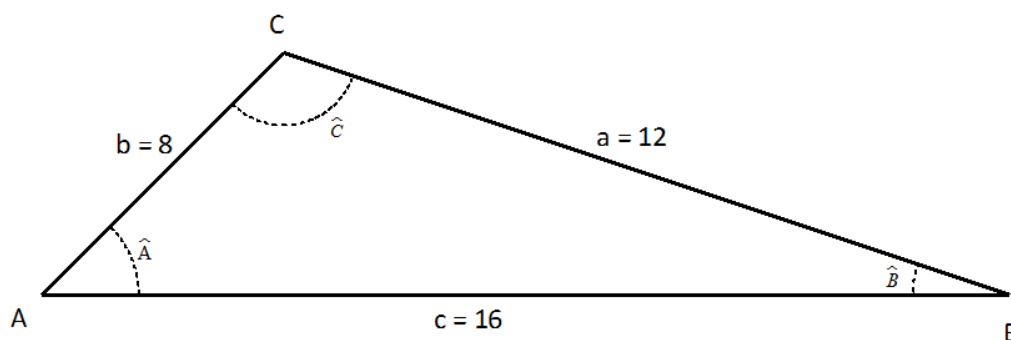
Nos falta calcular  $C = 180^\circ - 108^\circ - 46^\circ 49' 26'' \Rightarrow \boxed{C = 25^\circ 10' 34''}$

NOTA: El cálculo del ángulo A se podía haber realizado con el teorema del coseno, así:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos A \Rightarrow 1200^2 = 1564,98^2 + 700^2 - 2 \cdot 1564,98 \cdot 700 \cdot \cos A \Rightarrow$$

$$\cos A = \frac{1564,98^2 + 700^2 - 1200^2}{2 \cdot 1564,98 \cdot 700} \Rightarrow \cos A = 0,6842 \Rightarrow A = 46^\circ 49' 25,37''. \text{ No sale exactamente lo mismo por el efecto de los redondeos}$$

Ejemplo: Resuelve el siguiente triángulo:



Vamos a aplicar el teorema del coseno para calcular el ángulo B

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos B \Rightarrow 8^2 = 12^2 + 16^2 - 2 \cdot 12 \cdot 16 \cdot \cos B \Rightarrow 64 = 144 + 256 - 384 \cdot \cos B \Rightarrow$$

$$64 = 400 - 384 \cdot \cos B \Rightarrow 384 \cdot \cos B = 400 - 64 \Rightarrow \cos B = \frac{336}{384} \Rightarrow \boxed{B = 28^\circ 57' 18,09''}$$

Lo mismo para el ángulo A, aunque también lo podríamos hacer por el teorema del seno, pero tendríamos que tener en cuenta que entonces nos salen dos soluciones y una sería desechable.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos A \Rightarrow 12^2 = 8^2 + 16^2 - 2 \cdot 8 \cdot 16 \cdot \cos A \Rightarrow \cos A = \frac{8^2 + 16^2 - 12^2}{2 \cdot 8 \cdot 16} \Rightarrow \boxed{A = 46^\circ 34' 2.87''}$$

Y por último el ángulo  $C$ , aplicando que la suma de los tres ángulos ha de ser  $180^\circ$

$$C = 180^\circ - A - B \Rightarrow C = 180^\circ - 46^\circ 34' 2.87'' - 28^\circ 57' 18.09'' \Rightarrow \boxed{C = 104^\circ 28' 39.04''}$$

## 5. ECUACIONES TRIGONOMÉTRICAS

Se trata de ecuaciones donde aparecen las razones trigonométricas actuando sobre un ángulo que hay que calcular. El resultado se dará en grados o radianes según el enunciado del problema.

Para resolverlas no hay un método concreto, se trata, pues, de ir aprendiendo con la práctica y los conocimientos adquiridos. Veamos mediante ejemplos como se realiza la resolución

Ejemplo: Resuelve la ecuación trigonométrica:

$$\operatorname{sen} x - \frac{\sqrt{3}}{2} = 0$$

Solución: Preparamos la ecuación,  $\operatorname{sen} x = \frac{\sqrt{3}}{2}$  Dado que el enunciado no especifica nada daremos las soluciones

en grados sexagesimales. Una solución como ya sabemos es  $x = 60^\circ$ , pero tiene más soluciones. Los ángulos suplementarios tienen el seno igual, por tanto otra solución es  $x = 120^\circ$

Podríamos terminar diciendo que las soluciones son dos  $\begin{cases} x_1 = 60^\circ \\ x_2 = 120^\circ \end{cases}$ , pero no sería del todo correcto, pues hay más

soluciones. Los ángulos que difieren un nº entero de vueltas ( $k \cdot 360^\circ$ ) tienen las mismas razones trigonométricas, es decir, los ángulos de

$$420^\circ = 60^\circ + 1 \cdot 360^\circ, 780^\circ = 60^\circ + 2 \cdot 360^\circ, 480^\circ = 120^\circ + 1 \cdot 360^\circ, 840^\circ = 120^\circ + 2 \cdot 360^\circ, -300^\circ = 60^\circ + (-1) \cdot 360^\circ, \dots$$

también tienen por seno  $\frac{\sqrt{3}}{2}$

Por tanto, tiene infinitas soluciones, y la forma de expresarlo matemáticamente es:

$$\begin{cases} x_1 = 60^\circ + k \cdot 360^\circ \\ x_2 = 120^\circ + k \cdot 360^\circ \end{cases} \text{ con } k \in \mathbb{Z}, \text{ donde } k \text{ es el nº de vueltas que da el ángulo}$$

Este mismo ejemplo pero dando su solución en radianes sería:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{\pi}{3} + k \cdot 2 \cdot \pi \\ x_2 = \frac{2\pi}{3} + k \cdot 2 \cdot \pi \end{cases} \text{ con } k \in \mathbb{Z}, \text{ que se suele poner de la siguiente forma: } \begin{cases} x_1 = \frac{\pi}{3} + 2 \cdot k \cdot \pi \\ x_2 = \frac{2\pi}{3} + 2 \cdot k \cdot \pi \end{cases} \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

Ejemplo: Resuelve  $\cos \left( x + \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Solución: Los ángulos cuyo coseno es  $\frac{\sqrt{2}}{2}$  y son menores que  $2 \cdot \pi$  son:  $\begin{cases} \frac{\pi}{4} \\ \frac{7 \cdot \pi}{4} \end{cases}$  (suma  $2 \cdot \pi$  con  $\frac{\pi}{4}$ ) y le hemos de

añadir las vueltas, luego:

$$\begin{cases} x_1 + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + 2 \cdot k \cdot \pi \\ x_2 + \frac{\pi}{4} = \frac{7 \cdot \pi}{4} + 2 \cdot k \cdot \pi \end{cases} \text{ con } k \in \mathbb{Z} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} + 2 \cdot k \cdot \pi \\ x_2 = -\frac{\pi}{4} + \frac{7 \cdot \pi}{4} + 2 \cdot k \cdot \pi \end{cases} \text{ con } k \in \mathbb{Z} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 + 2 \cdot k \cdot \pi \\ x_2 = \frac{6 \cdot \pi}{4} + 2 \cdot k \cdot \pi \end{cases} \text{ con } k \in \mathbb{Z} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x_1 = 2 \cdot k \cdot \pi \\ x_2 = \frac{3 \cdot \pi}{2} + 2 \cdot k \cdot \pi \end{cases} \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

Ejemplo: Resuelve

$$\cos 2x = \cos x + 1$$

Solución: Lo primero que hacemos es convertir la ecuación trigonométrica en una ecuación donde sólo aparezcan el seno o el coseno de  $x$

$$\begin{aligned} \cos 2x &= \cos x - 1 \Rightarrow \cos^2 x - \sin^2 x = \cos x - 1 \Rightarrow \\ \cos^2 x - (1 - \cos^2 x) &= \cos x - 1 \Rightarrow \cos^2 x - 1 + \cos^2 x = \cos x - 1 \Rightarrow 2 \cdot \cos^2 x - 1 = \cos x - 1 \Rightarrow \\ 2 \cdot \cos^2 x &= \cos x \Rightarrow 2 \cdot \cos^2 x - \cos x = 0 \Rightarrow \cos x (2 \cdot \cos x - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ 2 \cdot \cos x - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ \cos x = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{cases} x_1 = 90^\circ + k \cdot 360^\circ \\ x_2 = 270^\circ + k \cdot 360^\circ \\ x_3 = 60^\circ + k \cdot 360^\circ \\ x_4 = 300^\circ + k \cdot 360^\circ \end{cases} \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

Ejemplo: Resuelve el sistema:

$$\begin{cases} \sin x + \sin y = \frac{3}{2} \\ 2 \cdot \sin x - \sin y = \frac{3}{2} \end{cases}$$

Solución: Resolvemos el sistema por Gauss

$$\begin{aligned} \begin{cases} \sin x + \sin y = \frac{3}{2} \\ 2 \cdot \sin x - \sin y = \frac{3}{2} \end{cases} &\Rightarrow (\text{hacemos } E_2 + E_1) \begin{cases} \sin x + \sin y = \frac{3}{2} \\ 3 \cdot \sin x = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sin x + \sin y = \frac{3}{2} \\ \sin x = 1 \end{cases} \Rightarrow \\ \begin{cases} 1 + \sin y = \frac{3}{2} \\ \sin x = 1 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} \sin y = \frac{1}{2} \\ \sin x = 1 \end{cases} \text{ Resolvemos ya cada ecuación:} \end{aligned}$$

$$\sin x = 1 \Rightarrow x_1 = 90^\circ + k \cdot 360^\circ \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

$$\sin y = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = 30^\circ + k \cdot 360^\circ \\ y_2 = 150^\circ + k \cdot 360^\circ \end{cases} \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

Ejemplo: Resuelve la ecuación:  $\cos x + \sec x = \frac{-5}{2}$  con  $180^\circ < x < 270^\circ$

Solución: Operamos

$$\begin{aligned}\cos x + \frac{1}{\cos x} &= \frac{-5}{2} \Rightarrow \frac{2 \cdot \cos^2 x + 2}{2 \cdot \cos x} = \frac{-5 \cdot \cos x}{2 \cdot \cos x} \Rightarrow 2 \cdot \cos^2 x + 2 = -5 \cdot \cos x \Rightarrow 2 \cdot \cos^2 x + 5 \cdot \cos x + 2 = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \cos x &= \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 16}}{4} \Rightarrow \begin{cases} \cos x = \frac{-5 + 3}{4} \\ \cos x = \frac{-5 - 3}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos x = \frac{-1}{2} \\ \cos x = -2 \end{cases} \end{aligned}$$

$\cos x = -2$  (no existe solución de aquí pues  $-1 \leq \cos x \leq 1$ )

Sólo nos queda:

$$\cos x = \frac{-1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 120^\circ + k \cdot 360^\circ \\ x_2 = 240^\circ + k \cdot 360^\circ \end{cases}$$

De todas estas posibles soluciones, solo hay una que cumple la condición

$180^\circ < x < 270^\circ$  dada por el problema. Luego, la solución es  $x = 240^\circ$