UNIDAD 8.- LÍMITES DE FUNCIONES. CONTINUIDAD
(tema 11 del libro)

1. *LÍMITE. LÍMITES LATERALES*

Diremos que una *función* $y = f(x)$ *tiene por límite L* cuando la variable independiente x tiende a x_0, y se nota por $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$, cuando al acercarnos todo lo que queramos a x_0, las $f(x)$ se aproximan todo lo que queramos a L. Esta definición es de andar por casa, pero nos sirve para su comprensión. Las definiciones correctas las tenéis en el libro, pero no son necesarias saberlas. El que quiera que las estudie.

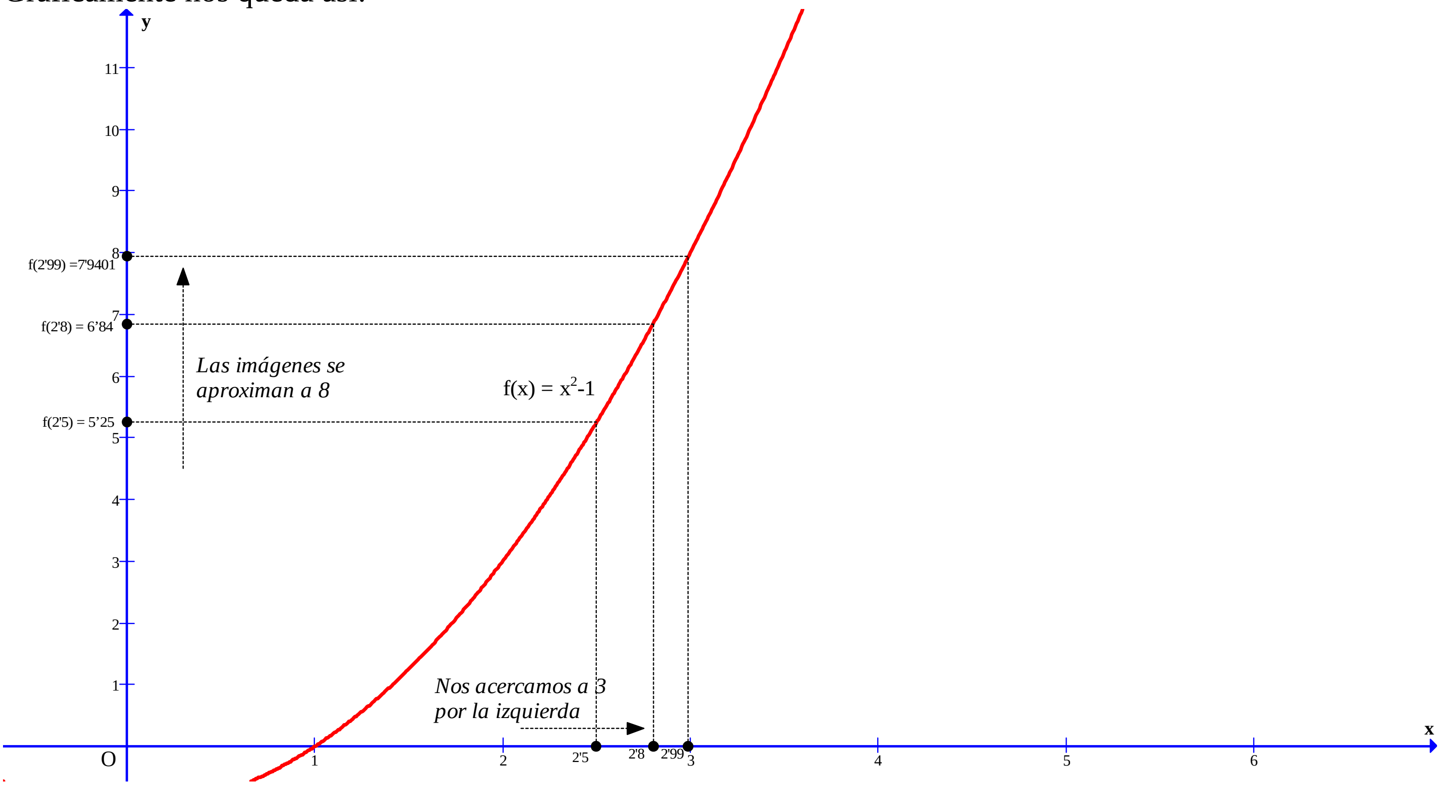
Vamos a calcular de una manera un poco "cutre" $\lim_{x \to 3}(x^2 - 1)$ haciendo una tabla de valores:

La expresión $x \to 3$, nos indica que x puede tomar valores infinitamente cercanos a 3. Nos podemos acercar con valores próximos a 3 pero menores que 3 (límite lateral izquierdo) o bien con valores próximos a 3 pero mayores a 3 (límite lateral derecho)

Hacemos la tabla por la izquierda:

$x \to 3^-$	2'5	2'8	2'99	2'9999	=======➔ 3
$f(x) = x^2 - 1$	5'25	6'84	7'9401	7'99940001	=======➔ 8

Gráficamente nos queda así:

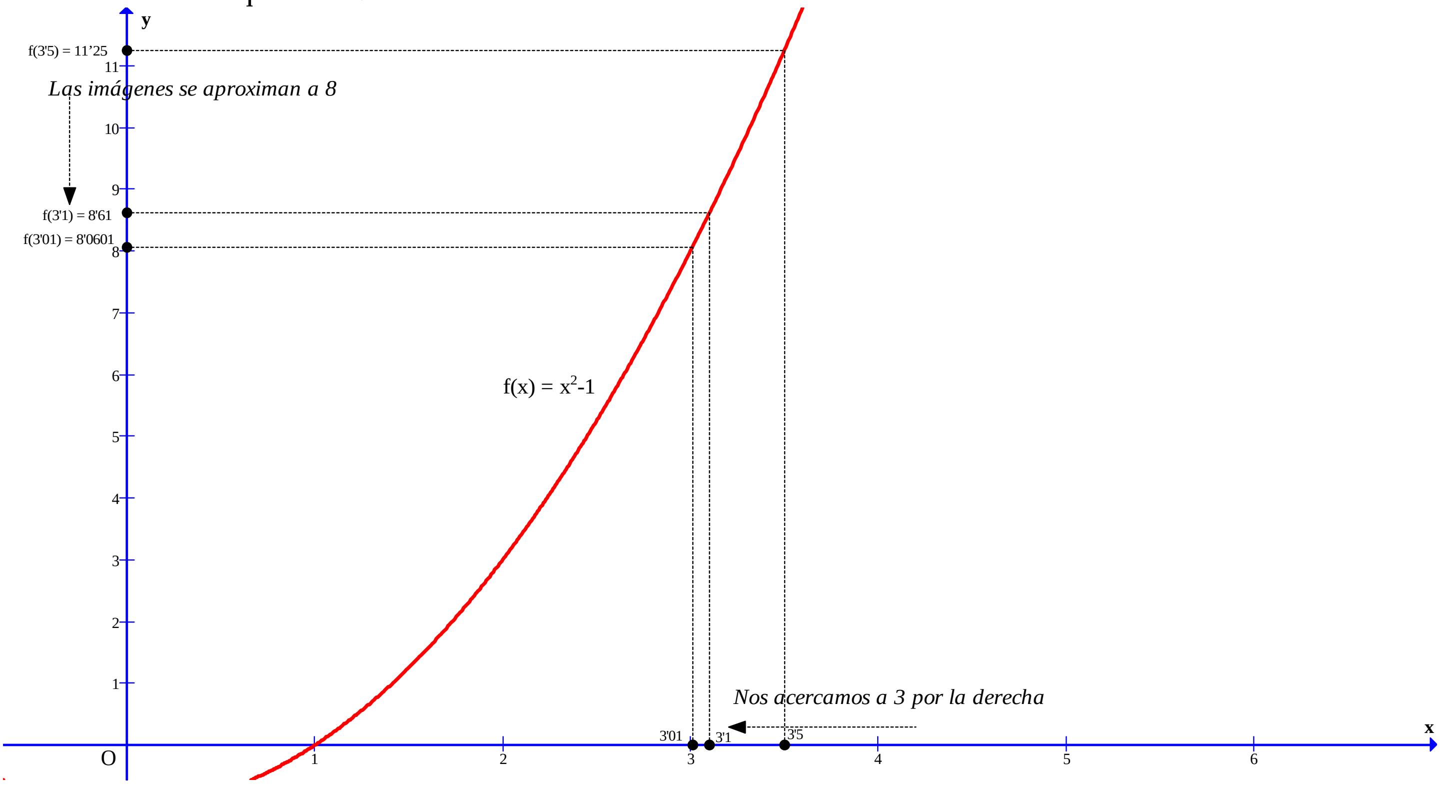


Según esta tabla podemos concluir que el límite lateral izquierdo, vale 8. $\lim_{x \to 3^-}(x^2 - 1) = 8$ (el signo menos como superíndice del 3 nos indica que es por la izquierda)

Análogamente, hacemos la tabla por la derecha

$x \to 3^+$	3'5	3'1	3'01	3'0001	=======➔ 3
$f(x) = x^2 - 1$	11'25	8'61	8'0601	8'00060001	=======➔ 8

Gráficamente nos queda así:



Según esta tabla podemos concluir que el límite lateral derecho, vale 8. $\displaystyle \lim_{x\to 3^+}(x^2-1)=8$ (el signo + como superíndice del 3 nos indica que es por la derecha)

Si hacemos una tabla con valores próximos a 3 tanto por la izquierda como por la derecha simultáneamente, también tendríamos que la función tiende a 8. Es decir, que tenemos que $\displaystyle \lim_{x\to 3}(x^2-1)=8$

Luego concluimos, que para que una función tenga límite ha de tener los límites laterales y estos han de ser iguales. Matemáticamente se expresa de la siguiente forma: (esto es importante)

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=L \Leftrightarrow \begin{cases} \displaystyle\lim_{x\to x_0^-} f(x)=L \\ \displaystyle\lim_{x\to x_0^+} f(x)=L \end{cases}$$

Los límites laterales se usan sobre todo cuando la función viene definida de manera diferente por la izquierda o por la derecha. También se usan cuando el denominador de una fracción tiende a 0,

NOTA: También si nos fijamos, para calcular los límites no hay que hacer aburridas tablas, bastaría con sustituir el valor al que tiende x en la expresión de la función.

En nuestro ejemplo, $\displaystyle \lim_{x\to 3}\left(x^2-1\right)=3^2-1=8$

Ejemplo 1.- Calcular los siguientes límites:

a) $\displaystyle \lim_{x\to 2}(5x-1) = 5\cdot 2-1=9$

b) $\displaystyle \lim_{x\to -5}\left(\frac{2}{x+1}\right)=\frac{2}{-5+1}=\frac{-1}{2}$

En estos dos simples ejemplos, se pueden hacer también los límites laterales y sus resultados son los mismos.

2. ***OPERACIONES CON LÍMITES***

Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones convergentes en x_0, es decir, que tienen límite cuando x tiende a x_0, y valen: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L$ y $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = M$, entones se cumple que:

a) $\lim\limits_{x\to x_0}(f \pm g)(x) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) + \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = L + M$

Ejemplo 2: $\lim\limits_{x\to 2}\left(\ln(x) - x^2\right) = \ln(2) - 4$

b) $\lim\limits_{x\to x_0}(f \cdot g)(x) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = L \cdot M$

Ejemplo 3: $\lim\limits_{x\to \pi}\left(x \cdot \cos(x)\right) = \pi \cdot \cos(\pi) = -\pi$

c) $\lim\limits_{x\to x_0}\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)} = \dfrac{L}{M}$

Ejemplo4: $\lim\limits_{x\to -2}\left(\dfrac{x}{x^3 - 2}\right) = \dfrac{-2}{(-2)^3 - 2} = \dfrac{1}{5}$

d) $\lim\limits_{x\to x_0} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{f(x_0)}$

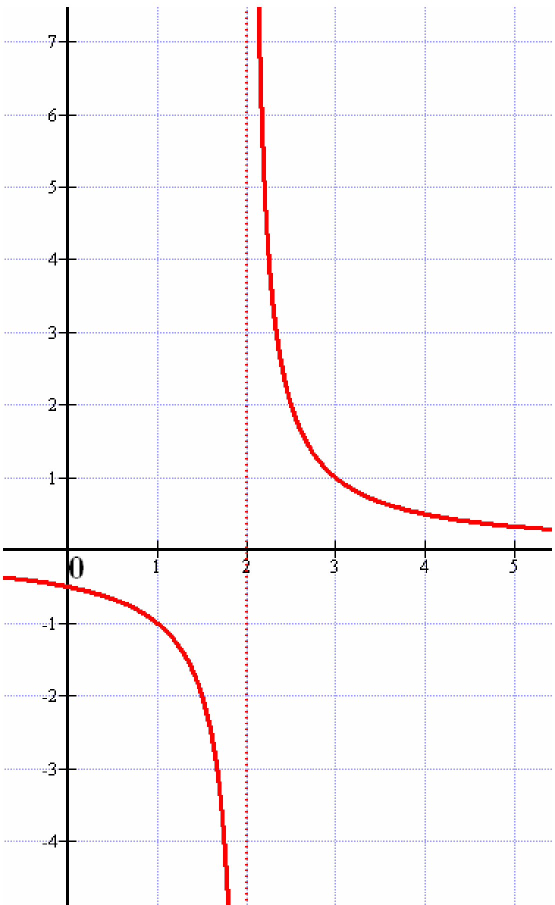
Ejemplo 5: $\lim\limits_{x\to 5} \sqrt[3]{x^2 + 2} = 3$

e) $\lim\limits_{x\to x_0} \left(f(x)\right)^{g(x)} = \left(f(x_0)\right)^{g(x_0)}$

Ejemplo 6: $\lim\limits_{x\to 11} (x+1)^{\log(x-1)} = (11)^{\log(10)} = 11$

VER: Ejercicios resueltos del libro página 252

3. ***LÍMITES INFINITOS CUANDO “x” TIENDE A UN Nº REAL***



Supongamos una función cuya gráfica es como sigue:

Tenemos que al acercarnos a 2 por la izquierda la función va a $-\infty$, o sea, $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = -\infty$

Tenemos que al acercarnos a 2 por la derecha la función va a $+\infty$, o sea, $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = +\infty$

Aquí los límites laterales no coinciden, uno va a $-\infty$ y el otro va a $+\infty$. En estos casos diremos que el límite global (acercándonos por los dos lados) es:

$\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \infty$ No le ponemos signo al infinito

Estos límites son de la forma $\frac{k}{0}$, que dan un infinito, y tenemos que estudiar si sale un cero negativo o positivo para conocer el signo del infinito o si no lleva.

Ejemplo 7: Calcular:

a) $\lim\limits_{x\to 5}\frac{-3}{(x-5)^2}$ Si sustituimos nos queda $\frac{-3}{0^2}=\frac{-3}{0^+}=-\infty$ puesto que el 0 al estar al cuadrado da igual que sea 0^+ ó 0^-, pues siempre saldrá 0^+. No hemos tenido que utilizar los límites laterales.

Por tanto, concluimos que $\lim\limits_{x\to 5}\frac{-3}{(x-5)^2}=-\infty$

b) $\lim\limits_{x\to -2}\frac{1-x}{x^2+2x}$ Si sustituimos nos queda $\frac{3}{0}$, que dará un infinito. Estudiemos los límites laterales para conocer su signo

$$\lim_{x\to -2^-}\frac{1-x}{x^2+2x}=\lim_{x\to -2^-}\frac{1-x}{x\cdot(x+2)}=\frac{3}{(-2)\cdot 0^-}=\frac{3}{0^+}=+\infty$$

$$\lim_{x\to -2^+}\frac{1-x}{x^2+2x}=\lim_{x\to -2^+}\frac{1-x}{x\cdot(x+2)}=\frac{3}{(-2)\cdot 0^+}=\frac{3}{0^-}=-\infty$$

Por tanto concluimos que, $\lim\limits_{x\to -2}\frac{1-x}{x^2+2x}=\infty$

c) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{2}{x^2-2x-3}$ Si sustituimos nos queda $\frac{2}{0}$, que dará un infinito. Estudiemos los límites laterales para conocer su signo. Para ello hemos de descomponer en factores el polinomio denominador:

$x^2-2x-3=0 \rightarrow x=\begin{cases}3\\-1\end{cases} \rightarrow x^2-2x-3=(x-3)\cdot(x+1)$

Hacemos los laterales:

LATERAL IZQUIERDO $\lim\limits_{x\to 3^-}\frac{2}{x^2-2x-3}=\lim\limits_{x\to 3^-}\frac{2}{(x-3)\cdot(x+1)}=\frac{2}{0^-\cdot 1}=\frac{2}{0^-}=-\infty$

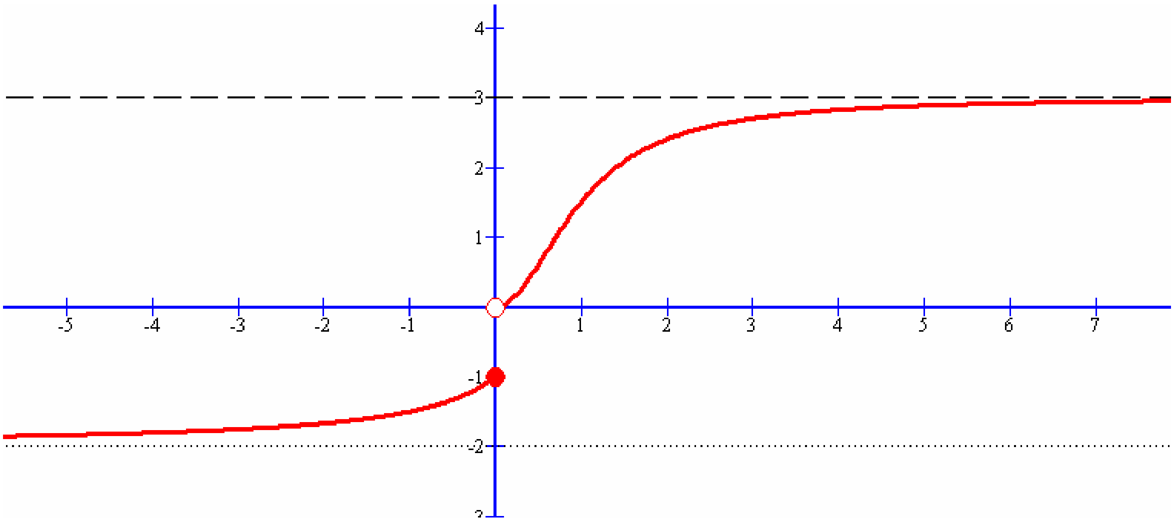
LATERAL DERECHO $\lim\limits_{x\to 3^+}\frac{2}{x^2-2x-3}=\lim\limits_{x\to 3^+}\frac{2}{(x-3)\cdot(x+1)}=\frac{2}{0^+\cdot 1}=\frac{2}{0^+}=+\infty$

Y por tanto concluimos que, $\lim\limits_{x\to 3}\frac{2}{x^2-2x-3}=\infty$

4. LÍMITES FINITOS EN EL INFINITO

Se trata de límites donde la variable independiente "x" tiende a $+\infty$ ó a $-\infty$, y la función tiende a un nº finito.

Veamos con un ejemplo gráfico a que nos referimos. Sea la gráfica siguiente:



Tenemos que:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 3$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -2$

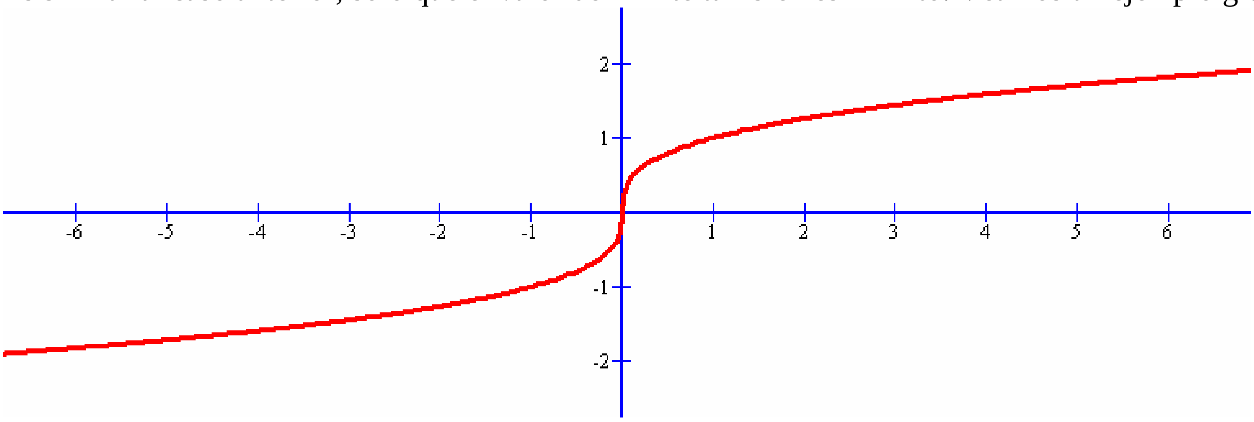
Y por recordar un poco del punto 9 (límites laterales), ¿qué pasa en $x_0 = 0$? Calculamos los laterales y tenemos que $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 0$ y $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -1$, que como son distintos nos indican que no existe el límite global en $x_0 = 0$, es decir, $\neg\exists \lim\limits_{x \to 0} f(x)$ (NOTA : $\neg\exists$ significa *no existe*)

Ejemplos de este tipo veremos más adelante.

<u>VER</u>: Ejercicios resueltos del libro página 254

5. *<u>LÍMITES INFINITOS EN EL INFINITO</u>*

Es similar al caso anterior, sólo que el valor del límite también es infinito. Veamos un ejemplo gráfico:



Tenemos que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ y que $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

<u>Ejemplo 8</u>: Calcula:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(x^2 + 1\right) = +\infty$. Veamos por qué.

Si la $x \to +\infty$ es que se hace todo lo "grande" que queramos, y así $(x^2 + 1)$ también se hace todo lo "grande" que quiera.

De otra forma, podemos sustituir x por $+\infty$ y nos resulta $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(x^2 + 1\right) = (+\infty)^2 + 1 = +\infty$. Es más, el 1 es despreciable en comparación con el $+\infty$.

Otra manera (un poco cutre), es usando la calculadora y sustituir x por un nº elevado, por ejemplo 10.000 y ver que su resultado es también muy elevado, en este caso, (100.000.000+1)=100.000.001. Este método nos puede ayudar, pero puede llevar a errores.

b) $\lim_{x\to-\infty}\left(2x^3\right)=2\cdot(-\infty)^3=2\cdot(-\infty)=-\infty$

6. TABLAS OPERACIONES BÁSICAS CON INFINITOS

Sea L un nº real

SUMAS Y RESTAS			
$L+(\pm\infty)=\pm\infty$	$L-(\pm\infty)=\mp\infty$	$(+\infty)+(+\infty)=+\infty$	$(+\infty)+(-\infty)$ No se sabe, es una indeterminación
$(+\infty)-(+\infty)$ No se sabe, es una indeterminación	$(+\infty)-(-\infty)=+\infty$	$(-\infty)+(-\infty)=-\infty$	$(-\infty)+(+\infty)$ No se sabe, es una indeterminación
$(-\infty)-(-\infty)$ No se sabe, es una indeterminación	$(-\infty)-(+\infty)=-\infty$		

PRODUCTOS Y COCIENTES			
$L\cdot(+\infty)=\begin{cases}+\infty & si \quad L>0\\ -\infty & si \quad L<0\end{cases}$	$L\cdot(-\infty)=\begin{cases}-\infty & si \quad L>0\\ +\infty & si \quad L<0\end{cases}$	$0\cdot(\pm\infty)$ No se sabe, es una indeterminación	$(+\infty)\cdot(\pm\infty)=\pm\infty$
$(-\infty)\cdot(\pm\infty)=\mp\infty$	$\frac{L}{+\infty}=0$	$\frac{L}{-\infty}=0$	$\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ No se sabe, es una indeterminación
$\frac{L}{0^+}=\begin{cases}+\infty & si \quad L>0\\ -\infty & si \quad L<0\end{cases}$	$\frac{L}{0^-}=\begin{cases}-\infty & si \quad L>0\\ +\infty & si \quad L<0\end{cases}$	$\frac{L}{0}=\infty$	$\frac{0}{0}$ No se sabe, es una indeterminación

POTENCIALES Y EXPONENCIALES		
$(+\infty)^L=\begin{cases}+\infty & si \quad L>0\\ 0 & si \quad L<0\end{cases}$	$(-\infty)^L=\begin{cases}\pm\infty & si \quad L>0 \text{ (dependiendo de la paridad de L)}\\ 0 & si \quad L<0\end{cases}$	$(\pm\infty)^0$ No se sabe, es una indeterminación
$L^{+\infty}=\begin{cases}+\infty & si \quad L>1\\ 0 & si \quad 0\le L<1\end{cases}$	$L^{-\infty}=\frac{1}{L^{+\infty}}=\begin{cases}0 & si \quad L>1\\ +\infty & si \quad 0\le L<1\end{cases}$	$1^{\pm\infty}$ No se sabe, es una indeterminación

Ejemplo 9: Calcular:

a) $\lim_{x\to-\infty}\left(5-2x^3\right)=5-2\cdot(-\infty)^3$ (el 5 es despreciable en una suma o resta con ∞) $=-2\cdot(-\infty)=+\infty$

b) $\lim_{x\to+\infty}\left(x^2+\ln(x)\right)=(+\infty)^2+(+\infty)=(+\infty)+(+\infty)=+\infty$

c) $\lim_{x\to0^+}\left(5-2x^3\right)\cdot\ln x=(5-2\cdot0^3)\cdot(-\infty)=5\cdot(-\infty)=-\infty$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{-7}{-x^3} = \frac{-7}{-(-\infty)^3} = \frac{-7}{-(-\infty)} = \frac{-7}{+\infty} = 0$

e) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(3-x^3\right)^2 = \left(-(-\infty)^3\right)^2 = (+\infty)^2 = +\infty$

f) $\lim\limits_{x\to+\infty} 2^{-5x} = 2^{-\infty} = \frac{1}{2^{+\infty}} = \frac{1}{+\infty} = 0$

7. RESOLUCIÓN DE INDETERMINACIONES

En el cálculo de límites hay una serie de situaciones que se llaman indeterminaciones y que se han de resolver de una manera un poco más complicada, pues el valor del límite no se puede conocer de manera inmediata. Es fundamental hacer ejercicios en abundancia para aprender los métodos.

Las indeterminaciones son:

$\frac{\infty}{\infty}$	$\frac{0}{0}$	$0\cdot\infty$	$\infty-\infty$	0^0	∞^0	1^∞

En el libro también aparece como indeterminación $\frac{k}{0}$, pero nosotros no la tratamos como tal, y además ya ha sido estudiada con ejemplos y normalmente habrá que hacer límites laterales..

Indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$

Normalmente se resuelven tomando el término o términos dominantes del numerador y del denominador. Los términos dominantes son los de mayor exponente o grado. Veamos ejemplos.

Ejemplo 10.- Calcular

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{-3x^3+2x-3}{x^2-1} =$ (tomamos el término de grado 3 en el numerador y el de grado 2 en el denominador, que son los dominantes) = $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{-3x^3}{x^2} =$ (simplificamos)= $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{-3x}{1} = -\infty$

NOTA: Si el numerador tiene mayor grado que el denominador el límite es infinito y el signo habrá que estudiarlo

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{7x^4+2x-3}{3x^4+8} =$ (tomamos los dominantes) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{7x^4}{3x^4} = \frac{7}{3}$

NOTA: Si el numerador tiene igual grado que el denominador el límite es finito y es el cociente de los coeficientes

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{3x^2-2x+1}{\sqrt[3]{x^7-x}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{3x^2}{\sqrt[3]{x^7}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{3x^2}{x^{7/3}} =$ (operamos) $\lim\limits_{x\to+\infty} 3\cdot x^{2-\frac{7}{3}} = \lim\limits_{x\to+\infty} 3\cdot x^{-\frac{1}{3}} =$ (como tiene exponente negativo, lo llevamos al denominador) = $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{3}{x^{1/3}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{3}{\sqrt[3]{x}} \frac{3}{+\infty} = 0$

NOTA: Si el numerador tiene menor grado que el denominador el límite es 0

Ejemplo 11.- Calcular $\underset{t\to+\infty}{lím}\dfrac{2t^2-t^3}{4t^3-\sqrt{t^6+t}}$ =(tomamos los dominantes)

$$\underset{t\to+\infty}{lím}\frac{-t^3}{4t^3-\sqrt{t^6}}=\underset{t\to+\infty}{lím}\frac{-t^3}{4t^3-t^3}=\underset{t\to+\infty}{lím}\frac{-t^3}{3t^3}=\frac{-1}{3}$$

Ejemplo 12: Calcular $\underset{x\to+\infty}{lím}\dfrac{\sqrt{x^3-x-1}}{\sqrt[3]{8x^4+2}}$ = (tomamos los de mayor grado, dominantes) $\underset{x\to+\infty}{lím}\dfrac{\sqrt{x^3}}{\sqrt[3]{8x^4}}=$

$$\underset{x\to+\infty}{lím}\frac{x^{3/2}}{\sqrt[3]{8}\cdot x^{4/3}}=\underset{x\to+\infty}{lím}\frac{x^{\frac{3}{2}-\frac{4}{3}}}{2}=\underset{x\to+\infty}{lím}\frac{x^{\frac{1}{6}}}{2}=\underset{x\to+\infty}{lím}\frac{\sqrt[6]{x}}{2}=+\infty$$

VER: Libro de texto página 258, ejemplos

Indeterminación $\dfrac{0}{0}$

Lo habitual en este tipo de indeterminaciones es descomponer numerador y denominador en factores (sacando factor común, por Ruffini, etc.) para poder simplificar el factor que vale 0 en el límite.
Otras veces si aparecen funciones irracionales (con raíces cuadradas) se multiplica por el conjugado
Veamos ejemplos:

Ejemplo 13.- Calcular $\underset{x\to2}{lím}\dfrac{x^3-x-6}{x^2-4}$ = (al sustituir x por 2 resulta $\dfrac{0}{0}$, aplicamos Ruffini al numerador con el 2 y en el denominador o Ruffini o nos damos cuenta que es una diferencia de cuadrados)=

$\underset{x\to2}{lím}\dfrac{(x-2)(x^2+2x+3)}{(x-2)(x+2)}=\underset{x\to2}{lím}\dfrac{(x^2+2x+3)}{(x+2)}$ =(ahora sólo queda sustituir) $\dfrac{11}{4}$

Ejemplo 14.- Calcular $\underset{x\to1}{lím}\dfrac{x^2-x}{1-\sqrt{x}}$ = (al sustituir x por 1 resulta $\dfrac{0}{0}$, multiplicamos y dividimos por el conjugado del denominador)= $\underset{x\to1}{lím}\dfrac{(x^2-x)}{(1-\sqrt{x})}\cdot\dfrac{(1+\sqrt{x})}{(1+\sqrt{x})}=\underset{x\to1}{lím}\dfrac{(x^2-x)\cdot(1+\sqrt{x})}{1^2-(\sqrt{x})^2}$ = (sacamos factor común en el primer factor del numerador) = $\underset{x\to1}{lím}\dfrac{x(x-1)\cdot(1+\sqrt{x})}{1-x}$ = (nos damos cuenta que 1-x = -(x-1) para poder simplificar) =

$\underset{x\to1}{lím}\dfrac{x(x-1)\cdot(1+\sqrt{x})}{-(x-1)}$ = (simplificamos y sustituimos) = $\underset{x\to1}{lím}\dfrac{x\cdot(1+\sqrt{x})}{-1}=\dfrac{1\cdot(1+1)}{-1}=-2$

Ejemplo 15.- Calcular $\underset{x\to3}{lím}\dfrac{\sqrt{x+6}-3}{x^2-9}$ = (al sustituir nos queda $\dfrac{0}{0}$, multiplicamos y dividimos por el conjugado del numerador) = $\underset{x\to3}{lím}\dfrac{\sqrt{x+6}-3}{x^2-9}\cdot\dfrac{\sqrt{x+6}+3}{\sqrt{x+6}+3}=\underset{x\to3}{lím}\dfrac{(\sqrt{x+6})^2-3^2}{(x^2-9)\cdot(\sqrt{x+6}+3)}=\underset{x\to3}{lím}\dfrac{x+6-9}{(x^2-9)\cdot(\sqrt{x+6}+3)}=$

(descomponemos el factor del denominador al ser una diferencia de cuadrados) $\underset{x\to3}{lím}\dfrac{x-3}{(x-3)\cdot(x+3)\cdot(\sqrt{x+6}+3)}$

$$=\underset{x\to3}{lím}\frac{1}{(x+3)\cdot(\sqrt{x+6}+3)}=\boxed{\frac{1}{36}}$$

VER: Libro de texto página 258, ejemplos

Indeterminación $0\cdot\infty$

Estas indeterminaciones se transforman en las del tipo $\frac{0}{0}$ ó $\frac{\infty}{\infty}$

Ejemplo 16.- Calcular $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{-2}{\sqrt{x^6-2}}\cdot(5x+9) =$ (tenemos $\frac{-2}{+\infty}\cdot(-\infty) = 0\cdot(-\infty)$, que es una indeterminación) = $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{-10x-18}{\sqrt{x^6-2}} =$ (con sólo hacer la multiplicación se convierte en $\frac{+\infty}{+\infty}$)= $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{-10x}{\sqrt{x^6}} =$ (tomando términos dominantes y operando) = $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{-10x}{x^3} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{-10}{x^2} = \frac{-10}{+\infty} = 0$

VER: Libro de texto página 258, ejemplos

Indeterminación $\infty-\infty$

¡Ojo! Hay algunos infinitos – infinitos que no son indeterminaciones, como:

$(+\infty)-(-\infty)=+\infty$ $\qquad\qquad$ $(-\infty)-(+\infty)=-\infty$

Suelen aparecer en límites de funciones racionales o irracionales. La forma de resolverlos es multiplicando numerador y denominador por el conjugado y operando convenientemente.

Ejemplo 17.- Calcular $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt{x^2+x}\right)$ = (tenemos indeterminación $(+\infty)-(+\infty)$, multiplicamos por el conjugado) = $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt{x^2+x}\right)\frac{\left(x+\sqrt{x^2+x}\right)}{\left(x+\sqrt{x^2+x}\right)}$ = $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2-\left(\sqrt{x^2+x}\right)^2}{x+\sqrt{x^2+x}}$ = $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-x}{x+\sqrt{x^2+x}}$ = (ahora es una indeterminación $\frac{-\infty}{+\infty}$, y tomamos términos dominantes) = $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-x}{x+\sqrt{x^2}}$ = $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-x}{2x}$ = $\boxed{\frac{-1}{2}}$

Ejemplo 18.- Calcular $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\sqrt{x^2+3}-(x-3)\right]$= (sale indeterminación $(+\infty)-(+\infty)$, usamos el conjugado) =

$\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+3}-(x-3))\cdot\frac{(\sqrt{x^2+3}+(x-3))}{(\sqrt{x^2+3}+(x-3))} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{x^2+3})^2-(x-3)^2}{\sqrt{x^2+3}+(x-3)} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2+3-(x^2-6x+9)}{\sqrt{x^2+3}+(x-3)} =$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{6x-6}{\sqrt{x^2+3}+(x-3)}$ = (ahora es una indeterminación $\frac{+\infty}{+\infty}$, y tomamos términos dominantes) = $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{6x}{\sqrt{x^2}+x}$

= $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{6x}{2x} = 3$

VER: Libro de texto página 259, ejemplos

Indeterminación 1^∞

Son llamadas de tipo e, pues al resolverlas aparece el nº e =2’71828...

Si tenemos que: $\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=1\\ \lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\pm\infty\end{array}$, entonces aplicamos que $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x))^{g(x)}=e^{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)[f(x)-1]}$

Ejemplo 19.- Calcular $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{x^2+x}{x^2-x}\right]^{5x}$ = (vemos que la base $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{x^2+x}{x^2-x}\right]=1$ tiene por límite 1 al tomar términos dominantes y el exponente $+\infty$, luego es indeterminación de tipo $1^{+\infty}$. Aplicamos la fórmula dada) = $e^{\lim\limits_{x\to+\infty} 5x\cdot\left[\frac{x^2+x}{x^2-x}-1\right]}$ = (hacemos la operación del corchete) = $e^{\lim\limits_{x\to+\infty} 5x\cdot\left[\frac{x^2+x-x^2+x}{x^2-x}\right]}$ = $e^{\lim\limits_{x\to+\infty} 5x\cdot\left[\frac{2x}{x^2-x}\right]}$ = $e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{10x^2}{x^2-x}}$ = e^{10}

Ejemplo 20.- Calcular $\lim\limits_{x\to-1}(\sqrt{2+x})^{\frac{x}{x+1}}$. Vemos que al sustituir sale $1^{-1/0}=1^{\infty}$. Luego es de tipo e pero en lugar de aplicar la fórmula directamente, como la base es una raíz la ponemos con exponente fraccionario para operar más fácilmente.

$\lim\limits_{x\to-1}(\sqrt{2+x})^{\frac{x}{x+1}}=\lim\limits_{x\to-1}\left[(2+x)^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{x}{x+1}}=\lim\limits_{x\to-1}[2+x]^{\frac{x}{2\cdot(x+1)}}$ = (ahora aplicamos la fórmula) =

$e^{\lim\limits_{x\to-1}\left[\frac{x}{2(x+1)}\right]\cdot(2+x-1)}$ = $e^{\lim\limits_{x\to-1}\frac{x\cdot(x+1)}{2\cdot(x+1)}}$ = (fijaos que no he hecho los productos pues queda ahora indeterminación $\dfrac{0}{0}$, y podemos simplificar. Si hubiera multiplicado, ahora tendría que descomponer) =

$e^{\lim\limits_{x\to-1}\frac{x}{2}}=e^{\frac{-1}{2}}$ =(si queremos podemos ponerlo en forma radical y racionalizar) = $\dfrac{1}{\sqrt{e}}=\dfrac{\sqrt{e}}{e}$

VER: Libro de texto página 259, ejemplos

8. ***CONTINUIDAD***

En la Pág. 260 del libro explica muy detalladamente el concepto de continuidad en un punto con ejemplos gráficos. Aquí sólo ponemos la definición matemática que aparece también al final de dicha página.

Definición.- Una función f es continua en un punto de abscisa x_0 si y sólo si cumple las tres condiciones siguientes:

a) Existe el límite de f cuando x tiende a x_0 (recuerdo que a veces aquí tendremos que calcular los límites laterales en x_0, pues la función puede venir definida de forma diferente por la izquierda de cómo está definida por la derecha). Matemáticamente, $\exists \lim_{x \to x_0} f(x)$ (o si hay que hacer los laterales , éstos existen y son iguales)

b) La función esta definida en x_0 (o sea, $x_0 \in Dom(f)$). Matemáticamente, $\exists f(x_0)$

c) Los dos valores anteriores coinciden, es decir, $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

NOTA: Todas las funciones más normales (polinómicas, racionales, irracionales, logarítmicas, exponenciales, trigonométricas) son continuas en todo los puntos de su dominio. Si el punto es un extremo del dominio se podrá decir que es continua por la derecha o por la izquierda según sea el caso)

Veamos mediante ejemplos cómo se estudia la continuidad.

Ejemplo 21.- Sea la función $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & si \quad x \le 2 \\ x - 4 & si \quad x > 2 \end{cases}$ Vamos a estudiar la continuidad en $x_0 = 2$

Vemos primero que a la izquierda del 2 (nº menores que 2) la función viene definida de una forma diferente (polinomio cuadrático) a como está definida por la derecha (nº mayores que 2), que es una afín.
Vamos dicho esto con los apartados:

a) Por lo dicho anteriormente, hemos de calcular los límites laterales, pues el global no lo podemos hacer directamente.

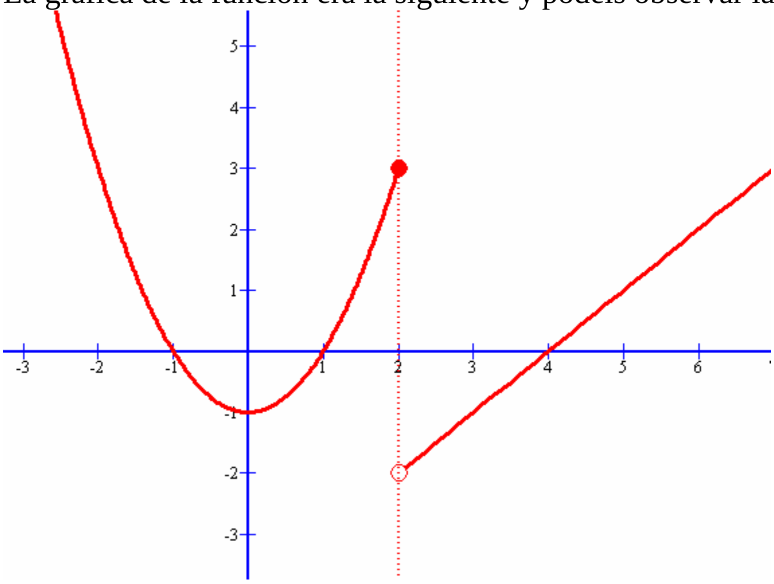
$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} (x^2 - 1) = 3$$
$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} (x - 4) = -2$$

Como vemos no coinciden, por tanto concluimos que no existe $\lim_{x \to 2} f(x)$, por tanto la función no puede ser continua. Diremos en este caso que *la función en $x_0 = 2$ presenta una discontinuidad de salto finito y amplitud 5* (el 5 se obtiene de restar los límites laterales y calcularle el valor absoluto). Con la gráfica lo veréis mejor

b) La función esta definida en $x_0 = 2$, pues $\exists f(2) = 2^2 - 1 = 3$, aunque esto ya no es necesario, pues por el apartado a) sabemos que es discontinua

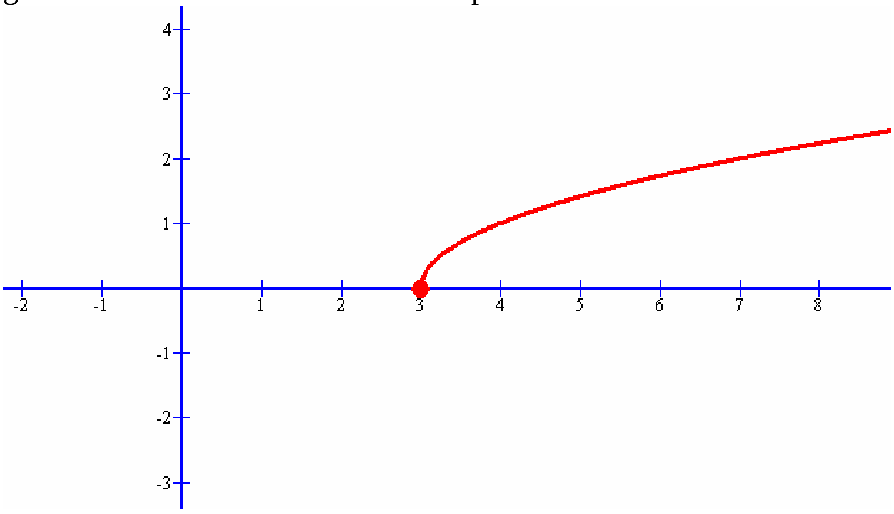
c) Este apartado no es necesario ya

La gráfica de la función era la siguiente y podéis observar la discontinuidad



Ejemplo 22.- Sea ahora la función $f(x)=\sqrt{x-3}$. Lo primero es ver su dominio, que sale $Dom(f)=[3,+\infty)$

¿Qué pasa en $x_0=3$? En este caso sólo se puede calcular el límite lateral derecho pues por la izquierda del 3 la función no esta definida. Aquí diremos que la función es *continua por la derecha* en $x_0=3$, como se ve en la gráfica. Además en todos los demás puntos del dominio la función es continua.



Ejemplo 23.- Estudiar la continuidad de la función siguiente:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{4x^2-.9}{2x+3} & si \quad x\neq-\dfrac{3}{2}\\ -6 & si \quad x=-\dfrac{3}{2}\end{cases}$$

SOLUCIÓN:

Si $x\neq-\dfrac{3}{2}$, vemos que la función viene dada por una expresión racional y no se anula el denominador (sólo de anula en $x=-\dfrac{3}{2}$, y éste no lo estamos considerando aún), luego podemos afirmar que f es continua en los puntos tales que $x\neq-\dfrac{3}{2}$ (o lo que es lo mismo en $\Re-\left\{-\dfrac{3}{2}\right\}$)

Si $x=-\dfrac{3}{2}$. En este caso veamos si cumple o no las condiciones de continuidad:

a) Calculamos ahora el límite (no hacen falta calcular los laterales, pues por la izquierda y la derecha la función viene definida igual)

$$\lim_{x\to-\frac{3}{2}}\frac{4x^2-9}{2x+3}=\lim_{x\to-\frac{3}{2}}\frac{(2x+3)\cdot(2x-3))}{2x+3}=\lim_{x\to-\frac{3}{2}}(2x-3)=-6$$

Indeterminación $\dfrac{0}{0}$. Descomponemos en factores el numerador

b) $\exists f(-\dfrac{3}{2})=-6$

Como vemos $f(-\frac{3}{2}) = \lim_{x\to -\frac{3}{2}} \frac{4x^2-9}{2x+3} = -6$, luego también es continua en $x = -\frac{3}{2}$

<u>Ejemplo 24</u>.- Calcular los valores que deben tomar m y n para que la siguiente función sea continua en $\Re$

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & si \quad 1 < x < 3 \\ x^2 + mx + n & si \quad x \le 1 \quad \vee \quad x \ge 3 \end{cases}$$ (NOTA: $\vee$ significa la disyunción ó)

SOLUCIÓN:

Si $x < 1$, la función viene dada por $f(x) = x^2 + mx + n$, que al ser un polinomio de 2º grado, sabemos que es continua.
Si $1 < x < 3$, la función viene dada por $f(x) = x + 1$, que igualmente es continua al ser un polinomio de primer grado.
Si $x > 3$, la función viene dada por $f(x) = x^2 + mx + n$, que al ser un polinomio de 2º grado, sabemos que es continua.
Ninguna de las anteriores conclusiones nos ha aportado nada para calcular m y n. Veamos que ocurre en $x = 1$ y $x = 3$.

En $x = 1$, impongamos la condición de continuidad $f(1) = \lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x)$

$$f(1) = 1^2 + m\cdot 1 + n = 1 + m + n$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} x^2 + mx + n = 1 + m + n$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} x + 1 = 2$$

Igualando , obtenemos una primera ecuación: $1 + m + n = 2$

En $x = 3$, imponemos las condiciones de continuidad:

$$f(3) = 3^2 + m\cdot 3 + n = 9 + 3\cdot m + n$$

$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^-} x + 1 = 4$$

$$\lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^+} x^2 + mx + n = 9 + 3\cdot m + n$$

Igualando, obtenemos una segunda ecuación: $9 + 3\cdot m + n = 4$

Tenemos entonces un sistema de dos ecuaciones lineal con dos incógnitas, que resolvemos:

$\begin{cases} 1 + m + n = 2 \\ 9 + 3m + n = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m + n = 1 \\ 3m + n = -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -m - n = -1 \\ 3m + n = -5 \end{cases}$ Sumamos las ecuaciones y tenemos:

$2m = -6 \Rightarrow$ $\boxed{m = -3}$
.

Sustituimos en $m+n=1$ ➔ $-3+n=1$ ➔ $\boxed{n=4}$

<u>Ejemplo 25</u>.- Estudiar la continuidad de la función $f(x)=\begin{cases} -2x^2+x+3 & si \quad x<1 \\ 2x-1 & si \quad 1\le x<3 \\ \ln x & si \quad x>3 \end{cases}$

SOLUCIÓN:

Lo primero que observamos es que $Dom(f)=R-\{3\}$

- Si $x<1$, f es continua por ser polinómica (es una función cuadrática)
- Si $1<x<3$, f es continua por ser polinómica (es una función afín)
- Si $x>3$, f es continua por ser una función logarítmica y su argumento (la x) ser positivo

Veamos ahora que ocurre en los puntos donde la función cambia de definición:

- En $x=1$
  - $\exists f(1)=1$
  - $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}(-2x^2+x+3)=2$
  - $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(2x-1)=1$

  Como vemos presenta una discontinuidad de salto finito y amplitud 1
- En $x=3$
  - No existe $f(3)$, pues no es del dominio. Ya sabemos que no es continua, pero veamos si es evitable.
  - $\lim\limits_{x\to 3^{+-}} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^{+-}} \ln x=\ln 3$
  - $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^+}(2x-1)=5$

  Vemos que presenta discontinuidad no evitable de salto finito y amplitud $(5-\ln 3)$

<u>Ejemplo 26</u>.- Estudiar la continuidad de la función $f(x)=\begin{cases} x^2+4x+3 & si \quad -5\le x<-1 \\ 2 & si \quad x=-1 \\ -2x^2+2 & si \quad -1<x<1 \\ 2 & si \quad x=1 \\ x^2-4x+3 & si \quad 1<x\le 5 \end{cases}$ en los puntos $x=-1$ y $x=1$

SOLUCIÓN:

- En $x=-1$
  - $\exists f(-1)=2$
  - $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^-}(x^2+4x+3)=0$
  - $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^{+-}}(-2x^2+2)=0$

  Presenta una discontinuidad evitable, pues bastaría redefinir $f(-1)=0$ y ya la función sería continua
- En $x=1$, es análogo