

4

RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS

Página 103

REFLEXIONA Y RESUELVE

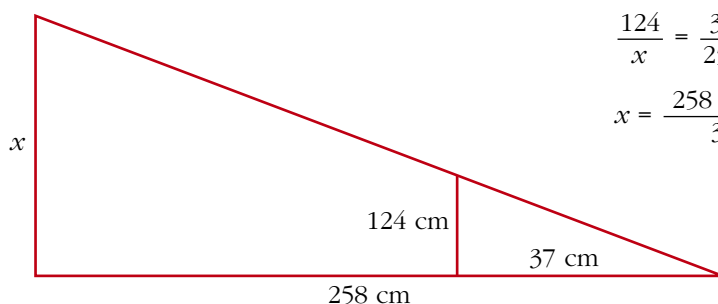
Problema 1

Para calcular la altura de un árbol, podemos seguir el procedimiento que utilizó Tales de Mileto para hallar la altura de una pirámide de Egipto: comparar su sombra con la de una vara vertical cuya longitud es conocida.

■ Hazlo tú siguiendo este método y sabiendo que:

- la vara mide 124 cm,
- la sombra de la vara mide 37 cm,
- la sombra del árbol mide 258 cm.

Para solucionar este problema habrás utilizado la semejanza de dos triángulos.



$$\frac{124}{x} = \frac{37}{258}$$

$$x = \frac{258 \cdot 124}{37} = 864,65 \text{ cm}$$

La altura del árbol es de 864,65 cm.

Problema 2

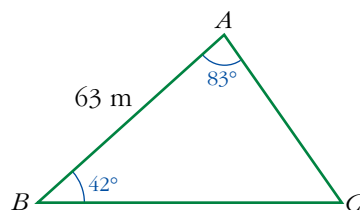
Bernardo conoce la distancia $\overline{AB}$ a la que está del árbol y los ángulos $\widehat{CBA}$ y $\widehat{BAC}$; y quiere calcular la distancia $\overline{BC}$ a la que está de Carmen.

Datos: $\overline{AB} = 63 \text{ m}$; $\widehat{CBA} = 42^\circ$; $\widehat{BAC} = 83^\circ$

■ Para resolver el problema, primero realiza un dibujo a escala 1:1 000 (1 m $\rightarrow$ 1 mm). Después, mide la longitud del segmento $\overline{BC}$ y, deshaciendo la escala, obtendrás la distancia a la que Bernardo está de Carmen.

$$\overline{BC} = 42 \text{ mm}$$

Deshaciendo la escala: $\overline{BC} = 42 \text{ m}$



Problema 3

- Análogamente puedes resolver este otro:

Bernardo ve desde su casa el castillo y la abadía. Conoce las distancias a ambos lugares, pues ha hecho el camino a pie muchas veces; y quiere averiguar la distancia del castillo a la abadía. Para ello debe, previamente, medir el ángulo $\widehat{CBA}$.

Datos: $\overline{BC} = 1\,200$ m; $\overline{BA} = 700$ m; $\widehat{CBA} = 108^\circ$.

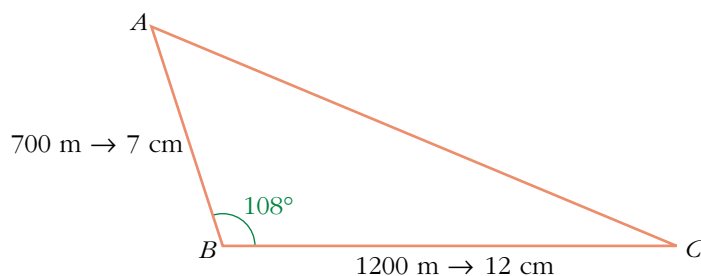
- Utiliza ahora la escala 1:10 000 (100 m $\rightarrow$ 1 cm).

100 m $\rightarrow$ 1 cm

1 200 m $\rightarrow$ 12 cm

700 m $\rightarrow$ 7 cm

$\overline{CA} = 14,7$ cm $\Rightarrow$ $\overline{CA} = 1\,470$ m

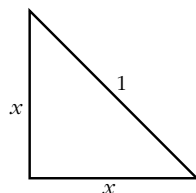


NOTA: El triángulo está construido al 50% de su tamaño.

Problema 4

- Calcula, aplicando el teorema de Pitágoras:

a) Los lados iguales de un triángulo rectángulo isósceles cuya hipotenusa mide 1.

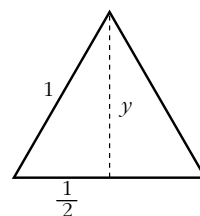


b) La altura de un triángulo equilátero de lado 1.

Haz todos los cálculos manteniendo los radicales.

Debes llegar a las siguientes soluciones:

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad y = \frac{\sqrt{3}}{2}$$



$$\text{a) } 1^2 = x^2 + x^2 \rightarrow 1 = 2x^2 \rightarrow x^2 = \frac{1}{2} \rightarrow x = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{b) } 1^2 = y^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \rightarrow y^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \rightarrow y = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Página 104

- 1. Calcula $\operatorname{tg} \alpha$ sabiendo que $\operatorname{sen} \alpha = 0,39$. Hazlo, también, con calculadora.**

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - (\operatorname{sen} \alpha)^2} = \sqrt{1 - 0,39^2} = 0,92$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} = 0,42$$

Con calculadora: $\boxed{\text{SHIFT}} \boxed{\sin} 0,39 \boxed{=}$ $\boxed{\tan} \boxed{=}$ $\boxed{0.42353791018}$

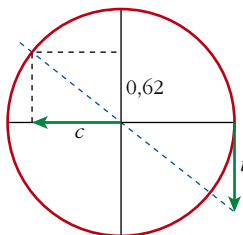
- 2. Calcula $\cos \alpha$ sabiendo que $\operatorname{tg} \alpha = 1,28$. Hazlo, también, con calculadora.**

$$\left. \begin{array}{l} s^2 + c^2 = 1 \\ s/c = 1,28 \end{array} \right\} \text{Resolviendo el sistema se obtiene } s = 0,79 \text{ y } c = 0,62.$$

Con calculadora: $\boxed{\cos} \boxed{\tan} 1,28 \boxed{=}$ $\boxed{\cos} \boxed{=}$ $\boxed{0.615564404197}$

Página 105

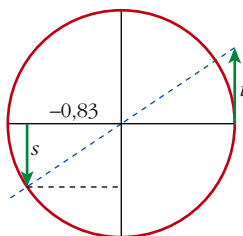
- 1. Sabiendo que el ángulo α está en el segundo cuadrante ($90^\circ < \alpha < 180^\circ$) y $\operatorname{sen} \alpha = 0,62$, calcula $\cos \alpha$ y $\operatorname{tg} \alpha$.**



$$\cos \alpha = -\sqrt{1 - 0,62^2} = -0,78$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{0,62}{-0,78} = -0,79$$

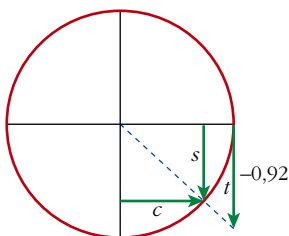
- 2. Sabiendo que el ángulo α está en el tercer cuadrante ($180^\circ < \alpha < 270^\circ$) y $\cos \alpha = -0,83$, calcula $\operatorname{sen} \alpha$ y $\operatorname{tg} \alpha$.**



$$\operatorname{sen} \alpha = -\sqrt{1 - (0,83)^2} = -0,56$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{-0,56}{-0,83} = 0,67$$

3. Sabiendo que el ángulo α está en el cuarto cuadrante ($270^\circ < \alpha < 360^\circ$) y $\operatorname{tg} \alpha = -0,92$, calcula $\operatorname{sen} \alpha$ y $\cos \alpha$.



$$\left. \begin{array}{l} s/c = -0,92 \\ s^2 + c^2 = 1 \end{array} \right\} \text{ El sistema tiene dos soluciones:}$$

$$s = -0,68; \quad c = 0,74$$

$$s = 0,68; \quad c = -0,74$$

Teniendo en cuenta dónde está el ángulo, la solución es la primera: $\operatorname{sen} \alpha = -0,68$, $\cos \alpha = 0,74$

4. Completa en tu cuaderno la siguiente tabla y amplíala para los ángulos 210° , 225° , 240° , 270° , 300° , 315° , 330° y 360° .

	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
sen	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1				
cos	1	$\sqrt{3}/2$			0				
tg	0	$\sqrt{3}/3$			-				

Ayúdate de la representación de los ángulos en una circunferencia goniométrica.

	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
sen	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0
cos	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0	$-1/2$	$-\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{3}/2$	-1
tg	0	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$	-	$-\sqrt{3}$	-1	$-\sqrt{3}/3$	0

	210°	225°	240°	270°	300°	315°	330°	360°
sen	$-1/2$	$-\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{3}/2$	-1	$-\sqrt{3}/2$	$-\sqrt{2}/2$	$-1/2$	0
cos	$-\sqrt{3}/2$	$-\sqrt{2}/2$	$-1/2$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1
tg	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$	-	$-\sqrt{3}$	-1	$-\sqrt{3}/3$	0

Página 106

1. Halla las razones trigonométricas del ángulo 2397° :

a) Obteniendo la expresión del ángulo en el intervalo $[0^\circ, 360^\circ)$.

b) Obteniendo la expresión del ángulo en el intervalo $(-180^\circ, 180^\circ]$.

c) Directamente con la calculadora.

a) $2397^\circ = 6 \cdot 360^\circ + 237^\circ$

$$\operatorname{sen} 2397^\circ = \operatorname{sen} 237^\circ = -0,84$$

$$\cos 2397^\circ = \cos 237^\circ = -0,54$$

$$\operatorname{tg} 2397^\circ = \operatorname{tg} 237^\circ = 1,54$$

b) $2397^\circ = 7 \cdot 360^\circ - 123^\circ$

$$\operatorname{sen} 2397^\circ = \operatorname{sen} (-123^\circ) = -0,84$$

$$\cos 2397^\circ = \cos (-123^\circ) = -0,54$$

$$\operatorname{tg} 2397^\circ = \operatorname{tg} (-123^\circ) = 1,54$$

2. Pasa cada uno de los siguientes ángulos al intervalo $[0^\circ, 360^\circ)$ y al intervalo $(-180^\circ, 180^\circ]$:

- a) 396° b) 492° c) 645° d) 3895° e) 7612° f) 1980°

Se trata de expresar el ángulo de la siguiente forma:

$$k \text{ o } -k, \text{ donde } k \leq 180^\circ$$

a) $396^\circ = 396^\circ - 360^\circ = 36^\circ$

b) $492^\circ = 492^\circ - 360^\circ = 132^\circ$

c) $645^\circ = 645^\circ - 360^\circ = 285^\circ = 285^\circ - 360^\circ = -75^\circ$

d) $3895^\circ = 3895^\circ - 10 \cdot 360^\circ = 295^\circ = 295^\circ - 360^\circ = -65^\circ$

e) $7612^\circ = 7612^\circ - 21 \cdot 360^\circ = 52^\circ$

f) $1980^\circ = 1980^\circ - 5 \cdot 360^\circ = 180^\circ$

Cuando hacemos, por ejemplo, $7612^\circ = 7612^\circ - 21 \cdot 360^\circ$, ¿por qué tomamos 21? Porque, previamente, hemos realizado la división $7612 \div 360 \approx 21.44\dots$. Es el cociente entero.

Página 107

LENGUAJE MATEMÁTICO

1. Di el valor de las siguientes razones trigonométricas sin preguntarlo a la calculadora. Después, compruébalo con su ayuda:

a) $\text{sen}(37 \times 360^\circ - 30^\circ)$

b) $\cos(-5 \times 360^\circ + 120^\circ)$

c) $\text{tg}(11 \times 360^\circ - 135^\circ)$

d) $\cos(27 \times 180^\circ + 135^\circ)$

a) $\text{sen}(37 \cdot 360^\circ - 30^\circ) = \text{sen}(-30^\circ) = -\text{sen } 30^\circ = -\frac{1}{2}$

b) $\cos(-5 \cdot 360^\circ + 120^\circ) = \cos(120^\circ) = -\frac{1}{2}$

c) $\text{tg}(11 \cdot 360^\circ - 135^\circ) = \text{tg}(-135^\circ) = -\text{tg } 135^\circ = 1$

d) $\cos(27 \cdot 180^\circ + 135^\circ) = \cos(28 \cdot 180^\circ - 180^\circ + 135^\circ) =$
 $= \cos(14 \cdot 360^\circ - 45^\circ) = \cos(-45^\circ) = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$

2. Repite con la calculadora estos cálculos:

SHIFT tan 1 EXP 10 = 89.99999999

SHIFT tan 1 EXP 20 = 90

Explica los resultados. ¿Cómo es posible que diga que el ángulo cuya tangente vale 10^{20} es 90° si 90° no tiene tangente?

Es un ángulo que difiere de 90° una cantidad tan pequeña que, a pesar de las muchas cifras que la calculadora maneja, al redondearlo da 90° .

Página 109

- 1. Calcula las razones trigonométricas de 55° , 125° , 145° , 215° , 235° , 305° y 325° a partir de las razones trigonométricas de 35° :**

$$\text{sen } 35^\circ = 0,57; \text{ cos } 35^\circ = 0,82; \text{ tg } 35^\circ = 0,70$$

- $55^\circ = 90^\circ - 35^\circ \Rightarrow 55^\circ$ y 35° son complementarios.

$$\left. \begin{array}{l} \text{sen } 55^\circ = \text{cos } 35^\circ = 0,82 \\ \text{cos } 55^\circ = \text{sen } 35^\circ = 0,57 \end{array} \right\} \text{tg } 55^\circ = \frac{\text{sen } 55^\circ}{\text{cos } 55^\circ} = \frac{0,82}{0,57} = 1,43$$

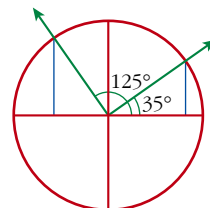
$$\left(\text{También } \text{tg } 55^\circ = \frac{1}{\text{tg } 35^\circ} = \frac{1}{0,70} \approx 1,43 \right)$$

- $125^\circ = 90^\circ + 35^\circ$

$$\text{sen } 125^\circ = \text{cos } 35^\circ = 0,82$$

$$\text{cos } 125^\circ = -\text{sen } 35^\circ = -0,57$$

$$\text{tg } 125^\circ = \frac{-1}{\text{tg } 35^\circ} = \frac{-1}{0,70} = -1,43$$

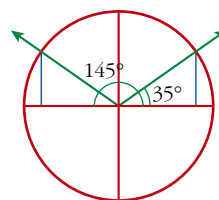


- $145^\circ = 180^\circ - 35^\circ \Rightarrow 145^\circ$ y 35° son suplementarios.

$$\text{sen } 145^\circ = \text{sen } 35^\circ = 0,57$$

$$\text{cos } 145^\circ = -\text{cos } 35^\circ = -0,82$$

$$\text{tg } 145^\circ = -\text{tg } 35^\circ = -0,70$$

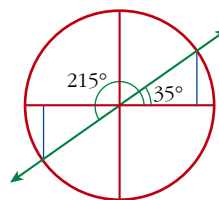


- $215^\circ = 180^\circ + 35^\circ$

$$\text{sen } 215^\circ = -\text{sen } 35^\circ = -0,57$$

$$\text{cos } 215^\circ = -\text{cos } 35^\circ = -0,82$$

$$\text{tg } 215^\circ = \text{tg } 35^\circ = 0,70$$

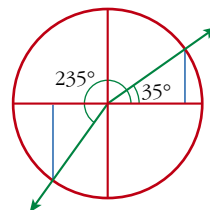


- $235^\circ = 270^\circ - 35^\circ$

$$\text{sen } 235^\circ = -\text{cos } 35^\circ = -0,82$$

$$\text{cos } 235^\circ = -\text{sen } 35^\circ = -0,57$$

$$\text{tg } 235^\circ = \frac{\text{sen } 235^\circ}{\text{cos } 235^\circ} = \frac{-\text{cos } 35^\circ}{-\text{sen } 35^\circ} = \frac{1}{\text{tg } 35^\circ} = \frac{1}{0,70} = 1,43$$

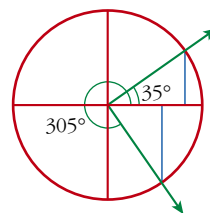


$$\bullet 305^\circ = 270^\circ + 35^\circ$$

$$\operatorname{sen} 305^\circ = -\cos 35^\circ = -0,82$$

$$\cos 305^\circ = \operatorname{sen} 35^\circ = 0,57$$

$$\operatorname{tg} 305^\circ = \frac{\operatorname{sen} 305^\circ}{\cos 305^\circ} = \frac{-\cos 35^\circ}{\operatorname{sen} 35^\circ} = -\frac{1}{\operatorname{tg} 35^\circ} = -1,43$$

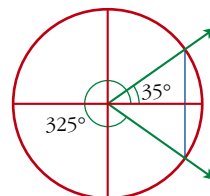


$$\bullet 325^\circ = 360^\circ - 35^\circ \quad (= -35^\circ)$$

$$\operatorname{sen} 325^\circ = -\operatorname{sen} 35^\circ = -0,57$$

$$\cos 325^\circ = \cos 35^\circ = 0,82$$

$$\operatorname{tg} 325^\circ = \frac{\operatorname{sen} 325^\circ}{\cos 325^\circ} = \frac{-\operatorname{sen} 35^\circ}{\cos 35^\circ} = -\operatorname{tg} 35^\circ = -0,70$$



2. Averigua las razones trigonométricas de 358° , 156° y 342° , utilizando la calculadora solo para hallar razones trigonométricas de ángulos comprendidos entre 0° y 90° .

$$\bullet 358^\circ = 360^\circ - 2^\circ$$

$$\operatorname{sen} 358^\circ = -\operatorname{sen} 2^\circ = -0,0349$$

$$\cos 358^\circ = \cos 2^\circ = 0,9994$$

$$\operatorname{tg} 358^\circ \stackrel{(*)}{=} -\operatorname{tg} 2^\circ = -0,03492$$

$$(*) \operatorname{tg} 358^\circ = \frac{\operatorname{sen} 358^\circ}{\cos 358^\circ} = \frac{-\operatorname{sen} 2^\circ}{\cos 2^\circ} = -\operatorname{tg} 2^\circ$$

$$\bullet 156^\circ = 180^\circ - 24^\circ$$

$$\operatorname{sen} 156^\circ = \operatorname{sen} 24^\circ = 0,4067$$

$$\cos 156^\circ = -\cos 24^\circ = -0,9135$$

$$\operatorname{tg} 156^\circ = -\operatorname{tg} 24^\circ = -0,4452$$

OTRA FORMA DE RESOLVERLO:

$$156^\circ = 90^\circ + 66^\circ$$

$$\operatorname{sen} 156^\circ = \cos 66^\circ = 0,4067$$

$$\cos 156^\circ = -\operatorname{sen} 66^\circ = -0,9135$$

$$\operatorname{tg} 156^\circ = \frac{-1}{\operatorname{tg} 66^\circ} = \frac{-1}{2,2460} = -0,4452$$

$$\bullet 342^\circ = 360^\circ - 18^\circ$$

$$\operatorname{sen} 342^\circ = -\operatorname{sen} 18^\circ = -0,3090$$

$$\cos 342^\circ = \cos 18^\circ = 0,9511$$

$$\operatorname{tg} 342^\circ = -\operatorname{tg} 18^\circ = -0,3249$$

3. Dibuja, sobre la circunferencia goniométrica, ángulos que cumplan las siguientes condiciones y estima, en cada caso, el valor de las restantes razones trigonométricas:

a) $\operatorname{sen} \alpha = -\frac{1}{2}$, $\operatorname{tg} \alpha > 0$

b) $\cos \alpha = \frac{3}{4}$, $\alpha > 90^\circ$

c) $\operatorname{tg} \beta = -1$, $\cos \beta < 0$

d) $\operatorname{tg} \alpha = 2$, $\cos \alpha < 0$

a) $\left. \begin{array}{l} \operatorname{sen} \alpha = -1/2 < 0 \\ \operatorname{tg} \alpha > 0 \end{array} \right\} \rightarrow \cos \alpha < 0 \rightarrow \alpha \in 3.^{\text{er}} \text{ cuadrante}$

$\left. \begin{array}{l} \operatorname{sen} \alpha = -1/2 \\ \cos \alpha \approx -0,86 \end{array} \right\} \operatorname{tg} \alpha \approx 0,58$

b) $\left. \begin{array}{l} \cos \alpha = 3/4 \\ \alpha > 90^\circ \end{array} \right\} \rightarrow \alpha \in 4.^{\circ} \text{ cuadrante}$

$\left. \begin{array}{l} \operatorname{sen} \alpha \approx -0,66 \\ \cos \alpha = 3/4 \end{array} \right\} \operatorname{tg} \alpha \approx -0,88$

c) $\left. \begin{array}{l} \operatorname{tg} \beta = -1 < 0 \\ \cos \beta < 0 \end{array} \right\} \rightarrow \operatorname{sen} \beta > 0 \rightarrow \beta \in 2.^{\circ} \text{ cuadrante}$

$\left. \begin{array}{l} \operatorname{sen} \beta \approx 0,7 \\ \cos \beta \approx -0,7 \end{array} \right\} \operatorname{tg} \beta = -1$

d) $\left. \begin{array}{l} \operatorname{tg} \alpha = 2 > 0 \\ \cos \alpha < 0 \end{array} \right\} \rightarrow \operatorname{sen} \alpha < 0 \rightarrow \alpha \in 3.^{\text{er}} \text{ cuadrante}$

$\left. \begin{array}{l} \operatorname{sen} \alpha \approx -0,9 \\ \cos \alpha \approx -0,45 \end{array} \right\} \operatorname{tg} \alpha = 2$

Página 111

1. Las siguientes propuestas están referidas a triángulos rectángulos que, en todos los casos, se designan por ABC , siendo C el ángulo recto.

a) Datos: $c = 32 \text{ cm}$, $\hat{B} = 57^\circ$. Calcula a .

b) Datos: $c = 32 \text{ cm}$, $\hat{B} = 57^\circ$. Calcula b .

c) Datos: $a = 250 \text{ m}$, $b = 308 \text{ m}$. Calcula c y $\hat{A}$.

d) Datos: $a = 35 \text{ cm}$, $\hat{A} = 32^\circ$. Calcula b .

e) Datos: $a = 35 \text{ cm}$, $\hat{A} = 32^\circ$. Calcula c .

a) $\cos \hat{B} = \frac{a}{c} \rightarrow a = c \cos \hat{B} = 17,43 \text{ cm}$

b) $\operatorname{sen} \hat{B} = \frac{b}{c} \rightarrow b = c \operatorname{sen} \hat{B} = 26,84 \text{ cm}$

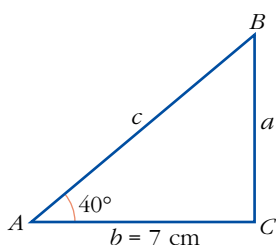
$$c) c = \sqrt{a^2 + b^2} = 396,69 \text{ m}$$

$$\operatorname{tg} \hat{A} = \frac{a}{b} = 0,81 \rightarrow \hat{A} = 39^\circ 3' 57''$$

$$d) \operatorname{tg} \hat{A} = \frac{a}{b} \rightarrow b = \frac{a}{\operatorname{tg} \hat{A}} = 56,01 \text{ cm}$$

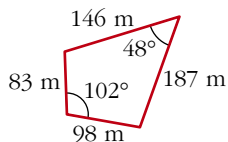
$$e) \operatorname{sen} \hat{A} = \frac{a}{c} \rightarrow c = \frac{a}{\operatorname{sen} \hat{A}} = 66,05 \text{ cm}$$

- 2. Para determinar la altura de un poste nos hemos alejado 7 m de su base y hemos medido el ángulo que forma la visual al punto más alto con la horizontal, obteniendo un valor de 40° . ¿Cuánto mide el poste?**



$$\operatorname{tg} 40^\circ = \frac{a}{7} \rightarrow a = 7 \operatorname{tg} 40^\circ = 5,87 \text{ m}$$

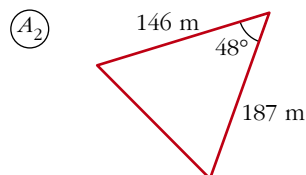
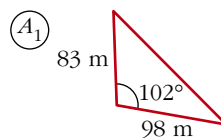
- 3. Halla el área de este cuadrilátero. Sugerencia: Pártelo en dos triángulos.**



$$A_1 = \frac{1}{2} 98 \cdot 83 \operatorname{sen} 102^\circ = 3978,13 \text{ m}^2$$

$$A_2 = \frac{1}{2} 187 \cdot 146 \operatorname{sen} 48^\circ = 10144,67 \text{ m}^2$$

El área es la suma de A_1 y A_2 : 14122,80 m^2



Página 113

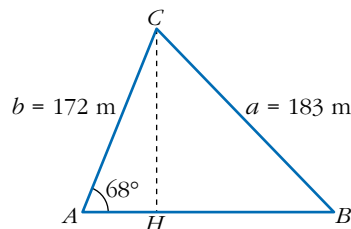
1. En un triángulo ABC conocemos $\hat{A} = 68^\circ$, $b = 172$ m y $a = 183$ m. Calcula la longitud del lado c .

$$\overline{AH} = 172 \cos 68^\circ = 64,43 \text{ m}$$

$$\overline{CH} = 172 \sen 68^\circ = 159,48 \text{ m}$$

$$\overline{HB} = \sqrt{a^2 - \overline{CH}^2} = 89,75 \text{ m}$$

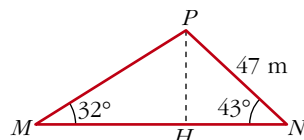
$$c = \overline{AH} + \overline{HB} = 64,43 \text{ m} + 89,75 \text{ m} = 154,18 \text{ m}$$



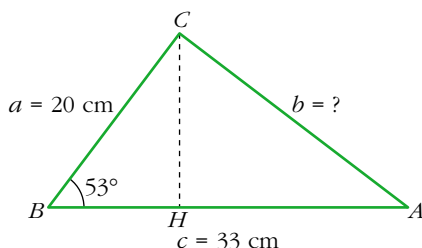
2. En un triángulo MNP conocemos $\hat{M} = 32^\circ$, $\hat{N} = 43^\circ$ y $\overline{NP} = 47$ m. Calcula $\overline{MP}$.

$$\sen 43^\circ = \frac{\overline{PH}}{47} \rightarrow \overline{PH} = 47 \sen 43^\circ = 32,05 \text{ m}$$

$$\sen 32^\circ = \frac{\overline{PH}}{\overline{MP}} \rightarrow \overline{MP} = \frac{\overline{PH}}{\sen 32^\circ} = \frac{32,05}{\sen 32^\circ} = 60,49 \text{ m}$$



3. En un triángulo ABC conocemos $a = 20$ cm, $c = 33$ cm y $\hat{B} = 53^\circ$. Calcula la longitud del lado b .



$$\overline{BH} = a \cos 53^\circ = 12,04 \text{ cm}$$

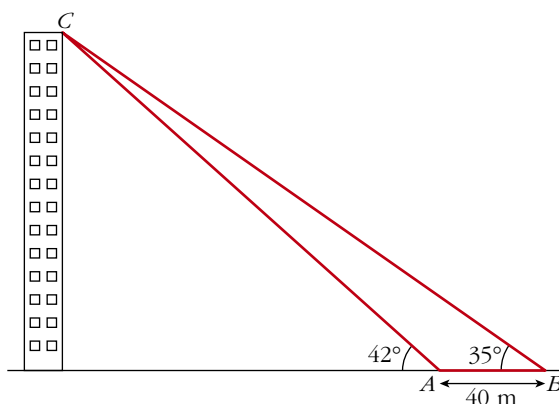
$$\overline{CH} = a \sen 53^\circ = 15,97 \text{ cm}$$

$$\overline{HA} = c - \overline{BH} = 20,96 \text{ cm}$$

$$b = \sqrt{\overline{CH}^2 + \overline{HA}^2} = 26,35 \text{ cm}$$

4. Estamos en A , medimos el ángulo bajo el que se ve el edificio (42°), nos alejamos 40 m y volvemos a medir el ángulo (35°). ¿Cuál es la altura del edificio y a qué distancia nos encontramos de él?

Observa la ilustración:



$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} 42^\circ &= \frac{h}{d} \rightarrow h = d \operatorname{tg} 42^\circ \\ \operatorname{tg} 35^\circ &= \frac{h}{d+40} \rightarrow h = (d+40) \operatorname{tg} 35^\circ \end{aligned} \right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow d \operatorname{tg} 42^\circ = (d+40) \operatorname{tg} 35^\circ \rightarrow d = \frac{40 \operatorname{tg} 35^\circ}{\operatorname{tg} 42^\circ - \operatorname{tg} 35^\circ} = 139,90 \text{ m}$$

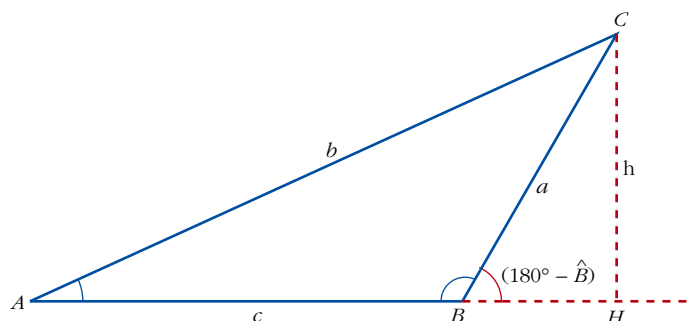
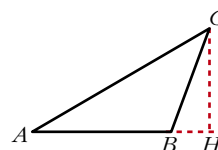
$$h = d \operatorname{tg} 42^\circ = 125,97 \text{ m}$$

La altura es 125,97 m. La primera distancia es 139,90 m, y ahora, después de alejarnos 40 m, estamos a 179,90 m.

Página 114

1. Repite la demostración anterior en el caso de que $\hat{B}$ sea obtuso. Ten en cuenta que:

$$\operatorname{sen}(180^\circ - \hat{B}) = \operatorname{sen} \hat{B}$$



$$\operatorname{sen} \hat{A} = \frac{h}{b} \rightarrow h = b \operatorname{sen} \hat{A}$$

$$\operatorname{sen} \hat{B} = \operatorname{sen}(180^\circ - \hat{B}) = \frac{h}{a} \rightarrow h = a \operatorname{sen} \hat{B}$$

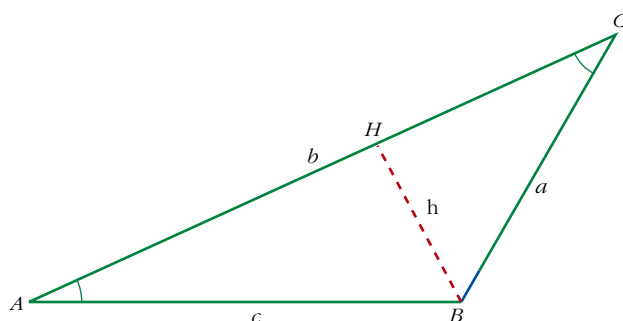
$$b \operatorname{sen} \hat{A} = a \operatorname{sen} \hat{B} \rightarrow \frac{a}{\operatorname{sen} \hat{A}} = \frac{b}{\operatorname{sen} \hat{B}}$$

2. Demuestra detalladamente, basándote en la demostración anterior, la siguiente relación:

$$\frac{a}{\operatorname{sen} \hat{A}} = \frac{c}{\operatorname{sen} \hat{C}}$$

Lo demostramos para $\hat{C}$ ángulo agudo. (Si fuese un ángulo obtuso razonaríamos como en el ejercicio anterior).

Trazamos la altura h desde el vértice B . Así, los triángulos obtenidos AHB y CHB son rectángulos.



Por tanto, tenemos: $\text{sen } \hat{A} = \frac{h}{c} \rightarrow h = c \text{ sen } \hat{A}$

$$\text{sen } \hat{C} = \frac{h}{a} \rightarrow h = a \text{ sen } \hat{C}$$

$$c \text{ sen } \hat{A} = a \text{ sen } \hat{C}$$

$$\frac{a}{\text{sen } \hat{A}} = \frac{c}{\text{sen } \hat{C}}$$

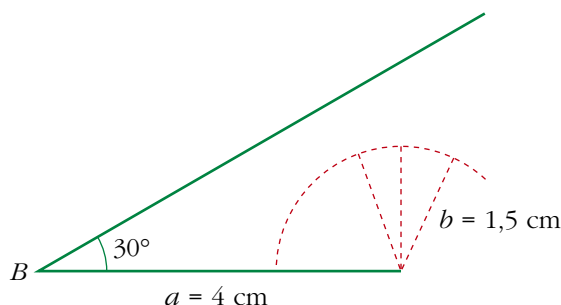
Página 115

- 3.** Resuelve el mismo problema anterior ($a = 4$ cm, $\hat{B} = 30^\circ$) tomando para b los siguientes valores: $b = 1,5$ cm, $b = 2$ cm, $b = 3$ cm, $b = 4$ cm.

Justifica gráficamente por qué se obtienen, según los casos, ninguna solución, una solución o dos soluciones.

- $b = 1,5$ cm

$$\frac{a}{\text{sen } \hat{A}} = \frac{b}{\text{sen } \hat{B}} \rightarrow \frac{4}{\text{sen } \hat{A}} = \frac{1,5}{\text{sen } 30^\circ} \rightarrow \text{sen } \hat{A} = \frac{4 \cdot 0,5}{1,5} = 1,3$$

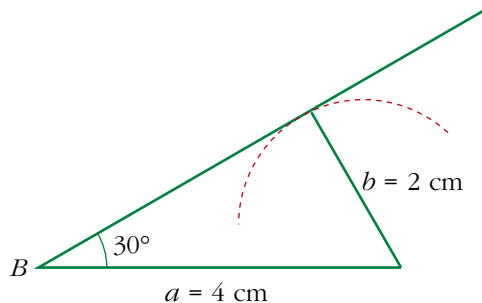


¡Imposible, pues $\text{sen } \hat{A} \in [-1, 1]$ siempre!

No tiene solución. Con esta medida, $b = 1,5$ cm, el lado b nunca podría tocar al lado c .

- $b = 2 \text{ cm}$

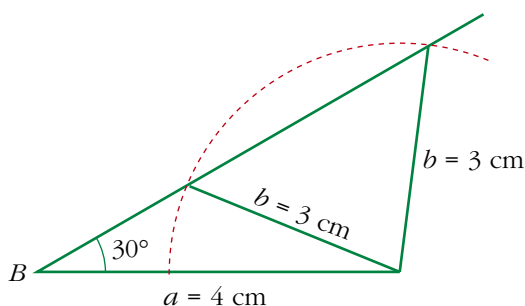
$$\frac{a}{\operatorname{sen} \hat{A}} = \frac{b}{\operatorname{sen} \hat{B}} \rightarrow \frac{4}{\operatorname{sen} \hat{A}} = \frac{2}{\operatorname{sen} 30^\circ} \rightarrow \operatorname{sen} \hat{A} = \frac{4 \cdot 0,5}{2} = 1 \rightarrow \hat{A} = 90^\circ$$



Se obtiene una única solución.

- $b = 3 \text{ cm}$

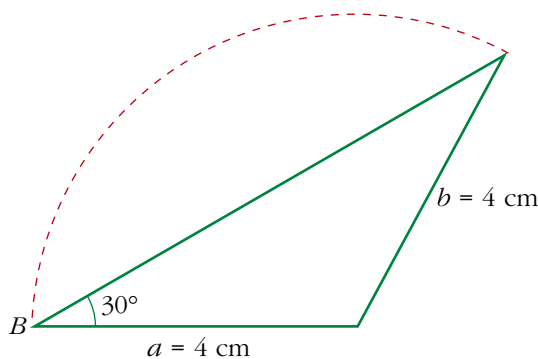
$$\frac{4}{\operatorname{sen} \hat{A}} = \frac{3}{\operatorname{sen} 30^\circ} \rightarrow \operatorname{sen} \hat{A} = \frac{4 \cdot 0,5}{3} = 0,6 \rightarrow \begin{cases} \hat{A}_1 = 41^\circ 48' 37,1'' \\ \hat{A}_2 = 138^\circ 11' 22,9'' \end{cases}$$



Las dos soluciones son válidas, pues en ningún caso ocurre que $\hat{A} + \hat{B} > 180^\circ$.

- $b = 4 \text{ cm}$

$$\frac{4}{\operatorname{sen} \hat{A}} = \frac{4}{\operatorname{sen} 30^\circ} \rightarrow \operatorname{sen} \hat{A} = \frac{4 \cdot 0,5}{4} = 0,5 \rightarrow \begin{cases} \hat{A}_1 = 30^\circ \\ \hat{A}_2 = 150^\circ \end{cases} \rightarrow \text{Una solución válida.}$$



La solución $\hat{A}_2 = 150^\circ$ no es válida, pues, en tal caso, sería $\hat{A} + \hat{B} = 180^\circ$. ¡Imposible!

Página 117

4. Resuelve los siguientes triángulos:

a) $a = 12$ cm; $b = 16$ cm; $c = 10$ cm

c) $a = 8$ m; $b = 6$ m; $c = 5$ m

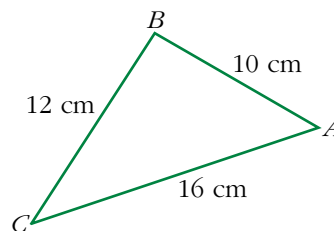
e) $a = 4$ m; $\hat{B} = 45^\circ$ y $\hat{C} = 60^\circ$

b) $b = 22$ cm; $a = 7$ cm; $\hat{C} = 40^\circ$

d) $b = 4$ cm; $c = 3$ cm; $\hat{A} = 105^\circ$

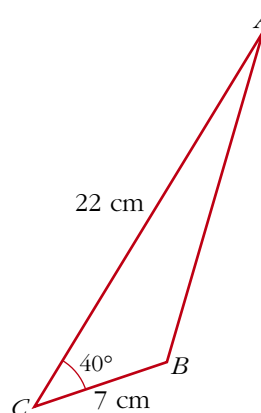
f) $b = 5$ m; $\hat{A} = \hat{C} = 35^\circ$

$$\begin{aligned} \text{a) } \bullet a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A} \\ 12^2 &= 16^2 + 10^2 - 2 \cdot 16 \cdot 10 \cos \hat{A} \\ 144 &= 256 + 100 - 320 \cos \hat{A} \\ \cos \hat{A} &= \frac{256 + 100 - 144}{320} = 0,6625 \\ \hat{A} &= 48^\circ 30' 33'' \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \bullet b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac \cos \hat{B} \\ 256 &= 144 + 100 - 2 \cdot 12 \cdot 10 \cos \hat{B} \\ \cos \hat{B} &= \frac{144 + 100 - 256}{240} = -0,05 \\ \hat{B} &= 92^\circ 51' 57,5'' \\ \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} &= 180^\circ \rightarrow \hat{C} = 180^\circ - \hat{A} - \hat{B} \\ \hat{C} &= 38^\circ 37' 29,5'' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \bullet c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cos \hat{C} \\ c^2 &= 7^2 + 22^2 - 2 \cdot 7 \cdot 22 \cos 40^\circ = \\ &= 49 + 484 - 235,94 = 297,06 \\ c &= 17,24 \text{ cm} \\ \bullet \frac{a}{\sin \hat{A}} &= \frac{c}{\sin \hat{C}} \rightarrow \frac{7}{\sin \hat{A}} = \frac{17,24}{\sin 40^\circ} \\ \sin \hat{A} &= \frac{7 \sin 40^\circ}{17,24} = 0,26 \\ \hat{A} &= \begin{cases} \hat{A}_1 = 15^\circ 7' 44,3'' \\ \hat{A}_2 = 164^\circ 52' 15,7'' \end{cases} \rightarrow \text{No válida} \end{aligned}$$



(La solución $\hat{A}_2$ no es válida, pues $\hat{A}_2 + \hat{C} > 180^\circ$).

$$\bullet \hat{B} = 180^\circ - (\hat{A} + \hat{C}) = 124^\circ 52' 15,7''$$

$$c) \bullet a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A}$$

$$64 = 36 + 25 - 2 \cdot 6 \cdot 5 \cos \hat{A}$$

$$\cos \hat{A} = \frac{36 + 25 - 64}{60} = -0,05$$

$$\hat{A} = 92^\circ 51' 57,5''$$

$$\bullet b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \hat{B}$$

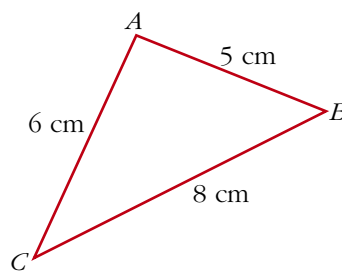
$$36 = 64 + 25 - 2 \cdot 8 \cdot 5 \cos \hat{B}$$

$$\cos \hat{B} = \frac{64 + 25 - 36}{80} = 0,6625$$

$$\hat{B} = 48^\circ 30' 33''$$

$$\bullet \hat{C} = 180^\circ - (\hat{A} + \hat{B}) = 38^\circ 37' 29,5''$$

(NOTA: Compárese con el apartado a). Son triángulos semejantes).



$$d) \bullet a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A} =$$

$$= 16 + 9 - 2 \cdot 4 \cdot 3 \cos 105^\circ = 31,21$$

$$a = 5,59 \text{ m}$$

$$\bullet \frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}}$$

$$\frac{5,59}{\sin 105^\circ} = \frac{4}{\sin \hat{B}}$$

$$\sin \hat{B} = \frac{4 \cdot \sin 105^\circ}{5,59} = 0,6912$$

$$\hat{B} = \begin{cases} \hat{B}_1 = 43^\circ 43' 25,3'' \\ \hat{B}_2 = 136^\circ 16' 34,7'' \end{cases} \rightarrow \text{No válida}$$

(La solución $\hat{B}_2$ no es válida, pues $\hat{A}_2 + \hat{B}_2 > 180^\circ$).

$$\bullet \hat{C} = 180^\circ - (\hat{A} + \hat{B}) = 31^\circ 16' 34,7''$$

$$e) \bullet \hat{A} = 180^\circ - (\hat{B} + \hat{C}) = 75^\circ$$

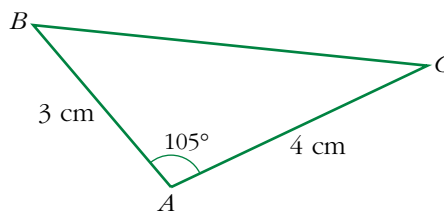
$$\bullet \frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}}$$

$$\frac{4}{\sin 75^\circ} = \frac{b}{\sin 45^\circ}$$

$$b = \frac{4 \cdot \sin 45^\circ}{\sin 75^\circ} = 2,93 \text{ m}$$

$$\bullet \frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{c}{\sin \hat{C}} \rightarrow \frac{4}{\sin 75^\circ} = \frac{c}{\sin 60^\circ}$$

$$c = \frac{4 \cdot \sin 60^\circ}{\sin 75^\circ} = 3,59 \text{ m}$$



$$f) \bullet \hat{B} = 180^\circ - (\hat{A} + \hat{C}) = 110^\circ$$

$$\bullet \frac{b}{\operatorname{sen} \hat{B}} = \frac{a}{\operatorname{sen} \hat{A}} \rightarrow \frac{5}{\operatorname{sen} 110^\circ} = \frac{a}{\operatorname{sen} 35^\circ}$$

$$a = \frac{5 \cdot \operatorname{sen} 35^\circ}{\operatorname{sen} 110^\circ} = 3,05 \text{ m}$$

$$\bullet \text{ Como } \hat{A} = \hat{C} \rightarrow a = c \rightarrow c = 3,05 \text{ m}$$

5. Las bases de un trapecio miden 17 cm y 10 cm, y uno de sus lados, 7 cm. El ángulo que forman las rectas sobre las que se encuentran los lados no paralelos es de 32° . Calcula lo que mide el otro lado y el área del trapecio.

- Los triángulos APB y DPC son semejantes, luego:

$$\frac{x}{10} = \frac{x+7}{17} \rightarrow 17x = 10(x+7) \rightarrow x = 10$$

Aplicando el teorema del coseno en el triángulo APB tenemos:

$$\overline{AB}^2 = x^2 + y^2 - 2xy \cos 32^\circ$$

$$10^2 = 10^2 + y^2 - 2 \cdot 10y \cdot \cos 32^\circ$$

$$0 = y^2 - 16,96y$$

$$\begin{cases} y = 0 \rightarrow \text{No válido} \\ y = 16,96 \text{ cm} \end{cases}$$

De nuevo, por semejanza de triángulos, tenemos:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AP}} = \frac{\overline{DC}}{\overline{DP}} \rightarrow \frac{10}{16,96} = \frac{17}{z+16,96} \rightarrow 10(z+16,96) = 17 \cdot 16,96$$

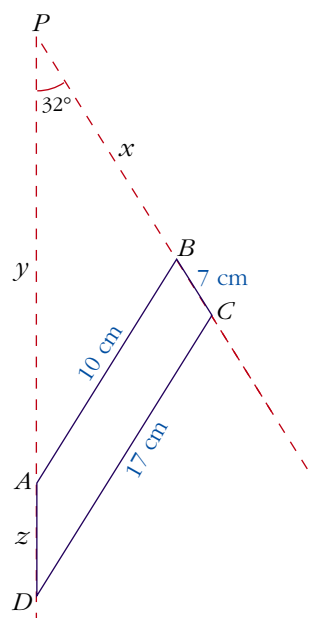
$$10z = 118,72 \rightarrow z = 11,872 \text{ cm mide el otro lado, } \overline{AD}, \text{ del trapecio.}$$

- Como PDC es un triángulo isósceles donde $\overline{DC} = \overline{CP} = 17 \text{ cm}$, entonces:

$$\hat{D} = 32^\circ \rightarrow \operatorname{sen} 32^\circ = \frac{h}{z} \Rightarrow h = z \cdot \operatorname{sen} 32^\circ = 11,872 \cdot \operatorname{sen} 32^\circ \approx 6,291$$

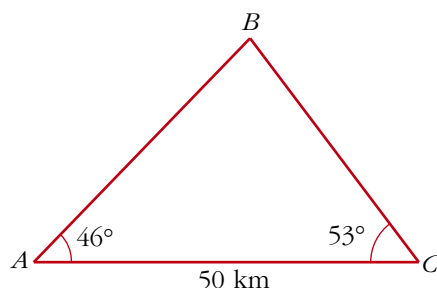
Así:

$$\text{Área}_{ABCD} = \frac{B+b}{2} \cdot h = \frac{17+10}{2} \cdot 6,291 = 84,93 \text{ cm}^2$$



6. Un barco B pide socorro y se reciben sus señales en dos estaciones de radio, A y C , que distan entre sí 50 km. Desde las estaciones se miden los siguientes ángulos: $\widehat{BAC} = 46^\circ$ y $\widehat{BCA} = 53^\circ$. ¿A qué distancia de cada estación se encuentra el barco?

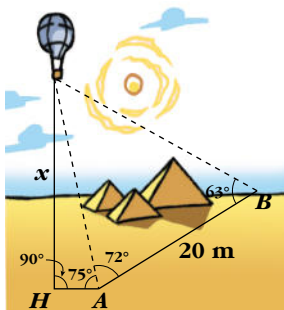
$$\widehat{B} = 180^\circ - 46^\circ - 53^\circ = 81^\circ$$



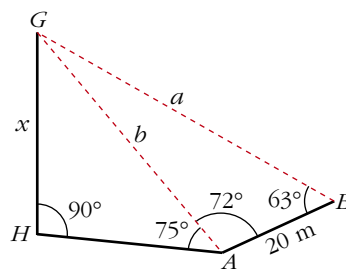
$$\bullet \frac{a}{\sen \widehat{A}} = \frac{b}{\sen \widehat{B}} \rightarrow a = \frac{b \sen \widehat{A}}{\sen \widehat{B}} = \frac{50 \cdot \sen 46^\circ}{\sen 81^\circ} = 36,4 \text{ km}$$

$$\bullet \frac{c}{\sen \widehat{C}} = \frac{b}{\sen \widehat{B}} \rightarrow c = \frac{b \sen \widehat{C}}{\sen \widehat{B}} = \frac{50 \cdot \sen 53^\circ}{\sen 81^\circ} = 40,4 \text{ km}$$

7.



Para hallar la altura de un globo, realizamos las mediciones indicadas en la figura. ¿Cuánto dista el globo del punto A ? ¿Cuánto del punto B ? ¿A qué altura está el globo?



$$\widehat{AGB} = 180^\circ - 72^\circ - 63^\circ = 45^\circ$$

$$\bullet \frac{b}{\sen 63^\circ} = \frac{20}{\sen 45^\circ} \rightarrow b = \frac{20 \cdot \sen 63^\circ}{\sen 45^\circ} = 25,2 \text{ m dista el globo del punto } A.$$

$$\bullet \frac{a}{\sen 72^\circ} = \frac{20}{\sen 45^\circ} \rightarrow a = \frac{20 \cdot \sen 72^\circ}{\sen 45^\circ} = 26,9 \text{ m dista el globo del punto } B.$$

$$\bullet \sen 75^\circ = \frac{x}{b} = \frac{x}{25,2} \rightarrow x = 25,2 \cdot \sen 75^\circ = 24,3 \text{ m es la altura del globo.}$$

EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

PARA PRACTICAR

Relación entre razones trigonométricas

- 1 Calcula las demás razones trigonométricas del ángulo α ($0^\circ < \alpha < 90^\circ$) utilizando las relaciones fundamentales:

a) $\operatorname{sen} \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$

b) $\cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$

c) $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$

d) $\operatorname{sen} \alpha = \frac{3}{8}$

e) $\cos \alpha = 0,72$

f) $\operatorname{tg} \alpha = 3$

$$\begin{aligned} \text{a) } \operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 &\rightarrow \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \cos^2 \alpha = 1 \rightarrow \cos^2 \alpha = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4} \rightarrow \\ &\rightarrow \cos \alpha = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\sqrt{3}/2}{1/2} = \sqrt{3}$$

$$\text{b) } \operatorname{sen}^2 \alpha + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 1 \rightarrow \operatorname{sen}^2 \alpha = 1 - \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \rightarrow \operatorname{sen} \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{2}/2}{\sqrt{2}/2} = 1$$

$$\text{c) } \frac{1}{\cos^2 \alpha} = 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha \rightarrow \frac{1}{\cos^2 \alpha} = 1 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \rightarrow \frac{1}{\cos^2 \alpha} = \frac{7}{4} \rightarrow$$

$$\rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{4}{7} \rightarrow \cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{7}} \rightarrow \cos \alpha = \frac{2\sqrt{7}}{7}$$

$$\operatorname{sen}^2 \alpha = 1 - \left(\frac{2\sqrt{7}}{7}\right)^2 = \frac{3}{7} \rightarrow \operatorname{sen} \alpha = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{21}}{7}$$

$$\text{d) } \cos^2 \alpha = 1 - \left(\frac{3}{8}\right)^2 \rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{55}{64} \rightarrow \cos \alpha = \frac{\sqrt{55}}{8}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{3/8}{\sqrt{55}/8} = \frac{3\sqrt{55}}{55}$$

$$\text{e) } \operatorname{sen}^2 \alpha = 1 - (0,72)^2 \rightarrow \operatorname{sen}^2 \alpha = 0,4816 \rightarrow \operatorname{sen} \alpha = 0,69$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{0,69}{0,72} = 0,96$$

$$f) \frac{1}{\cos^2 \alpha} = 1 + 3^2 \rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{1}{10} \rightarrow \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{10}$$

$$\operatorname{sen}^2 \alpha = 1 - \frac{1}{10} = \frac{9}{10} \rightarrow \operatorname{sen} \alpha = \frac{3}{\sqrt{10}} = \frac{3\sqrt{10}}{10}$$

2 Sabiendo que el ángulo α es obtuso, completa la siguiente tabla:

sen α	0,92				0,5	
cos α			-0,12	-0,8		
tg α		-0,75				-4

sen α	0,92	0,6	0,99	0,6	0,5	0,96
cos α	-0,39	-0,8	-0,12	-0,8	-0,87	-0,24
tg α	-2,36	-0,75	-8,25	-0,75	-0,57	-4

a) b) c) d) e) f)

$$a) \operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \rightarrow 0,92^2 + \cos^2 \alpha = 1 \rightarrow \cos^2 \alpha = 1 - 0,92^2$$

$$\cos^2 \alpha = 0,1536 \rightarrow \cos \alpha = -0,39$$

$$\begin{array}{c} \uparrow \\ \alpha \text{ obtuso} \end{array} \rightarrow \cos \alpha < 0$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} = -2,36$$

(Se podrían calcular directamente con la calculadora $\alpha = \operatorname{sen}^{-1} 0,92$, teniendo en cuenta que el ángulo está en el segundo cuadrante).

$$b) \frac{1}{\cos^2 \alpha} = 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha \rightarrow \frac{1}{\cos^2 \alpha} = 1 + 0,5625 \rightarrow \cos^2 \alpha = 0,64 \rightarrow \cos \alpha = -0,8$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} \rightarrow \operatorname{sen} \alpha = \operatorname{tg} \alpha \cdot \cos \alpha = (-0,75) \cdot (-0,8) = 0,6$$

$$c) \operatorname{sen}^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha = 1 - 0,0144 = 0,9856 \rightarrow \operatorname{sen} \alpha = 0,99$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} = \frac{0,99}{-0,12} = -8,25$$

$$d) \operatorname{sen}^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha = 1 - 0,64 = 0,36 \rightarrow \operatorname{sen} \alpha = 0,6$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} = \frac{0,6}{-0,8} = -0,75$$

(NOTA: es el mismo ángulo que el del apartado b)).

$$e) \cos^2 \alpha = 1 - \operatorname{sen}^2 \alpha = 1 - 0,25 = 0,75 \rightarrow \cos \alpha = -0,87$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} = \frac{0,5}{-0,87} = -0,57$$

$$f) \frac{1}{\cos^2 \alpha} = 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = 1 + 16 \rightarrow \cos^2 \alpha = 0,059 \rightarrow \cos \alpha = -0,24$$

$$\operatorname{sen} \alpha = \operatorname{tg} \alpha \cdot \cos \alpha = (-4) \cdot (-0,24) = 0,96$$

3 Halla las restantes razones trigonométricas de α :

a) $\operatorname{sen} \alpha = -4/5$ $\alpha < 270^\circ$

b) $\cos \alpha = 2/3$ $\operatorname{tg} \alpha < 0$

c) $\operatorname{tg} \alpha = -3$ $\alpha < 180^\circ$

$$a) \left. \begin{array}{l} \operatorname{sen} \alpha < 0 \\ \alpha < 270^\circ \end{array} \right\} \rightarrow \alpha \in 3.^{\text{er}} \text{ cuadrante} \rightarrow \begin{cases} \operatorname{sen} \alpha < 0 \\ \cos \alpha < 0 \\ \operatorname{tg} \alpha > 0 \end{cases}$$

$$\bullet \cos^2 \alpha = 1 - \operatorname{sen}^2 \alpha = 1 - \frac{16}{25} = \frac{9}{25} \rightarrow \cos \alpha = -\frac{3}{5}$$

$$\bullet \operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} = \frac{-4/5}{-3/5} = \frac{4}{3}$$

$$b) \left. \begin{array}{l} \cos \alpha > 0 \\ \operatorname{tg} \alpha < 0 \end{array} \right\} \rightarrow \operatorname{sen} \alpha < 0 \rightarrow \alpha \in 4.^{\circ} \text{ cuadrante}$$

$$\bullet \operatorname{sen}^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9} \rightarrow \operatorname{sen} \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$\bullet \operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} = -\frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$c) \left. \begin{array}{l} \operatorname{tg} \alpha < 0 \\ \alpha < 180^\circ \end{array} \right\} \rightarrow \alpha \in 2.^{\circ} \text{ cuadrante} \rightarrow \begin{cases} \operatorname{sen} \alpha > 0 \\ \cos \alpha < 0 \end{cases}$$

$$\bullet \frac{1}{\cos^2 \alpha} = \operatorname{tg}^2 \alpha + 1 = 9 + 1 = 10 \rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{1}{10} \rightarrow \cos \alpha = -\frac{\sqrt{10}}{10}$$

$$\bullet \operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} \rightarrow \operatorname{sen} \alpha = \operatorname{tg} \alpha \cdot \cos \alpha = (-3) \left(-\frac{\sqrt{10}}{10} \right) = \frac{3\sqrt{10}}{10}$$

4 Expresa con un ángulo del primer cuadrante:

a) $\operatorname{sen} 150^\circ$

b) $\cos 135^\circ$

c) $\operatorname{tg} 210^\circ$

d) $\cos 225^\circ$

e) $\operatorname{sen} 315^\circ$

f) $\operatorname{tg} 120^\circ$

g) $\operatorname{tg} 340^\circ$

h) $\cos 200^\circ$

i) $\operatorname{sen} 290^\circ$

a) $150^\circ = 180^\circ - 30^\circ \rightarrow \operatorname{sen} 150^\circ = \operatorname{sen} 30^\circ$

b) $135^\circ = 180^\circ - 45^\circ \rightarrow \cos 135^\circ = -\cos 45^\circ$

c) $210^\circ = 180^\circ + 30^\circ \rightarrow \operatorname{tg} 210^\circ = \frac{\operatorname{sen} 210^\circ}{\cos 210^\circ} = \frac{-\operatorname{sen} 30^\circ}{-\cos 30^\circ} = \operatorname{tg} 30^\circ$

d) $255^\circ = 270^\circ - 15^\circ \rightarrow \cos 255^\circ = -\operatorname{sen} 15^\circ$

$$e) 315^\circ = 360^\circ - 45^\circ \rightarrow \operatorname{sen} 315^\circ = -\operatorname{sen} 45^\circ$$

$$f) 120^\circ = 180^\circ - 60^\circ \rightarrow \operatorname{tg} 120^\circ = \frac{\operatorname{sen} 120^\circ}{\cos 120^\circ} = \frac{\operatorname{sen} 60^\circ}{-\cos 60^\circ} = -\operatorname{tg} 60^\circ$$

$$\left(\text{También } 120^\circ = 90^\circ + 30^\circ \rightarrow \operatorname{tg} 120^\circ = \frac{\operatorname{sen} 120^\circ}{\cos 120^\circ} = \frac{-\cos 30^\circ}{\operatorname{sen} 30^\circ} = -\frac{1}{\operatorname{tg} 30^\circ} \right)$$

$$g) 340^\circ = 360^\circ - 20^\circ \rightarrow \operatorname{tg} 340^\circ = \frac{\operatorname{sen} 340^\circ}{\cos 340^\circ} = \frac{-\operatorname{sen} 20^\circ}{\cos 20^\circ} = -\operatorname{tg} 20^\circ$$

$$h) 200^\circ = 180^\circ + 20^\circ \rightarrow \cos 200^\circ = -\cos 20^\circ$$

$$i) 290^\circ = 270^\circ + 20^\circ \rightarrow \operatorname{sen} 290^\circ = -\cos 20^\circ$$

$$(\text{También } 290^\circ = 360^\circ - 70^\circ \rightarrow \operatorname{sen} 290^\circ = -\operatorname{sen} 70^\circ)$$

5 Si $\operatorname{sen} \alpha = 0,35$ y $\alpha < 90^\circ$, halla:

a) $\operatorname{sen} (180^\circ - \alpha)$

b) $\operatorname{sen} (\alpha + 90^\circ)$

c) $\operatorname{sen} (180^\circ + \alpha)$

d) $\operatorname{sen} (360^\circ - \alpha)$

e) $\operatorname{sen} (90^\circ - \alpha)$

f) $\operatorname{sen} (360^\circ + \alpha)$

a) $\operatorname{sen} (180^\circ - \alpha) = \operatorname{sen} \alpha = 0,35$

b) $\operatorname{sen} (\alpha + 90^\circ) = \cos \alpha$
 $\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \rightarrow \cos^2 \alpha = 1 - 0,35^2 = 0,8775 \Rightarrow \cos \alpha \approx 0,94 \left. \vphantom{\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1} \right\} \rightarrow$

$\rightarrow \operatorname{sen} (\alpha + 90^\circ) = \cos \alpha = 0,94$

c) $\operatorname{sen} (180^\circ + \alpha) = -\operatorname{sen} \alpha = -0,35$

d) $\operatorname{sen} (360^\circ - \alpha) = -\operatorname{sen} \alpha = -0,35$

e) $\operatorname{sen} (90^\circ - \alpha) = \cos \alpha = 0,94$ (calculado en el apartado b))

f) $\operatorname{sen} (360^\circ + \alpha) = \operatorname{sen} \alpha = 0,35$

6 Si $\operatorname{tg} \alpha = 2/3$ y $0 < \alpha < 90^\circ$, halla:

a) $\operatorname{sen} \alpha$

b) $\cos \alpha$

c) $\operatorname{tg} (90^\circ - \alpha)$

d) $\operatorname{sen} (180^\circ - \alpha)$

e) $\cos (180^\circ + \alpha)$

f) $\operatorname{tg} (360^\circ - \alpha)$

a) $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} \rightarrow \operatorname{sen} \alpha = \operatorname{tg} \alpha \cdot \cos \alpha$

$$\frac{1}{\cos^2 \alpha} = \operatorname{tg}^2 \alpha + 1 \rightarrow \frac{1}{\cos^2 \alpha} = \frac{4}{9} + 1 = \frac{13}{9} \rightarrow$$

$$\rightarrow \cos \alpha = \sqrt{\frac{9}{13}} = \frac{3}{\sqrt{13}} = \frac{3\sqrt{13}}{13}$$

$$\operatorname{sen} \alpha = \operatorname{tg} \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{2}{3} \cdot \frac{3\sqrt{13}}{13} = \frac{2\sqrt{13}}{13}$$

b) Calculado en el apartado anterior: $\cos \alpha = \frac{3\sqrt{13}}{13}$

c) $\operatorname{tg} (90^\circ - \alpha) = \frac{\operatorname{sen} (90^\circ - \alpha)}{\cos (90^\circ - \alpha)} = \frac{\cos \alpha}{\operatorname{sen} \alpha} = \frac{3}{2}$

d) $\operatorname{sen} (180^\circ - \alpha) = \operatorname{sen} \alpha = \frac{2\sqrt{13}}{13}$

e) $\cos (180^\circ + \alpha) = -\cos \alpha = \frac{-3\sqrt{13}}{13}$

f) $\operatorname{tg} (360^\circ - \alpha) = \frac{\operatorname{sen} (360^\circ - \alpha)}{\cos (360^\circ - \alpha)} = \frac{-\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} = -\operatorname{tg} \alpha = -\frac{2}{3}$

7 Halla con la calculadora el ángulo α :

a) $\operatorname{sen} \alpha = -0,75 \quad \alpha < 270^\circ$

b) $\cos \alpha = -0,37 \quad \alpha > 180^\circ$

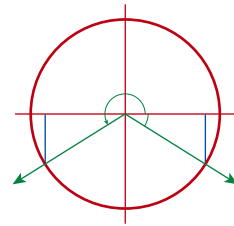
c) $\operatorname{tg} \alpha = 1,38 \quad \operatorname{sen} \alpha < 0$

d) $\cos \alpha = 0,23 \quad \operatorname{sen} \alpha < 0$

a) Con la calculadora $\rightarrow \alpha = -48^\circ 35' 25'' \in 4.^\circ$ cuadrante

Como debe ser $\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{sen} \alpha < 0 \\ \alpha < 270^\circ \end{array} \right\} \rightarrow \alpha \in 3.^\circ \text{ cuadrante}$

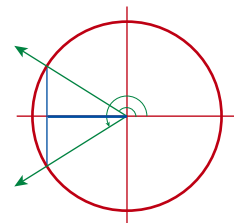
Luego $\alpha = 180^\circ + 48^\circ 35' 25'' = 228^\circ 35' 25''$



b) Con la calculadora: $111^\circ 42' 56,3''$

$\left. \begin{array}{l} \cos \alpha < 0 \\ \alpha > 180^\circ \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} \alpha \in 3.^\circ \text{ cuadrante} \\ \alpha = 360^\circ - 111^\circ 42' 56,3'' \end{array} \right\} \rightarrow$

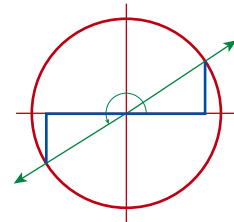
$\rightarrow \alpha = 248^\circ 17' 3,7''$



c) $\left. \begin{array}{l} \operatorname{tg} \alpha = 1,38 > 0 \\ \operatorname{sen} \alpha < 0 \end{array} \right\} \cos < 0 \rightarrow \alpha \in 3.^\circ \text{ cuadrante}$

Con la calculadora: $\operatorname{tg}^{-1} 1,38 = 54^\circ 4' 17,39''$

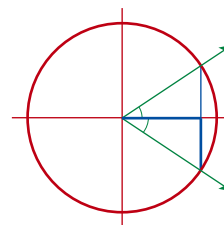
$\alpha = 180^\circ + 54^\circ 4' 17,39'' = 234^\circ 4' 17,4''$



$$d) \left. \begin{array}{l} \cos \alpha = 0,23 > 0 \\ \sin \alpha < 0 \end{array} \right\} \rightarrow \alpha \in 4.^\circ \text{ cuadrante}$$

$$\text{Con la calculadora: } \cos^{-1} 0,23 = 76^\circ 42' 10,5''$$

$$\alpha = -76^\circ 42' 10,5'' = 283^\circ 17' 49,6''$$



Resolución de triángulos rectángulos

8 Resuelve los siguientes triángulos rectángulos ($\hat{C} = 90^\circ$) hallando la medida de todos los elementos desconocidos:

a) $a = 5 \text{ cm}$, $b = 12 \text{ cm}$. Halla c , $\hat{A}$, $\hat{B}$.

b) $a = 43 \text{ m}$, $\hat{A} = 37^\circ$. Halla b , c , $\hat{B}$.

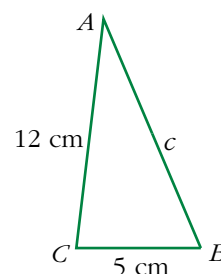
c) $a = 7 \text{ m}$, $\hat{B} = 58^\circ$. Halla b , c , $\hat{A}$.

d) $c = 5,8 \text{ km}$, $\hat{A} = 71^\circ$. Halla a , b , $\hat{B}$.

a) $c^2 = a^2 + b^2 \rightarrow c^2 = 5^2 + 12^2 = 169 \rightarrow c = 13 \text{ cm}$

$$\operatorname{tg} \hat{A} = \frac{5}{12} = 0,416 \rightarrow \hat{A} = 22^\circ 37' 11,5''$$

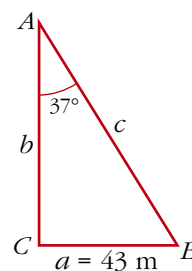
$$\hat{B} = 90^\circ - \hat{A} = 67^\circ 22' 48,5''$$



b) $\hat{B} = 90^\circ - 37^\circ = 53^\circ$

$$\sin \hat{A} = \frac{43}{c} \rightarrow c = \frac{43}{\sin 37^\circ} = 71,45 \text{ m}$$

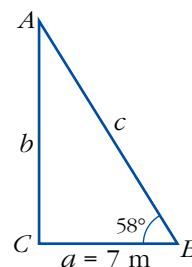
$$\operatorname{tg} \hat{A} = \frac{43}{b} \rightarrow b = \frac{43}{\operatorname{tg} 37^\circ} = 57,06 \text{ m}$$



c) $\hat{A} = 90^\circ - 58^\circ = 32^\circ$

$$\cos \hat{B} = \frac{7}{c} \rightarrow c = \frac{7}{\cos 58^\circ} = 13,2 \text{ m}$$

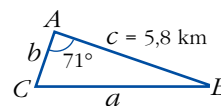
$$\operatorname{tg} \hat{B} = \frac{b}{7} \rightarrow b = 7 \cdot \operatorname{tg} 58^\circ = 11,2 \text{ m}$$



d) $\hat{B} = 90^\circ - 71^\circ = 19^\circ$

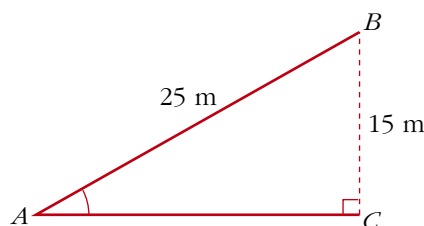
$$\operatorname{sen} \hat{A} = \frac{a}{5,8} \rightarrow a = 5,8 \cdot \operatorname{sen} 71^\circ = 5,48 \text{ km}$$

$$\cos \hat{A} = \frac{b}{5,8} \rightarrow b = 5,8 \cdot \cos 71^\circ = 1,89 \text{ km}$$

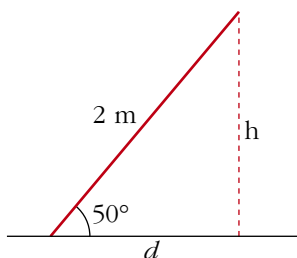


- 9** Si queremos que una cinta transportadora de 25 metros eleve la carga hasta una altura de 15 metros, ¿qué ángulo se deberá inclinar la cinta?

$$\operatorname{sen} \hat{A} = \frac{15}{25} = 0,6 \rightarrow \hat{A} = 36^\circ 52' 11,6''$$



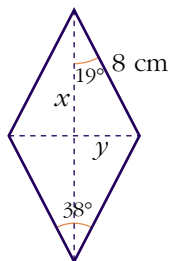
- 10** Una escalera de 2 m está apoyada en una pared formando un ángulo de 50° con el suelo. Halla la altura a la que llega y la distancia que separa su base de la pared.



$$\operatorname{sen} 50^\circ = \frac{h}{2} \rightarrow h = 1,53 \text{ m}$$

$$\cos 50^\circ = \frac{d}{2} \rightarrow d = 1,29 \text{ m}$$

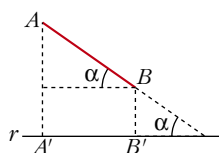
- 11** El lado de un rombo mide 8 cm y el ángulo menor es de 38° . ¿Cuánto miden las diagonales del rombo?



$$\operatorname{sen} 19^\circ = \frac{y}{8} \rightarrow y = 8 \cdot \operatorname{sen} 19^\circ = 2,6 \text{ cm} \rightarrow d = 5,2 \text{ cm}$$

$$\cos 38^\circ = \frac{x}{8} \rightarrow x = 8 \cdot \cos 19^\circ = 7,6 \text{ cm} \rightarrow D = 15,2 \text{ cm}$$

12



Calcula la proyección del segmento $\overline{AB} = 15$ cm sobre la recta r en los siguientes casos:

a) $\alpha = 72^\circ$

b) $\alpha = 50^\circ$

c) $\alpha = 15^\circ$

d) $\alpha = 90^\circ$

a) $\cos \alpha = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} \rightarrow \overline{A'B'} = 15 \cos 72^\circ = 4,64$ cm

b) $\overline{A'B'} = 15 \cos 5^\circ = 9,64$ cm

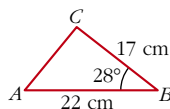
c) $\overline{A'B'} = 15 \cos 15^\circ = 14,49$ cm

d) $\overline{A'B'} = 15 \cos 90^\circ = 0$ cm

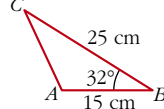
13

a) Halla la altura correspondiente al lado AB en cada uno de los siguientes triángulos:

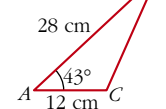
I



II



III



b) Halla el área de cada triángulo.

a) I) $\sin 28^\circ = \frac{h}{17} \rightarrow h = 7,98$ cm

II) $\sin 32^\circ = \frac{h}{25} \rightarrow h = 13,25$ cm

III) $\sin 43^\circ = \frac{h}{12} \rightarrow h = 8,18$ cm

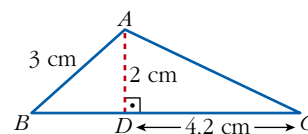
b) I) $A = \frac{22 \cdot 7,98}{2} = 87,78$ cm²

II) $A = \frac{15 \cdot 13,25}{2} = 99,38$ cm²

III) $A = \frac{28 \cdot 8,18}{2} = 114,52$ cm²

14

En el triángulo ABC , AD es la altura relativa al lado BC . Con los datos de la figura, halla los ángulos del triángulo ABC .



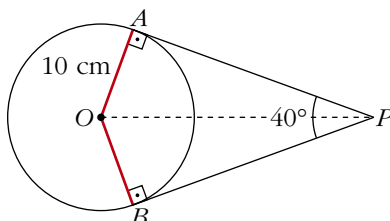
En $\widehat{ABD}$: $\sin \hat{B} = \frac{2}{3} \rightarrow \hat{B} = 41^\circ 48' 37''$; $\widehat{BAD} = 90^\circ - \hat{B} = 48^\circ 11' 23''$

En $\widehat{ADC}$: $\tan \hat{C} = \frac{2}{4,2} \rightarrow \hat{C} = 25^\circ 27' 48''$; $\widehat{DAC} = 64^\circ 32' 12''$

Ángulos: $\hat{A} = 112^\circ 43' 35''$; $\hat{B} = 41^\circ 48' 37''$; $\hat{C} = 25^\circ 27' 48''$

- 15** Desde un punto P exterior a una circunferencia de 10 cm de radio, se trazan las tangentes a dicha circunferencia que forman entre sí un ángulo de 40° .

Calcula la distancia de P a cada uno de los puntos de tangencia.



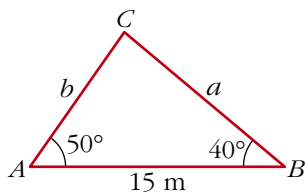
$$\text{En } \widehat{OAP}: \operatorname{tg} 20^\circ = \frac{10}{\overline{AP}} \rightarrow \overline{AP} = 27,47 \text{ cm}$$

Distancia de P a cada uno de los puntos de tangencia: 27,47 cm

Página 123

Teorema de los senos

- 16** Calcula a y b en el triángulo ABC en el que: $\hat{A} = 55^\circ$, $\hat{B} = 40^\circ$, $c = 15 \text{ m}$.

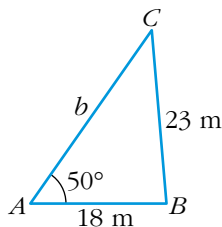


$$\hat{C} = 180^\circ - (55^\circ + 40^\circ) = 85^\circ$$

$$\frac{a}{\operatorname{sen} \hat{A}} = \frac{c}{\operatorname{sen} \hat{C}} \rightarrow \frac{a}{\operatorname{sen} 55^\circ} = \frac{15}{\operatorname{sen} 85^\circ} \rightarrow a = 12,33 \text{ m}$$

$$\frac{b}{\operatorname{sen} \hat{B}} = \frac{c}{\operatorname{sen} \hat{C}} \rightarrow \frac{b}{\operatorname{sen} 40^\circ} = \frac{15}{\operatorname{sen} 85^\circ} \rightarrow b = 9,68 \text{ m}$$

- 17** Halla el ángulo $\hat{C}$ y el lado b en el triángulo ABC en el que: $\hat{A} = 50^\circ$, $a = 23 \text{ m}$, $c = 18 \text{ m}$.



$$\frac{a}{\operatorname{sen} \hat{A}} = \frac{c}{\operatorname{sen} \hat{C}} \rightarrow \frac{23}{\operatorname{sen} 50^\circ} = \frac{18}{\operatorname{sen} \hat{C}} \rightarrow$$

$$\rightarrow \operatorname{sen} \hat{C} = \frac{18 \cdot \operatorname{sen} 50^\circ}{23} \rightarrow$$

$$\rightarrow \hat{C} = 36^\circ 50' 6'' \text{ (Tiene que ser } \hat{C} < \hat{A} \text{)}$$

$$\hat{B} = 180^\circ - (\hat{A} + \hat{C}) = 93^\circ 9' 54''$$

$$\frac{b}{\operatorname{sen} \hat{B}} = \frac{a}{\operatorname{sen} \hat{A}} \rightarrow b = \frac{23 \cdot \operatorname{sen} 93^\circ 9' 54''}{\operatorname{sen} 50^\circ} \rightarrow b = 29,98 \text{ m}$$

18 Resuelve los siguientes triángulos:

a) $\hat{A} = 35^\circ$ $\hat{C} = 42^\circ$ $b = 17$ m

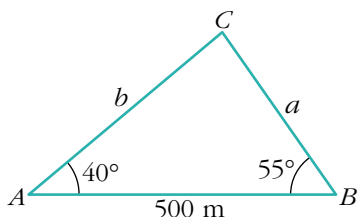
b) $\hat{B} = 105^\circ$ $b = 30$ m $a = 18$ m

a) $\hat{B} = 180^\circ - (35^\circ + 42^\circ) = 103^\circ$; $\frac{b}{\sin \hat{B}} = \frac{a}{\sin \hat{A}} \rightarrow a = \frac{17 \cdot \sin 35^\circ}{\sin 103^\circ} = 10$ m

$$\frac{b}{\sin \hat{B}} = \frac{c}{\sin \hat{C}} \rightarrow c = \frac{17 \cdot \sin 42^\circ}{\sin 103^\circ} \rightarrow c = 11,67$$
 m

b) $\frac{b}{\sin \hat{B}} = \frac{a}{\sin \hat{A}} \rightarrow \sin \hat{A} = \frac{18 \cdot \sin 105^\circ}{30} \rightarrow \hat{A} = 35^\circ 25' 9''$; $\hat{C} = 39^\circ 34' 51''$

$$\frac{b}{\sin \hat{B}} = \frac{c}{\sin \hat{C}} \rightarrow c = \frac{30 \cdot \sin 39^\circ 34' 51''}{\sin 105^\circ} \rightarrow c = 19,79$$
 m

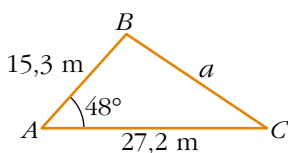
19 Dos amigos situados en dos puntos, A y B , que distan 500 m, ven la torre de una iglesia, C , bajo los ángulos $\hat{BAC} = 40^\circ$ y $\hat{ABC} = 55^\circ$. ¿Qué distancia hay entre cada uno de ellos y la iglesia?


$$\hat{C} = 180^\circ - (40^\circ + 55^\circ) = 85^\circ$$

$$\frac{a}{\sin 40^\circ} = \frac{500}{\sin 85^\circ} \rightarrow a = 322,62$$
 m

$$\frac{b}{\sin 55^\circ} = \frac{500}{\sin 85^\circ} \rightarrow b = 411,14$$
 m

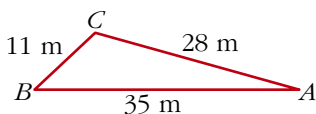
La distancia de A a la iglesia es de 411,14 m, y la de B a la iglesia, 322,62 m.

Teorema del coseno
20 Calcula a en el triángulo ABC , en el que: $\hat{A} = 48^\circ$, $b = 27,2$ m, $c = 15,3$ m.


$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A}$$

$$a^2 = 27,2^2 + 15,3^2 - 2 \cdot 27,2 \cdot 15,3 \cos 48^\circ \rightarrow$$

$$\rightarrow a = 20,42$$
 m

21 Halla los ángulos del triángulo ABC en el que $a = 11$ m, $b = 28$ m, $c = 35$ m.


$$11^2 = 28^2 + 35^2 - 2 \cdot 28 \cdot 35 \cos \hat{A} \rightarrow$$

$$\rightarrow \cos \hat{A} = \frac{28^2 + 35^2 - 11^2}{2 \cdot 28 \cdot 35} \rightarrow \hat{A} = 15^\circ 34' 41''$$

$$28^2 = 11^2 + 35^2 - 2 \cdot 11 \cdot 35 \cos \hat{B} \rightarrow \cos \hat{B} = \frac{11^2 + 35^2 - 28^2}{2 \cdot 11 \cdot 35} \rightarrow \hat{B} = 43^\circ 7' 28''$$

$$\hat{C} = 180^\circ - (\hat{A} + \hat{B}) \rightarrow \hat{C} = 121^\circ 17' 51''$$

22 Resuelve los siguientes triángulos:

a) $b = 32$ cm $a = 17$ cm $\hat{C} = 40^\circ$

b) $a = 85$ cm $c = 57$ cm $\hat{B} = 65^\circ$

c) $a = 23$ cm $b = 14$ cm $c = 34$ cm

a) $c^2 = 32^2 + 17^2 - 2 \cdot 32 \cdot 17 \cos 40^\circ \rightarrow c = 21,9$ cm

$17^2 = 32^2 + 21,9^2 - 2 \cdot 32 \cdot 21,9 \cos \hat{A} \rightarrow \hat{A} = 29^\circ 56' 8''$

$\hat{B} = 180^\circ - (\hat{A} + \hat{C}) \rightarrow \hat{B} = 110^\circ 3' 52''$

b) $b^2 = 85^2 + 57^2 - 2 \cdot 85 \cdot 57 \cos 65^\circ \rightarrow b = 79,87$ cm

$57^2 = 85^2 + 79,87^2 - 2 \cdot 85 \cdot 79,87 \cos \hat{C} \rightarrow \hat{C} = 40^\circ 18' 5''$

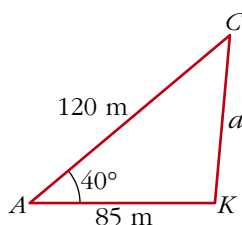
$\hat{A} = 180^\circ - (\hat{B} + \hat{C}) \rightarrow \hat{A} = 74^\circ 41' 55''$

c) $23^2 = 14^2 + 34^2 - 2 \cdot 14 \cdot 34 \cos \hat{A} \rightarrow \hat{A} = 30^\circ 10' 29''$

$14^2 = 23^2 + 34^2 - 2 \cdot 23 \cdot 34 \cos \hat{B} \rightarrow \hat{B} = 17^\circ 48' 56''$

$\hat{C} = 180^\circ - (\hat{A} + \hat{B}) \rightarrow \hat{C} = 133^\circ 0' 35''$

23 Desde la puerta de mi casa, A, veo el cine, C, que está a 120 m, y el kiosko, K, que está a 85 m, bajo un ángulo $\hat{CAK} = 40^\circ$. ¿Qué distancia hay entre el cine y el kiosko?



$$a^2 = 120^2 + 85^2 - 2 \cdot 120 \cdot 85 \cos 40^\circ$$

$$a = 77,44 \text{ m es la distancia entre el cine y el kiosko.}$$

Resolución de triángulos cualesquiera

24 Resuelve los siguientes triángulos:

a) $a = 100$ m $\hat{B} = 47^\circ$ $\hat{C} = 63^\circ$

b) $b = 17$ m $\hat{A} = 70^\circ$ $\hat{C} = 35^\circ$

c) $a = 70$ m $b = 55$ m $\hat{C} = 73^\circ$

d) $a = 122$ m $c = 200$ m $\hat{B} = 120^\circ$

e) $a = 25$ m $b = 30$ m $c = 40$ m

f) $a = 100$ m $b = 185$ m $c = 150$ m

g) $a = 15$ m $b = 9$ m $\hat{A} = 130^\circ$

h) $b = 6$ m $c = 8$ m $\hat{C} = 57^\circ$

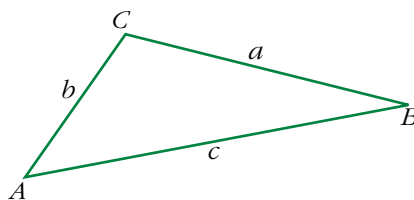
$$a) \bullet \hat{A} = 180^\circ - (\hat{B} + \hat{C}) = 70^\circ$$

$$\bullet \frac{a}{\operatorname{sen} \hat{A}} = \frac{b}{\operatorname{sen} \hat{B}} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{100}{\operatorname{sen} 70^\circ} = \frac{b}{\operatorname{sen} 47^\circ} \rightarrow$$

$$\rightarrow b = \frac{100 \cdot \operatorname{sen} 47^\circ}{\operatorname{sen} 70^\circ} = 77,83 \text{ m}$$

$$\bullet \frac{100}{\operatorname{sen} 70^\circ} = \frac{c}{\operatorname{sen} 63^\circ} \rightarrow c = \frac{100 \cdot \operatorname{sen} 63^\circ}{\operatorname{sen} 70^\circ} = 94,82 \text{ m}$$



$$b) \bullet \hat{B} = 180^\circ - (\hat{A} + \hat{C}) = 75^\circ$$

$$\bullet \frac{17}{\operatorname{sen} 75^\circ} = \frac{a}{\operatorname{sen} 70^\circ} \rightarrow a = \frac{17 \cdot \operatorname{sen} 70^\circ}{\operatorname{sen} 75^\circ} = 16,54 \text{ m}$$

$$\bullet \frac{17}{\operatorname{sen} 75^\circ} = \frac{c}{\operatorname{sen} 35^\circ} \rightarrow c = \frac{17 \cdot \operatorname{sen} 35^\circ}{\operatorname{sen} 75^\circ} = 10,09 \text{ m}$$

$$c) \bullet c^2 = 70^2 + 55^2 - 2 \cdot 70 \cdot 55 \cdot \cos 73^\circ = 5673,74 \rightarrow c = 75,3 \text{ m}$$

$$\bullet 70^2 = 55^2 + 75,3^2 - 2 \cdot 55 \cdot 75,3 \cdot \cos \hat{A} \rightarrow$$

$$\rightarrow \cos \hat{A} = \frac{55^2 + 75,3^2 - 70^2}{2 \cdot 55 \cdot 75,3} = 0,4582 \rightarrow \hat{A} = 62^\circ 43' 49,4''$$

$$\bullet \hat{B} = 180^\circ - (\hat{A} + \hat{C}) = 44^\circ 16' 10,6''$$

$$d) \bullet b^2 = 122^2 + 200^2 - 2 \cdot 122 \cdot 200 \cdot \cos 120^\circ = 79284 \rightarrow b = 281,6 \text{ m}$$

$$\bullet a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A} \rightarrow \cos \hat{A} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \rightarrow$$

$$\rightarrow \cos \hat{A} = \frac{281,6^2 + 200^2 - 122^2}{2 \cdot 281,6 \cdot 200} = 0,92698 \rightarrow \hat{A} = 22^\circ 1' 54,45''$$

$$\bullet \hat{C} = 180^\circ - (\hat{A} + \hat{B}) = 37^\circ 58' 55,5''$$

$$e) \bullet a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A} \rightarrow$$

$$\rightarrow \cos \hat{A} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{30^2 + 40^2 - 25^2}{2 \cdot 30 \cdot 40} = 0,7812 \rightarrow \hat{A} = 38^\circ 37' 29,4''$$

$$\bullet \cos \hat{B} = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{25^2 + 40^2 - 30^2}{2 \cdot 25 \cdot 40} = 0,6625 \rightarrow \hat{B} = 48^\circ 30' 33''$$

$$\bullet \hat{C} = 180^\circ - (\hat{A} + \hat{B}) = 92^\circ 51' 57,6''$$

$$f) \bullet \cos \hat{A} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{185^2 + 150^2 - 100^2}{2 \cdot 185 \cdot 150} = 0,84189 \rightarrow \hat{A} = 32^\circ 39' 34,4''$$

$$\bullet \cos \hat{B} = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{100^2 + 150^2 - 185^2}{2 \cdot 100 \cdot 150} = -0,0575 \rightarrow \hat{B} = 93^\circ 17' 46,7''$$

$$\bullet \hat{C} = 180^\circ - (\hat{A} + \hat{B}) = 54^\circ 2' 38,9''$$

$$g) \cdot \frac{15}{\operatorname{sen} 130^\circ} = \frac{9}{\operatorname{sen} \hat{B}} \rightarrow \operatorname{sen} \hat{B} = \frac{9 \cdot \operatorname{sen} 130^\circ}{15} = 0,4596 \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} \hat{B}_1 = 27^\circ 21' 46,8'' \\ \hat{B}_2 = 152^\circ 38' 13,2'' \end{cases}$$

La solución $\hat{B}_2$ no es válida, pues $\hat{A} + \hat{B}_2 > 180^\circ$.

$$\bullet \hat{C} = 180^\circ - (\hat{A} + \hat{B}) = 22^\circ 38' 13,2''$$

$$\bullet \frac{15}{\operatorname{sen} 130^\circ} = \frac{c}{\operatorname{sen} \hat{C}} \rightarrow c = \frac{15 \cdot \operatorname{sen} \hat{C}}{\operatorname{sen} 130^\circ} = 7,54 \text{ m}$$

$$h) \cdot \frac{8}{\operatorname{sen} 57^\circ} = \frac{6}{\operatorname{sen} \hat{B}} \rightarrow \operatorname{sen} \hat{B} = \frac{6 \cdot \operatorname{sen} 57^\circ}{8} = 0,6290 \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} \hat{B}_1 = 38^\circ 58' 35,7'' \\ \hat{B}_2 = 141^\circ 1' 24,3'' \end{cases}$$

La solución $\hat{B}_2$ no es válida, pues $\hat{C} + \hat{B}_2 > 180^\circ$.

$$\bullet \hat{A} = 180^\circ - (\hat{B} + \hat{C}) = 84^\circ 1' 24,3''$$

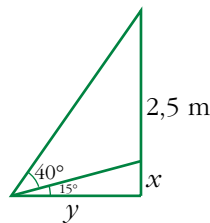
$$\bullet \frac{8}{\operatorname{sen} 57^\circ} = \frac{a}{\operatorname{sen} \hat{A}} \rightarrow a = \frac{8 \cdot \operatorname{sen} \hat{A}}{\operatorname{sen} 57^\circ} = 9,5 \text{ m}$$

PARA RESOLVER

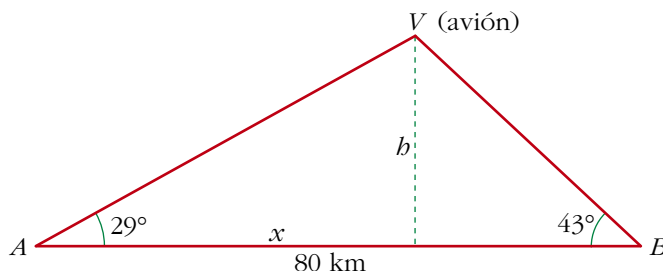
- 25** Una estatua de 2,5 m de alto está colocada sobre un pedestal. Desde un punto del suelo se ve el pedestal bajo un ángulo de 15° y la estatua, bajo un ángulo de 40° . Calcula la altura del pedestal.

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} 15^\circ &= \frac{x}{y} \rightarrow y = \frac{x}{\operatorname{tg} 15^\circ} \\ \operatorname{tg} 55^\circ &= \frac{2,5 + x}{y} \rightarrow y = \frac{2,5 + x}{\operatorname{tg} 55^\circ} \end{aligned} \right\} \rightarrow \frac{x}{\operatorname{tg} 15^\circ} = \frac{2,5 + x}{\operatorname{tg} 55^\circ} \rightarrow$$

$$\rightarrow x \operatorname{tg} 55^\circ = 2,5 \operatorname{tg} 15^\circ + x \operatorname{tg} 15^\circ \rightarrow x = \frac{2,5 \cdot \operatorname{tg} 15^\circ}{\operatorname{tg} 55^\circ - \operatorname{tg} 15^\circ} = 0,58 \text{ m (el pedestal)}$$



- 26** Un avión vuela entre dos ciudades, A y B , que distan 80 km. Las visuales desde el avión a A y a B forman ángulos de 29° y 43° con la horizontal, respectivamente. ¿A qué altura está el avión?



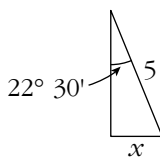
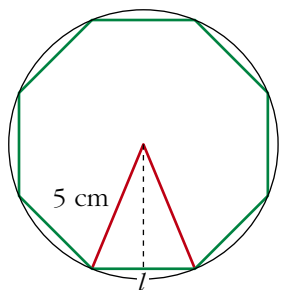
$$\operatorname{tg} 29^\circ = \frac{h}{x} \rightarrow x = \frac{h}{\operatorname{tg} 29^\circ}$$

$$\operatorname{tg} 43^\circ = \frac{h}{80-x} \rightarrow x = \frac{80 \operatorname{tg} 43^\circ - h}{\operatorname{tg} 43^\circ}$$

$$\frac{h}{\operatorname{tg} 29^\circ} = \frac{80 \operatorname{tg} 43^\circ - h}{\operatorname{tg} 43^\circ} \rightarrow h \operatorname{tg} 43^\circ = 80 \operatorname{tg} 43^\circ \operatorname{tg} 29^\circ - h \operatorname{tg} 29^\circ \rightarrow$$

$$\rightarrow h = \frac{80 \operatorname{tg} 43^\circ \operatorname{tg} 29^\circ}{\operatorname{tg} 43^\circ + \operatorname{tg} 29^\circ} = 27,8 \text{ km}$$

- 27** Halla el lado del octógono inscrito y del octógono circunscrito en una circunferencia de radio 5 cm.

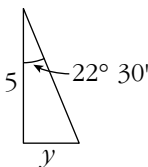
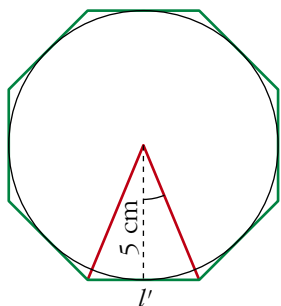


$$\frac{360^\circ}{8} = 45^\circ$$

$$\operatorname{sen} 22^\circ 30' = \frac{x}{5} \rightarrow x = 1,91 \text{ cm}$$

Lado del octógono inscrito:

$$l = 3,82 \text{ cm}$$

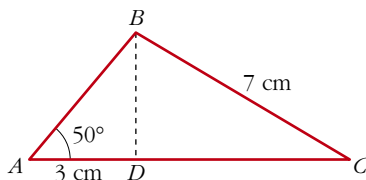


$$\operatorname{tg} 22^\circ 30' = \frac{y}{5} \rightarrow y = 2,07 \text{ cm}$$

Lado del octógono circunscrito:

$$l' = 4,14 \text{ cm}$$

28 Calcula los lados y los ángulos del triángulo ABC .



En el triángulo rectángulo ABD , halla $\overline{AB}$ y $\overline{BD}$. En BDC , halla $\hat{C}$ y $\overline{DC}$. Para hallar $\hat{B}$, sabes que $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$.

• En $\widehat{ABD}$:

$$\cos 50^\circ = \frac{3}{\overline{AB}} \rightarrow \overline{AB} = \frac{3}{\cos 50^\circ} = 4,7 \text{ cm}$$

$$\operatorname{tg} 50^\circ = \frac{\overline{BD}}{3} \rightarrow \overline{BD} = 3 \operatorname{tg} 50^\circ = 3,6 \text{ cm}$$

• En $\widehat{BDC}$:

$$\operatorname{sen} \hat{C} = \frac{\overline{BD}}{7} = \frac{3,6}{7} \approx 0,5143 \rightarrow \hat{C} = 30^\circ 56' 59''$$

$$\cos \hat{C} = \frac{\overline{DC}}{7} \rightarrow \overline{DC} = 7 \cdot \cos \hat{C} \approx 6 \text{ cm}$$

• Así, ya tenemos:

$$\hat{A} = 50^\circ$$

$$a = 7 \text{ cm}$$

$$\hat{B} = 180^\circ - (\hat{A} + \hat{C}) = 99^\circ 3' 1''$$

$$b = \overline{AD} + \overline{DC} = 9 \text{ cm}$$

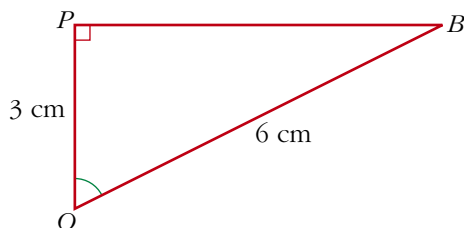
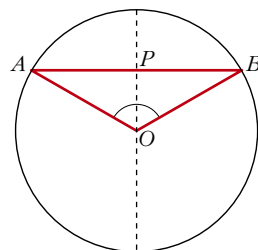
$$\hat{C} = 30^\circ 56' 59''$$

$$c = 4,7 \text{ cm}$$

29 En una circunferencia de radio 6 cm trazamos una cuerda AB a 3 cm del centro.

Halla el ángulo $\widehat{AOB}$.

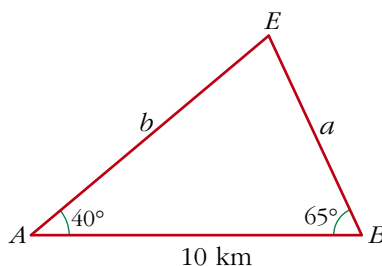
El triángulo AOB es isósceles.



$$\left. \begin{array}{l} \overline{OP} = 3 \text{ cm} \\ \overline{OB} = 6 \text{ cm} \\ \widehat{OPB} = 90^\circ \end{array} \right\} \rightarrow \cos \widehat{POB} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \rightarrow \widehat{POB} = 60^\circ \rightarrow$$

$$\rightarrow \widehat{AOB} = 2 \cdot \widehat{POB} = 2 \cdot 60^\circ = 120^\circ$$

- 30** Para localizar una emisora clandestina, dos receptores, A y B , que distan entre sí 10 km, orientan sus antenas hacia el punto donde está la emisora. Estas direcciones forman con AB ángulos de 40° y 65° . ¿A qué distancia de A y B se encuentra la emisora?



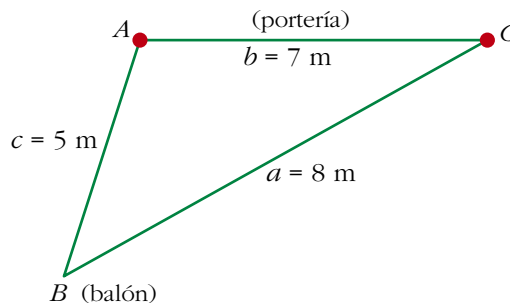
$$\hat{E} = 180^\circ - (\hat{A} + \hat{B}) = 75^\circ$$

Aplicando el teorema de los senos:

$$\frac{a}{\sen 40^\circ} = \frac{10}{\sen 75^\circ} \rightarrow a = \frac{10 \cdot \sen 40^\circ}{\sen 75^\circ} = 6,65 \text{ km dista de } B.$$

$$\frac{b}{\sen 65^\circ} = \frac{10}{\sen 75^\circ} \rightarrow b = \frac{10 \cdot \sen 65^\circ}{\sen 75^\circ} = 9,38 \text{ km dista de } A.$$

- 31** En un entrenamiento de fútbol se coloca el balón en un punto situado a 5 m y 8 m de cada uno de los postes de la portería, cuyo ancho es de 7 m. ¿Bajo qué ángulo se ve la portería desde ese punto?



Aplicando el teorema del coseno:

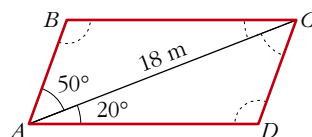
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos \hat{B} \rightarrow$$

$$\rightarrow \cos \hat{B} = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{8^2 + 5^2 - 7^2}{2 \cdot 8 \cdot 5} = 0,5 \rightarrow \hat{B} = 60^\circ$$

Página 124

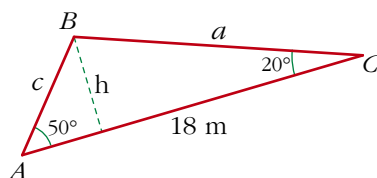
32 Calcula el área y las longitudes de los lados y de la otra diagonal:

• $\widehat{BAC} = \widehat{ACD} = 50^\circ$. Calcula los lados del triángulo ACD y su área. Para hallar la otra diagonal, considera el triángulo ABD .



- Los dos triángulos en que la diagonal divide al paralelogramo son iguales.

Luego bastará resolver uno de ellos para calcular los lados:



$$\widehat{B} = 180^\circ - (\widehat{A} + \widehat{C}) = 110^\circ$$

$$\frac{a}{\sen 50^\circ} = \frac{18}{\sen 110^\circ} \rightarrow a = \frac{18 \cdot \sen 50^\circ}{\sen 110^\circ} = 14,7 \text{ m}$$

$$\frac{c}{\sen 20^\circ} = \frac{18}{\sen 110^\circ} \rightarrow c = \frac{18 \cdot \sen 20^\circ}{\sen 110^\circ} = 6,6 \text{ m}$$

$$\text{Así: } \overline{AB} = \overline{CD} = c = 6,6 \text{ m}$$

$$\overline{BC} = \overline{AD} = a = 14,7 \text{ m}$$

Para calcular el área del triángulo ABC :

$$\sen 50^\circ = \frac{h}{c} \rightarrow h = c \cdot \sen 50^\circ \rightarrow$$

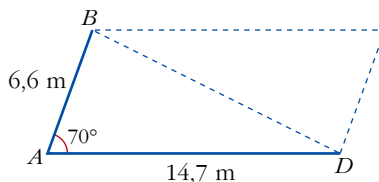
$$\rightarrow \text{Área}_{ABC} = \frac{18 \cdot h}{2} = \frac{18 \cdot c \cdot \sen 50^\circ}{2} = \frac{18 \cdot 6,6 \cdot \sen 50^\circ}{2} = 45,5 \text{ m}^2$$

El área del paralelogramo será:

$$\text{Área}_{ABCD} = 2 \cdot \text{Área}_{ABC} = 2 \cdot 45,5 = 91 \text{ m}^2$$

- Para calcular la otra diagonal, consideremos el triángulo ABD :

$$\widehat{A} = 50^\circ + 20^\circ = 70^\circ$$

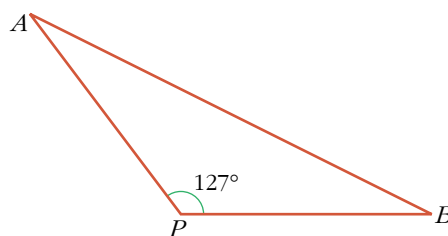


Aplicando el teorema del coseno:

$$\overline{BD}^2 = 6,6^2 + 14,7^2 - 2 \cdot 6,6 \cdot 14,7 \cdot \cos 70^\circ \approx 193,28 \rightarrow \overline{BD} = 13,9 \text{ m}$$

- 33** Dos barcos parten de un puerto con rumbos distintos que forman un ángulo de 127° . El primero sale a las 10 h de la mañana con una velocidad de 17 nudos, y el segundo sale a las 11 h 30 min, con una velocidad de 26 nudos. Si el alcance de sus equipos de radio es de 150 km, ¿podrán ponerse en contacto a las 3 de la tarde?

(Nudo = milla / hora; milla = 1 850 m).



La distancia que recorre cada uno en ese tiempo es:

$$\text{Barco A} \rightarrow \overline{PA} = 17 \cdot 1\,850 \text{ m/h} \cdot 5 \text{ h} = 157\,250 \text{ m}$$

$$\text{Barco B} \rightarrow \overline{PB} = 26 \cdot 1\,850 \text{ m/h} \cdot 3,5 \text{ h} = 168\,350 \text{ m}$$

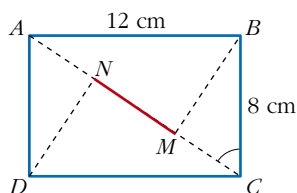
Necesariamente, $\overline{AB} > \overline{PA}$ y $\overline{AB} > \overline{PB}$, luego:

$$\overline{AB} > 168\,350 \text{ m}$$

Como el alcance de sus equipos de radio es 150 000 m, no podrán ponerse en contacto.

(NOTA: Puede calcularse $\overline{AB}$ con el teorema del coseno $\rightarrow \overline{AB} = 291\,432,7 \text{ m}$).

- 34** En un rectángulo $ABCD$ de lados 8 cm y 12 cm, se traza desde B una perpendicular a la diagonal AC , y desde D , otra perpendicular a la misma diagonal. Sean M y N los puntos donde esas perpendiculares cortan a la diagonal. Halla la longitud del segmento MN .



En el triángulo ABC , halla $\hat{C}$. En el triángulo BMC , halla $\overline{MC}$. Ten en cuenta que:

$$\overline{MN} = \overline{AC} - 2\overline{MC}$$

Los triángulos AND y BMC son iguales, luego $\overline{AN} = \overline{MC}$

Como $\overline{MN} = \overline{AC} - \overline{AN} - \overline{MC}$, entonces:

$$\overline{MN} = \overline{AC} - 2\overline{MC}$$

Por tanto, basta con calcular $\overline{AC}$ en el triángulo ABC y $\overline{MC}$ en el triángulo BMC .

- En $\widehat{ABC}$:

$$\overline{AC}^2 = 8^2 + 12^2 = 208 \text{ (por el teorema de Pitágoras)} \rightarrow \overline{AC} = 14,4 \text{ cm}$$

Calculamos $\hat{C}$ (en $\widehat{ABC}$):

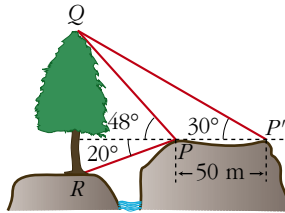
$$\operatorname{tg} \hat{C} = \frac{12}{8} = 1,5 \rightarrow \hat{C} = 56^\circ 18' 35,8''$$

- En $\widehat{BMC}$:

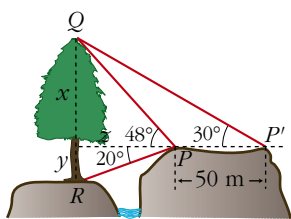
$$\cos \hat{C} = \frac{\overline{MC}}{8} \rightarrow \overline{MC} = 8 \cdot \cos (56^\circ 18' 35,8'') = 4,4 \text{ cm}$$

$$\text{Por último: } \overline{MN} = \overline{AC} - 2\overline{MC} = 14,4 - 2 \cdot 4,4 = 5,6 \text{ cm}$$

35 Halla la altura del árbol QR de pie inaccesible y más bajo que el punto de observación, con los datos de la figura.



Llamemos x e y a las medidas de la altura de las dos partes en que queda dividido el árbol según la figura dada; y llamemos z a la distancia de P al árbol.



$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} 48^\circ &= \frac{x}{z} \rightarrow x = z \cdot \operatorname{tg} 48^\circ \\ \operatorname{tg} 30^\circ &= \frac{x}{z+50} \rightarrow x = (z+50) \operatorname{tg} 30^\circ \end{aligned} \right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow z \cdot \operatorname{tg} 48^\circ = (z+50) \operatorname{tg} 30^\circ \rightarrow$$

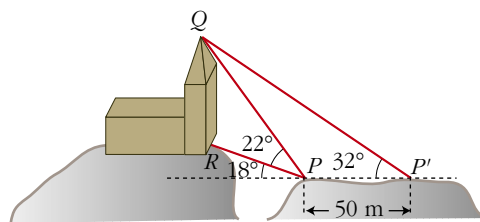
$$\rightarrow z \cdot \operatorname{tg} 48^\circ = z \cdot \operatorname{tg} 30^\circ + 50 \cdot \operatorname{tg} 30^\circ \rightarrow z = \frac{50 \operatorname{tg} 30^\circ}{\operatorname{tg} 48^\circ - \operatorname{tg} 30^\circ} = 54,13 \text{ m}$$

$$\text{Sustituyendo en } x = z \cdot \operatorname{tg} 48^\circ = 54,13 \cdot \operatorname{tg} 48^\circ = 60,12 \text{ m} = x$$

$$\text{Para calcular } y: \operatorname{tg} 20^\circ = \frac{y}{z} \rightarrow y = z \cdot \operatorname{tg} 20^\circ = 54,13 \cdot \operatorname{tg} 20^\circ = 19,7 \text{ m}$$

Luego: $\overline{QR} = x + y = 79,82 \text{ m}$ mide la altura del árbol.

- 36** Calcula la altura de QR , cuyo pie es inaccesible y más alto que el punto donde se encuentra el observador, con los datos de la figura.



Llamemos x a la distancia del punto más alto a la línea horizontal del observador; y , a la distancia de la base de la torre a la misma línea; y z , a la distancia RP , como se indica en la figura.

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} (18^\circ + 22^\circ) &= \operatorname{tg} 40^\circ = \frac{x}{z} \rightarrow x = z \cdot \operatorname{tg} 40^\circ \\ \operatorname{tg} 32^\circ &= \frac{x}{z + 50} \rightarrow x = (z + 50) \operatorname{tg} 32^\circ \end{aligned} \right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow z \cdot \operatorname{tg} 40^\circ = (z + 50) \operatorname{tg} 32^\circ \rightarrow z = \frac{50 \operatorname{tg} 32^\circ}{\operatorname{tg} 40^\circ - \operatorname{tg} 32^\circ} = 145,84$$

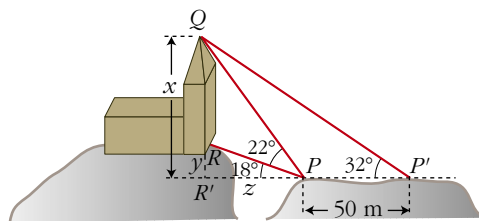
Sustituyendo en $x = z \cdot \operatorname{tg} 40^\circ = 145,84 \cdot \operatorname{tg} 40^\circ = 122,37$ m

Para calcular y :

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} 18^\circ &= \frac{y}{z} \rightarrow y = z \cdot \operatorname{tg} 18^\circ = \\ &= 145,84 \cdot \operatorname{tg} 18^\circ = 47,4 \text{ m} \end{aligned}$$

Por tanto:

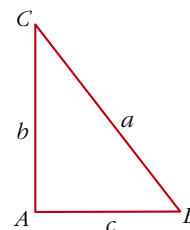
$\overline{QR} = x - y = 74,97$ m mide la altura de la torre.



CUESTIONES TEÓRICAS

- 37** Explica si las siguientes igualdades referidas al triángulo ABC son verdaderas o falsas:

- | | |
|--|---|
| 1) $a = \frac{b}{\operatorname{sen} \hat{A}}$ | 2) $c = a \cos \hat{B}$ |
| 3) $c = \frac{b}{\operatorname{tg} \hat{C}}$ | 4) $b = a \operatorname{sen} \hat{C}$ |
| 5) $\operatorname{tg} \hat{B} \cdot \operatorname{tg} \hat{C} = 1$ | 6) $c \operatorname{tg} \hat{B} = b$ |
| 7) $\operatorname{sen} \hat{B} - \cos \hat{C} = 0$ | 8) $a = \frac{b}{\cos \hat{C}}$ |
| 9) $b = \frac{c}{\operatorname{tg} \hat{B}}$ | 10) $\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 \hat{B}} = \frac{c}{a}$ |
| 11) $\operatorname{sen} \hat{B} \cdot \cos \hat{C} = 1$ | 12) $\frac{\operatorname{sen} \hat{B}}{\cos \hat{C}} = 1$ |



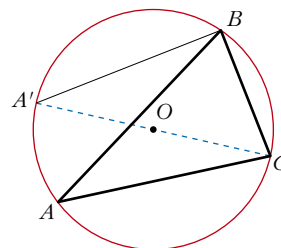
- 1) Verdadera, pues $\operatorname{sen} \hat{B} = \frac{b}{a} \rightarrow a = \frac{b}{\operatorname{sen} \hat{B}}$
- 2) Verdadera, pues $\cos \hat{B} = \frac{c}{a} \rightarrow a \cdot \cos \hat{B} = c$
- 3) Falsa, pues $\operatorname{tg} \hat{C} = \frac{c}{b} \rightarrow c = b \cdot \operatorname{tg} \hat{C}$
- 4) Falsa, pues $\operatorname{sen} \hat{C} = \frac{c}{a} \rightarrow a \cdot \operatorname{sen} \hat{C} = c \neq b$
- 5) Verdadera, pues $\operatorname{tg} \hat{B} \cdot \operatorname{tg} \hat{C} = \frac{b}{c} \cdot \frac{c}{b} = 1$
- 6) Verdadera, pues $\operatorname{tg} \hat{B} = \frac{b}{c} \rightarrow b = c \cdot \operatorname{tg} \hat{B}$
- 7) Verdadera, pues $\operatorname{sen} \hat{B} - \cos \hat{C} = \frac{b}{a} - \frac{b}{a} = 0$
- 8) Verdadera, pues $\cos \hat{C} = \frac{b}{a} \rightarrow a = \frac{b}{\operatorname{sen} \hat{C}}$
- 9) Falsa, pues $\operatorname{tg} \hat{B} = \frac{b}{c} \rightarrow b = c \cdot \operatorname{tg} \hat{B}$
- 10) Verdadera, pues $\operatorname{sen}^2 \hat{B} + \cos^2 \hat{B} = 1 \rightarrow \cos \hat{B} = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 \hat{B}}$
 Como $\cos \hat{B} = \frac{c}{a} \rightarrow \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 \hat{B}} = \frac{c}{a}$
- 11) Falsa, pues $\operatorname{sen} \hat{B} \cdot \cos \hat{C} = \frac{b}{a} \cdot \frac{b}{a} = \frac{b^2}{a^2} \neq 1$ (porque $b \neq a$)
- 12) Verdadera, pues $\frac{\operatorname{sen} \hat{B}}{\cos \hat{C}} = \frac{b/a}{b/a} = 1$

38 Prueba que en un triángulo cualquiera se verifica:

$$\frac{a}{\operatorname{sen} \hat{A}} = \frac{b}{\operatorname{sen} \hat{B}} = \frac{c}{\operatorname{sen} \hat{C}} = 2R$$

R es el radio de la circunferencia circunscrita.

🔵 **Traza el diámetro desde uno de los vértices del triángulo ABC . Aplica el teorema de los senos en los triángulos ABC y $A'BC$.**



Aplicamos el teorema de los senos en los triángulos ABC y $A'BC$:

- En $\widehat{ABC} \rightarrow \frac{a}{\operatorname{sen} \hat{A}} = \frac{b}{\operatorname{sen} \hat{B}} = \frac{c}{\operatorname{sen} \hat{C}}$
- En $\widehat{A'BC} \rightarrow \frac{\overline{BC}}{\operatorname{sen} \hat{A}'} = \frac{\overline{A'C}}{\operatorname{sen} \hat{A'BC}}$

Sucede que:

$$\overline{BC} = a$$

$$\hat{A}' = \hat{A} \text{ (ángulos inscritos en una circunferencia que abarcan el mismo arco)}$$

$$\overline{A'C} = 2R$$

$$\widehat{A'BC} = 90^\circ \text{ (medida de ángulos inscritos en una circunferencia)}$$

$$\text{La igualdad queda: } \frac{a}{\text{sen } \hat{A}} = \frac{2R}{\text{sen } 90^\circ} \rightarrow \frac{a}{\text{sen } \hat{A}} = \frac{2R}{1} = 2R$$

- Por último, sustituyendo en la primera expresión, se obtiene el resultado:

$$2R = \frac{a}{\text{sen } \hat{A}} = \frac{b}{\text{sen } \hat{B}} = \frac{c}{\text{sen } \hat{C}}$$

39 Prueba que solo existe un triángulo con estos datos:

$$b = \sqrt{3} \text{ m}, \quad a = 1,5 \text{ m}, \quad \hat{A} = 60^\circ$$

¿Existe algún triángulo con estos datos?:

$$\hat{C} = 135^\circ, \quad b = 3\sqrt{2} \text{ cm}, \quad c = 3 \text{ cm}$$

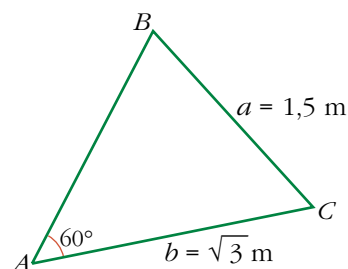
$$\bullet a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A}$$

$$1,5^2 = (\sqrt{3})^2 + c^2 - 2\sqrt{3} c \cos 60^\circ$$

$$2,25 = 3 + c^2 - 2\sqrt{3} c \cdot \frac{1}{2}$$

$$c^2 - \sqrt{3} c + 0,75 = 0$$

$$c = \frac{\sqrt{3} \pm \sqrt{3-3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ m}$$



La ecuación de segundo grado solo tiene una raíz. Solo hay una solución.

(NOTA: También se pueden estudiar las dos soluciones que salen para B con el teorema del seno y ver que una de ellas no es válida, pues quedaría $\hat{A} + \hat{B} > 180^\circ$).

- Podemos resolverlo con el teorema del coseno, como antes, o con el teorema del seno. Resolvemos este apartado con el segundo método mencionado:

$$\begin{aligned} \frac{b}{\text{sen } \hat{B}} &= \frac{c}{\text{sen } \hat{C}} \rightarrow \frac{3\sqrt{2}}{\text{sen } \hat{B}} = \frac{3}{\text{sen } 135^\circ} \rightarrow \\ &\rightarrow \text{sen } \hat{B} = \frac{3\sqrt{2} \text{ sen } 135^\circ}{3} = \\ &= \sqrt{2} \text{ sen } 135^\circ = 1 \rightarrow \hat{B} = 90^\circ \end{aligned}$$

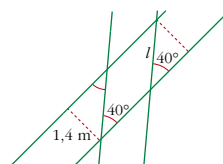
Pero: $\hat{C} + \hat{B} = 135^\circ + 90^\circ > 180^\circ$ ¡Imposible!

Luego la solución no es válida y, por tanto, concluimos que no hay ningún triángulo con esos datos.

PARA PROFUNDIZAR

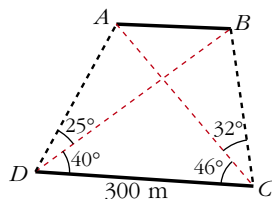
- 40** Dos vías de tren de 1,4 m de ancho se cruzan formando un rombo. Si un ángulo de corte es de 40° , ¿cuánto valdrá el lado del rombo?

$$\operatorname{sen} 40^\circ = \frac{1,4}{l} \rightarrow l = \frac{1,4}{\operatorname{sen} 40^\circ} = 2,18 \text{ m}$$



- 41** Para hallar la distancia entre dos puntos inaccesibles A y B , fijamos dos puntos C y D tales que $\overline{CD} = 300$ m, y medimos los siguientes ángulos:

$$\begin{aligned} \widehat{ADB} &= 25^\circ & \widehat{BDC} &= 40^\circ \\ \widehat{ACD} &= 46^\circ & \widehat{ACB} &= 32^\circ \end{aligned}$$



Calcula $\overline{AB}$.

Si conociésemos $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$, podríamos hallar $\overline{AB}$ con el teorema del coseno en $\widehat{ABC}$.

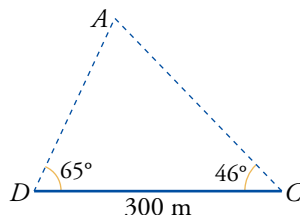
Calculemos, pues, $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$:

- En el triángulo ADC :

$$\hat{A} = 180^\circ - 65^\circ - 46^\circ = 69^\circ$$

Por el teorema del seno:

$$\frac{300}{\operatorname{sen} 69^\circ} = \frac{\overline{AC}}{\operatorname{sen} 65^\circ} \rightarrow \overline{AC} = \frac{300 \cdot \operatorname{sen} 65^\circ}{\operatorname{sen} 69^\circ} = 291,24 \text{ m}$$

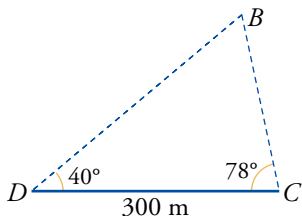


- En el triángulo BCD :

$$\hat{B} = 180^\circ - 40^\circ - 78^\circ = 62^\circ$$

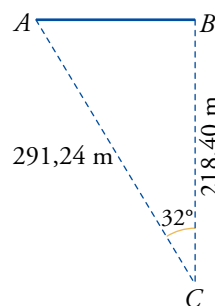
Por el teorema del seno:

$$\begin{aligned} \frac{300}{\operatorname{sen} 62^\circ} &= \frac{\overline{BC}}{\operatorname{sen} 40^\circ} \rightarrow \\ \rightarrow \overline{BC} &= \frac{300 \cdot \operatorname{sen} 40^\circ}{\operatorname{sen} 62^\circ} = 218,40 \text{ m} \end{aligned}$$

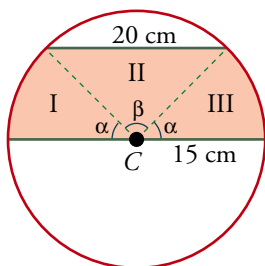


- Podemos centrarnos ya en el triángulo ABC y aplicar el teorema del coseno:

$$\begin{aligned}\overline{AB}^2 &= 291,24^2 + 218,40^2 - 2 \cdot 291,24 \cdot 218,40 \cdot \cos 32^\circ = \\ &= 24\,636,019 \\ \overline{AB} &= 156,96 \text{ m}\end{aligned}$$



- 42** En un círculo de 15 cm de radio, halla el área comprendida entre una cuerda de 20 cm de longitud y el diámetro paralelo a ella.



Podemos dividir la zona sombreada en tres, de forma que:

- I = III $\rightarrow$ sectores circulares de ángulo α desconocido.
- II $\rightarrow$ triángulo isósceles de lados iguales 15 cm y de lado desigual 20 cm.

- En II:

Calculemos la altura h desde C :

$$15^2 = h^2 + 10^2 \rightarrow h = \sqrt{15^2 - 10^2} = 11,18 \text{ cm}$$

$$\text{Así: } \text{Área}_{\text{II}} = \frac{\text{base} \times \text{altura}}{2} = \frac{20 \cdot 11,18}{2} = 111,8 \text{ cm}^2$$

Calculemos el ángulo β (el ángulo desigual) aplicando el teorema del coseno:

$$\begin{aligned}20^2 &= 15^2 + 15^2 - 2 \cdot 15 \cdot 15 \cdot \cos \beta \\ \cos \beta &= \frac{15^2 + 15^2 - 20^2}{2 \cdot 15 \cdot 15} = 0,1 \rightarrow \beta = 83^\circ 37' 14,3''\end{aligned}$$

- En I:

Conocido β podemos calcular α fácilmente:

$$\alpha = \frac{180^\circ - \beta}{2} = 48^\circ 11' 22,9''$$

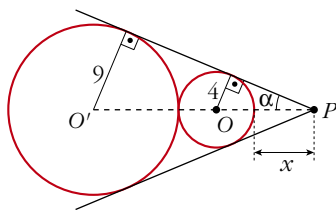
Y, con esto, el área:

$$\text{Área}_I = \frac{\pi r^2}{360^\circ} \cdot \alpha = \frac{\pi \cdot 15^2}{360^\circ} \cdot \alpha = 94,62 \text{ cm}^2$$

- Por último, el área pedida será:

$$A_T = \text{Área}_{\text{II}} + 2 \cdot \text{Área}_I = 111,8 + 2 \cdot 94,62 \rightarrow A_T = 301,04 \text{ cm}^2$$

- 43** Dos circunferencias son tangentes exteriormente y sus radios miden 9 m y 4 m. Halla el ángulo, 2α , que forman sus tangentes comunes.



Los radios forman con las tangentes dos triángulos rectángulos. Como $\overline{OP} = 4 + x$, se tiene:

$$\text{sen } \alpha = \frac{4}{4 + x} \quad \text{y} \quad \text{sen } \alpha = \frac{9}{17 + x}$$

Calcula x y después α .

$$\left. \begin{array}{l} \overline{OP} = 4 + x \rightarrow \text{sen } \alpha = \frac{4}{4 + x} \\ \overline{O'P} = 9 + 4 + 4 + x = 17 + x \rightarrow \text{sen } \alpha = \frac{9}{17 + x} \end{array} \right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{4}{4 + x} = \frac{9}{17 + x} \rightarrow 4(17 + x) = 9(4 + x) \rightarrow$$

$$\rightarrow 68 - 36 = 9x - 4x \rightarrow 32 = 5x \rightarrow x = 6,4 \text{ m}$$

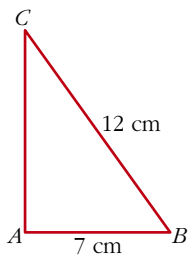
Sustituyendo x por su valor:

$$\text{sen } \alpha = \frac{4}{4 + x} = \frac{4}{4 + 6,4} = \frac{4}{10,4} = 0,3846 \rightarrow \alpha = 22^\circ 37' 11,5''$$

$$\text{Así: } 2\alpha = 45^\circ 14' 23''$$

AUTOEVALUACIÓN

- 1.** De un triángulo rectángulo ABC conocemos la hipotenusa $a = 12 \text{ cm}$ y el cateto $c = 7 \text{ cm}$. Halla sus ángulos agudos.



$$\text{sen } \hat{C} = \frac{7}{12} \rightarrow \hat{C} = 35^\circ 41' 7''$$

$$\hat{B} = 90^\circ - \hat{C} = 54^\circ 18' 53''$$

- 2. Expresa con un ángulo del primer cuadrante las razones trigonométricas de los siguientes ángulos: 154° , 207° , 318° , 2456°**

$$\begin{cases} \operatorname{sen} 154^\circ = \operatorname{sen} (180^\circ - 26^\circ) = \operatorname{sen} 26^\circ \\ \cos 154^\circ = -\cos 26^\circ \\ \operatorname{tg} 154^\circ = -\operatorname{tg} 26^\circ \end{cases}$$

$$\begin{cases} \operatorname{sen} 207^\circ = \operatorname{sen} (180^\circ + 27^\circ) = -\operatorname{sen} 27^\circ \\ \cos 207^\circ = -\cos 27^\circ \\ \operatorname{tg} 207^\circ = \operatorname{tg} 27^\circ \end{cases}$$

$$\begin{cases} \operatorname{sen} 318^\circ = \operatorname{sen} (360^\circ - 42^\circ) = -\operatorname{sen} 42^\circ \\ \cos 318^\circ = \cos 42^\circ \\ \operatorname{tg} 318^\circ = -\operatorname{tg} 42^\circ \end{cases}$$

$$\begin{cases} \operatorname{sen} 2456^\circ = \operatorname{sen} (360^\circ \cdot 6 + 296^\circ) = \operatorname{sen} 296^\circ = \operatorname{sen} (360^\circ - 64^\circ) = -\operatorname{sen} 64^\circ \\ \cos 2456^\circ = \cos 64^\circ \\ \operatorname{tg} 2456^\circ = -\operatorname{tg} 64^\circ \end{cases}$$

- 3. Si $\operatorname{sen} \alpha = 4/5$ y $\alpha > 90^\circ$, calcula sin hallar el ángulo α :**

a) $\cos \alpha$

b) $\operatorname{tg} \alpha$

c) $\operatorname{sen} (180^\circ + \alpha)$

d) $\cos (90^\circ + \alpha)$

e) $\operatorname{tg} (180^\circ - \alpha)$

f) $\operatorname{sen} (90^\circ + \alpha)$

$$a) \cos^2 \alpha = 1 - \operatorname{sen}^2 \alpha \rightarrow \cos^2 \alpha = 1 - \frac{16}{25} \rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{9}{25} \rightarrow \cos \alpha = \pm \frac{3}{5}$$

$$\cos \alpha = -\frac{3}{5}$$

$$b) \operatorname{tg} \alpha = \frac{4/5}{-3/5} = -\frac{4}{3}$$

$$c) \operatorname{sen} (180^\circ + \alpha) = -\operatorname{sen} \alpha = -\frac{4}{5}$$

$$d) \cos (90^\circ + \alpha) = -\operatorname{sen} \alpha = -\frac{4}{5}$$

$$e) \operatorname{tg} (180^\circ - \alpha) = -\operatorname{tg} \alpha = \frac{4}{3}$$

$$f) \operatorname{sen} (90^\circ + \alpha) = \cos \alpha = -\frac{3}{5}$$

- 4. Si $\operatorname{tg} \alpha = -3,5$, halla α con ayuda de la calculadora, exprésalo como un ángulo del intervalo $[0, 360^\circ)$ y obtén su seno y su coseno.**

$$\alpha = \boxed{\text{SHIFT}} \boxed{\text{tan}} \boxed{3.5} \boxed{+/=} \boxed{-74.054604}$$

Hay dos soluciones:

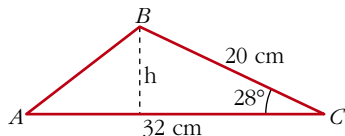
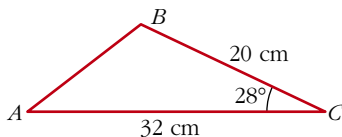
$$\alpha_1 = 285^\circ 56' 43''$$

$$\alpha_2 = 105^\circ 56' 43''$$

$$\operatorname{sen} \alpha_1 = -0,96; \cos \alpha_1 = 0,27$$

$$\operatorname{sen} \alpha_2 = 0,96; \cos \alpha_2 = -0,27$$

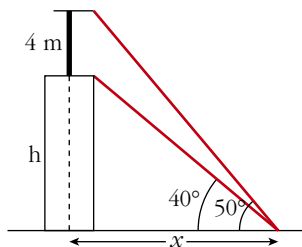
5. Calcula el área del triángulo ABC .



$$\text{Altura: } \operatorname{sen} 28^\circ = \frac{h}{20} \rightarrow h = 20 \cdot \operatorname{sen} 28^\circ = 9,39 \text{ cm}$$

$$\text{Área} = \frac{32 \cdot 9,39}{2} = 150,24 \text{ cm}^2$$

6. En lo alto de un edificio en construcción hay una grúa de 4 m. Desde un punto del suelo se ve el punto más alto de la grúa bajo un ángulo de 50° con respecto a la horizontal y el punto más alto del edificio bajo un ángulo de 40° con la horizontal. Calcula la altura del edificio.



$$\begin{cases} \operatorname{tg} 40^\circ = \frac{h}{x} \\ \operatorname{tg} 50^\circ = \frac{4+h}{x} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} h = x \operatorname{tg} 40^\circ \\ x \operatorname{tg} 50^\circ = 4 + x \operatorname{tg} 40^\circ \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow x \operatorname{tg} 50^\circ - \operatorname{tg} 40^\circ = 4 \rightarrow x = \frac{4}{\operatorname{tg} 50^\circ - \operatorname{tg} 40^\circ} = 11,34 \text{ m}$$

$$h = 11,34 \cdot \operatorname{tg} 40^\circ = 9,52 \text{ m}$$

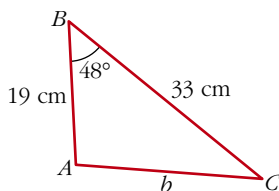
La altura del edificio es 9,52 m.

7. Resuelve el triángulo ABC en estos casos:

a) $c = 19 \text{ cm}$, $a = 33 \text{ cm}$, $\hat{B} = 48^\circ$

b) $a = 15 \text{ cm}$, $b = 11 \text{ cm}$, $\hat{B} = 30^\circ$

a)



• Con el teorema del coseno, hallamos b :

$$b^2 = 19^2 + 33^2 - 2 \cdot 19 \cdot 33 \cos 48^\circ = 610,9 \rightarrow$$

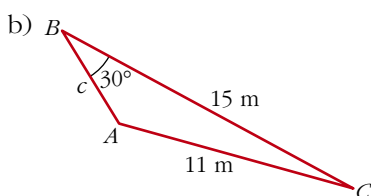
$$\rightarrow b = 24,72 \text{ cm}$$

• Del mismo modo, hallamos $\hat{A}$:

$$33^2 = 19^2 + 24,72^2 - 2 \cdot 19 \cdot 24,72 \cos \hat{A}$$

$$\cos \hat{A} = -0,1245 \rightarrow \hat{A} = 97^\circ 9'$$

• $\hat{C} = 180^\circ - (\hat{A} + \hat{B}) = 34^\circ 51'$



• Hallamos $\hat{A}$ con el teorema de los senos:

$$\frac{a}{\operatorname{sen} \hat{A}} = \frac{b}{\operatorname{sen} \hat{B}} \rightarrow \frac{15}{\operatorname{sen} \hat{A}} = \frac{11}{\operatorname{sen} 30^\circ} \rightarrow$$

$$\rightarrow \operatorname{sen} \hat{A} = 0,6818$$

• Hay dos soluciones:

$$\hat{A}_1 = 42^\circ 59' 9'' \quad \hat{A}_2 = 137^\circ 0' 51''$$

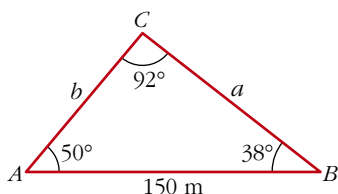
$$\hat{C}_1 = 107^\circ 0' 51'' \quad \hat{C}_2 = 12^\circ 59' 9''$$

$$\frac{11}{\operatorname{sen} 30^\circ} = \frac{c_1}{\operatorname{sen} 107^\circ 0' 51''} \rightarrow c_1 = 21,04 \text{ cm}$$

$$\frac{11}{\operatorname{sen} 30^\circ} = \frac{c_2}{\operatorname{sen} 12^\circ 59' 9''} \rightarrow c_2 = 4,94 \text{ cm}$$

- 8. Dos amigos están en una playa a 150 m de distancia y en el mismo plano vertical que una cometa que se encuentra volando entre ambos. En un momento dado, uno la ve con un ángulo de elevación de 50° y el otro con un ángulo de 38° . ¿Qué distancia hay de cada uno de ellos a la cometa?**

$$\hat{C} = 180^\circ - (50^\circ + 38^\circ) = 92^\circ$$



Hallamos a y b con el teorema de los senos:

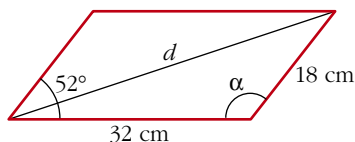
$$\frac{a}{\operatorname{sen} \hat{A}} = \frac{c}{\operatorname{sen} \hat{C}} \rightarrow \frac{a}{\operatorname{sen} 50^\circ} = \frac{150}{\operatorname{sen} 92^\circ} \rightarrow$$

$$\rightarrow a = 114,98 \text{ m}$$

$$\frac{b}{\operatorname{sen} \hat{B}} = \frac{c}{\operatorname{sen} \hat{C}} \rightarrow \frac{b}{\operatorname{sen} 38^\circ} = \frac{150}{\operatorname{sen} 92^\circ} \rightarrow b = 92,41 \text{ m}$$

Las distancias de cada uno a la cometa son 114,98 m y 92,41 m, respectivamente.

- 9. Los lados de un paralelogramo miden 18 cm y 32 cm y forman un ángulo de 52° . Halla la longitud de la diagonal mayor.**



$$\alpha = 180^\circ - 52^\circ = 128^\circ$$

Calculamos d aplicando el teorema del coseno:

$$d^2 = 18^2 + 32^2 - 2 \cdot 18 \cdot 32 \cos 128^\circ = 2057,24$$

$d = 45,36 \text{ cm}$ es la medida de la diagonal.

