Análisis Matemático I EXAMEN FINAL

CUESTIONARIO DE RESPUESTA MÚLTIPLE (50%)
(Cada respuesta errónea resta 0,2 puntos)

- La continuidad, en el punto x = 0, de la función dada por

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2^x-1}{px} & \text{si } x<0\\[2mm] \dfrac{\cos x}{x^2+1} & \text{si } x\geq 0\end{cases}$$

se consigue cuando:
 a) $p = 1$
 b) $p = \ln 2$
 c) Ninguna de las anteriores.

- Los infinitésimos, en x = 1, $f(x) = px\ln x$ y $g(x) = x - e^{1-x}$ son equivalentes.
 a) Si $p \neq 0$
 b) Si p = 2
 c) Ninguna de las anteriores.

- La función $f(x)=\dfrac{senx}{2-\cos x}$ tiene en el intervalo [1, 3]:
 a) Un máximo
 b) Un mínimo.
 c) Un punto de inflexión.

- La ecuación de la recta tangente a $f(x) = x\sqrt{4-x^2}$ en el punto (0, *f*(0)) es:
 a) y = x – 1
 b) y = –2x
 c) Ninguna de las anteriores, su ecuación es: __________

- La función $f(x) = x^3 + x^2 + x - 1$ corta al eje OX:
 a) Una sola vez.
 b) Exactamente dos veces.
 c) Ninguna de las anteriores.

- La función $f(x) = 6x^5 - 15x^4 + 10x^3$ tiene:
 a) Un máximo y un mínimo.
 b) Dos puntos de inflexión.
 c) Ninguna de las anteriores.

- La función $f(x)=\begin{cases}\ln(1+x^2), & x>0\\ x^2, & x\leq 0\end{cases}$, en el punto x = 0, es:
 a) Continua pero no derivable.
 b) Ni continua ni derivable.
 c) Continua y derivable.

- La integral $\displaystyle\int_0^3 \frac{1}{(x-1)^3}\,dx$:
 a) Converge a 3/8
 b) Converge a –1/6.
 c) Ninguna de las anteriores.

- El área del recinto plano encerrado entre la curvas de ecuación $y=\dfrac{x^2}{4}-x$, y el eje OX, vale:
 a) 2/5
 b) 8/3
 c) Ninguna de las anteriores, el área vale ______

- La función $f(x) = x^4 e^{-x}$ verifica:
 a) Siempre es decreciente.
 b) Tiene un máximo y un mínimo.
 c) Tiene una asíntota vertical

PROBLEMAS:

1. Se considera la curva definida por la función $y = \frac{x^3}{x^2+1}$. Se pide:

   a) Dominio de definición, cortes con los ejes y simetrías. (0,5 puntos)
   b) Asíntotas. (0,5 puntos)
   c) Intervalos de crecimiento de la función. ¿Tiene extremos la función? (0,5 puntos)
   d) Representación aproximada de la curva. (0,5 puntos)

2. a) Halla el polinomio de Taylor de grado 3, en el punto x = 1, para la función $f(x) = e^{1-x^2}$ (0,8 puntos)
b) Utilizando el polinomio hallado calcula el valor aproximado de $f(1{,}1)$. (0,2 puntos)

3. Calcula las siguientes integrales:

a) $\int \frac{x}{\sqrt{5x^2-4}}dx$ (0,3 puntos) b) $\int_0^2 (5-x^2-(x-1)^3)dx$ (0,3 puntos)

c) $\int x^7 e^{x^4}\,dx$ (0,7 puntos) d) $\int \frac{1}{x^2+x}dx$ (0,7 puntos)

1. La continuidad, en el punto x = 0, de la función dada por

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2^x-1}{px} & \text{si } x<0\\[2mm] \dfrac{\cos x}{x^2+1} & \text{si } x\geq 0\end{cases}$$

se consigue cuando:

a) $p = 1$

b) $p = \ln 2$

c) Ninguna de las anteriores.

Solución:

Para que una función sea continua en $x = a$ es necesario que los límites laterales existan y sean iguales.

Por la izquierda:

$$\underset{x\to 0^-}{lím}\ f(x) = \underset{x\to 0^-}{lím}\ \frac{2^x-1}{px} = \left[\frac{0}{0}\right] = \text{(aplicando la regla de L´Hôpital)} =$$

$$= \underset{x\to 0^-}{lím}\ \frac{2^x \ln 2}{p} = \frac{\ln 2}{p}$$

Por la derecha:

$$\underset{x\to 0^+}{lím}\ f(x) = \underset{x\to 0^-}{lím}\ \frac{\cos x}{x^2+1} = \frac{1}{1} = 1$$

Será continua cuando $\frac{\ln 2}{p} = 1 \Rightarrow$ p = ln 2.

2. Los infinitésimos, en x = 1, $f(x) = px\ln x$ y $g(x) = x - e^{1-x}$ son equivalentes.

a) Si $p \neq 0$

b) Si p = 2

c) Ninguna de las anteriores.

Solución:

$$\lim_{x\to 1}\frac{px\ln x}{x-e^{1-x}} = \left[\frac{0}{0}\right] = (L´H) = \lim_{x\to +\infty}\frac{p\ln x + p}{1+e^{1-x}} = \frac{p}{2} = 1 \Rightarrow \text{p = 2}$$

3. La función $f(x) = \dfrac{senx}{2-\cos x}$ tiene en el intervalo [1, 3]:

a) Un máximo

b) Un mínimo.

c) Un punto de inflexión.

Sol.

$$f´(x) = \frac{2\cos x - 1}{(2-\cos x)^2} = 0 \Rightarrow 2\cos x - 1 = 0 \Rightarrow \cos x = 0{,}5 \Rightarrow x = \pi/3$$

$$f''(x)=\frac{2senx(\cos x+1)}{(\cos x-2)^3} \to f''(\pi/3)=\frac{2sen(\pi/3)(\cos(\pi/3)+1)}{(\cos(\pi/3)-2)^3}=\frac{(+)}{(-)}<0 \Rightarrow$$
Máximo

4. La ecuación de la recta tangente a $f(x)=x\sqrt{4-x^2}$ en el punto (0, f(0)) es:

a) y = x – 1
b) y = –2x
c) Ninguna de las anteriores, su ecuación es: y = 2x

Sol

$$y-f(0)=f'(0)(x-0)$$

$$f(x)=x\sqrt{4-x^2} \Rightarrow f'(x)=\sqrt{4-x^2}-\frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}$$

Se tiene: $f(0) = 0$, $f'(0) = 2$.
La recta tangente será: y – 0 = 2(x – 0) $\Rightarrow$ y = 2x

5. La función $f(x)=x^3+x^2+x-1$ corta al eje OX:

a) Una sola vez.
b) Exactamente dos veces.
c) Ninguna de las anteriores.

Sol.
Como $f(0)=-1$ y $f(1)=2$, por el teorema de Bolzano se deduce que la función corta al eje OX en el intervalo (0, 1). Luego la ecuación $x^3+x^2+x-1=0$ tiene una raíz entre 0 y 1.

Como $f'(x)=3x^2+2x+1>0$ para todo x, la función será siempre creciente. En consecuencia, sólo corta una vez al eje OX. Luego la ecuación $x^3+x^2+x-1=0$ sólo tiene una raíz real.

6. La función $f(x)=6x^5-15x^4+10x^3$ tiene:

a) Un máximo y un mínimo.
b) Dos puntos de inflexión.
c) Ninguna de las anteriores.
.

Solución:
Derivadas:

$$f(x)=6x^5-15x^4+10x^3 \Rightarrow f'(x)=30x^4-60x^3+30x^2$$
$$\Rightarrow f''(x)=120x^3-180x^2+60x$$

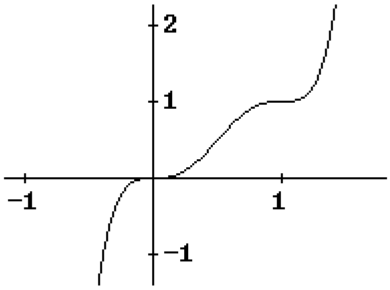
Puntos singulares:

$$f'(x)=30x^4-60x^3+30x^2=30x^2(x^2-2x+1)=30x^2(x-1)^2=0 \Rightarrow$$
$\Rightarrow$ x = 0, x = 1

Como $f''(0)=0$ y $f''(1)=0$, en x = 0 y x = 1 puede haber puntos de inflexión. Para determinarlo hay que estudiar la derivada tercera, que es:

$$f''''(x) = 360x^2 - 360x + 60$$

Como $f''''(0) = 60 \neq 0$ y $f''''(1) = 60 \neq 0$, en x = 0 y en x = 1 se tienen sendos puntos de inflexión (con tangente horizontal). En consecuencia, esta función no tiene máximos ni mínimos.
La función es así:



7. La función $f(x) = \begin{cases} \ln(1+x^2), & x > 0 \\ x^2, & x \leq 0 \end{cases}$, en el punto x = 0, es:

a) Continua pero no derivable.
b) Ni continua ni derivable.
c) Continua y derivable.

Solución:
La función dada está definida siempre. También es continua y derivable en todos los puntos, salvo, quizás, en x = 0.

Estudiamos la continuidad en x = 0.

Si x $\to 0^-$, $f(x) = x^2 \to 0$

Si x $\to 0^+$, $f(x) = \ln(1+x^2) \to 0$

Como ambos límites coinciden, la función es continua en x = 0.

Estudiamos la derivabilidad en x = 0.

Salvo en x = 0, su derivada vale: $f'(x) = \begin{cases} \dfrac{2x}{1+x^2}, & x > 0 \\ 2x, & x < 0 \end{cases}$

Si x $\to 0^-$, $f'(x) = 2x \to 0$

Si x $\to 0^+$, $f(x) = \dfrac{2x}{1+x^2} \to 0$

Como las derivadas laterales coinciden, la función es derivable también en x = 0.

8. La integral $\int_0^3 \frac{1}{(x-1)^3}dx$:

a) Converge a 3/8
b) Converge a –1/6.
c) Ninguna de las anteriores.

Solución:

Es una integral impropia, pues la función tiene una discontinuidad infinita en x = 1.

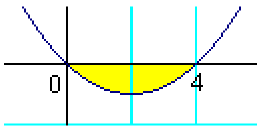
$$\int_0^3 \frac{1}{(x-1)^3}dx = \lim_{t\to 1^-}\int_0^t \frac{1}{(x-1)^3}dx + \lim_{t\to 1^+}\int_t^3 \frac{1}{(x-1)^3dx} =$$

$$= \lim_{t\to 1^-} \left.\frac{-1}{2(x-1)^2}\right|_0^t + \lim_{t\to 1^+} \left.\frac{-1}{2(x-1)^2}\right|_t^3 = \lim_{t\to 1^-}\left(\frac{-1}{2(t-1)^2}+\frac{1}{2}\right) + \lim_{t\to 1^+}\left(\frac{-1}{8}+\frac{1}{2(t-1)^2}\right) \to ¿?$$

9. El área del recinto plano encerrado entre la curva de ecuación $y = \frac{x^2}{4} - x$, y el eje OX, vale:

a) 2/5
b) 8/3
c) Ninguna de las anteriores, el área vale ______

Solución:
El área encerrada curvas es la sombreada.



$$A = -\int_0^4 \left(\frac{x^2}{4} - x\right)dx = \left.\left(-\frac{x^3}{12}+\frac{x^2}{2}\right)\right|_0^4 = -\frac{64}{12} + 8 = \frac{8}{3}$$

10. La función $f(x) = x^4e^{-x}$ verifica:

a) Siempre es decreciente.
b) Tiene un máximo y un mínimo.
c) Tiene una asíntota vertical

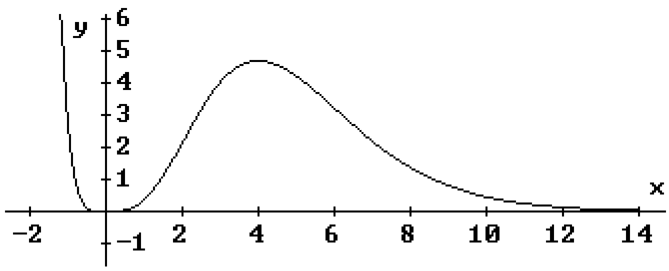
Solución:
Hacemos la derivada:

$$f(x) = x^4e^{-x} \quad \Rightarrow \quad f(x) = 4x^3e^{-x} - x^4e^{-x} = x^3e^{-x}(4-x)$$

La derivada se anula cuando x = 0 y x = 4, por tanto debemos estudiar lo que pasa en los intervalos: x < 0; 0 < x < 4; x > 4.

- si x < 0, $f\,'(x) < 0 \Rightarrow f$ es decreciente;
- si 0 < x < 4, $f\,'(x) > 0 \Rightarrow f$ es creciente;
- si x > 4, $f\,'(x) < 0 \Rightarrow f$ es decreciente;

Como la derivada se anula en x = 0, es decreciente si x < 0 y creciente cuando x > 0, en x = 0 la función tiene un mínimo. De manera análoga concluimos que en x = 4 se da un máximo.
Su gráfica es así:



Problemas

1. Se considera la curva definida por la función: $y = \dfrac{x^3}{x^2+1}$. Se pide:

a) Dominio de definición, cortes con los ejes y simetrías. (0,5 puntos)
b) Asíntotas. (0,5 puntos)
c) Intervalos de crecimiento de la función. ¿Tiene extremos la función? (0,5 puntos)
d) Representación aproximada de la curva. (0,5 puntos)

Solución:
a). La función está definida siempre, pues el denominador no se anula en ningún caso.
Corte ejes:

si x = 0 $\Rightarrow$ y = 0 $\rightarrow$ punto (0, 0)
si y = 0 $\Rightarrow$ x = 0 $\rightarrow$ se obtiene el mismo punto.

La función es simétrica respecto del origen de coordenadas (impar), pues

$$f(-x) = \frac{(-x)^3}{(-x)^2+1} = -\frac{x^3}{x^2+1} = -f(x)$$

b) Tiene una asíntota oblicua ($y = mx + n$), pues:

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{x(x^2+1)} = 1 \quad \text{y}$$

$$n = \lim_{x\to\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^3}{x^2+1} - x \right) = \lim_{x\to\infty} \frac{-x}{x^2+1} = 0$$

La asíntota es la recta y = x.

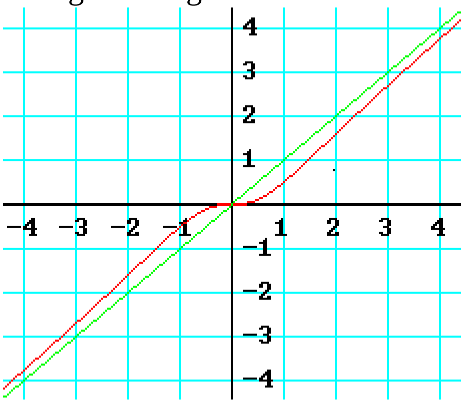
Como $y = \dfrac{x^3}{x^2+1} = \dfrac{x^3+x-x}{x^2+1} = x - \dfrac{x}{x^2+1}$,

cuando x $\rightarrow +\infty$, la curva va por debajo de la asíntota ($-\dfrac{x}{x^2+1}$ resta)

cuando x $\rightarrow -\infty$, la curva va por encima de la asíntota ($-\dfrac{x}{x^2+1}$ suma)

c) Derivamos: $y' = \dfrac{3x^2(x^2+1) - (x^3 \cdot 2x)}{(x^2+1)^2} = \dfrac{x^2(x^2+3)}{(x^2+1)^2}$.

Salvo en x = 0, la derivada siempre es positiva $\Rightarrow$ la función es creciente siempre. En consecuencia no tiene extremos. En x = 0 hay un punto de inflexión con tangente horizontal.
d) Algunos valores de la curva son: (0, 0), (1, ½), (2, 8/5), (3, 27/10), y sus simétricos. Representándolos se obtiene la gráfica siguiente.



2. (1 punto) Halla el polinomio de Taylor de grado 3, en el punto x = 1, para la función $f(x) = e^{1-x^2}$ (0,8 puntos)

Utilizando el polinomio hallado calcula el valor aproximado de $f(1{,}1)$. (0,2 puntos)

Solución:

$f(x) = e^{1-x^2} \Rightarrow f(1) = 1$

$f'(x) = -2xe^{1-x^2} \Rightarrow f'(1) = -2$

$f''(x) = -2e^{1-x^2} + 4x^2e^{1-x^2} = (4x^2 - 2)e^{1-x^2} \Rightarrow f''(1) = 2$

$f'''(x) = (12x - 8x^3)e^{1-x^2} \Rightarrow f'''(1) = 4$

Por tanto, $P(x) = 1 - 2(x-1) + \frac{2}{2}(x-1)^2 + \frac{4}{6}(x-1)^3 \; 1 - 2(x-1) + (x-1)^2 + \frac{2}{3}(x-1)^3$

- $f(1{,}1) \approx P(1{,}1) = 1 - 2\cdot 0{,}1 + 0{,}1^2 + \frac{2}{3}\cdot 0{,}1^3 = 0{,}810666...$

3. Calcula las siguientes integrales:

a) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{5x^2-4}}dx$ b) $\displaystyle\int_0^2 (5 - x^2 - (x-1)^3)dx$

c) $\displaystyle\int x^7 e^{x^4} dx$ d) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+x}dx$

Solución:

a) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{5x^2-4}}dx = \frac{2}{10}\int \frac{10x}{2\sqrt{5x^2-4}}dx = \frac{1}{5}\sqrt{5x^2-4} + c$

b) $\displaystyle\int_0^2 (5 - x^2 - (x-1)^3)dx = \int_0^2 (-x^3 + 2x^2 - 3x + 6)dx =$

$$= \left[-\frac{x^4}{4} + \frac{2x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 6x\right]_0^2 = -4 + \frac{16}{3} - 6 + 12 = \frac{22}{3}$$

c) $\displaystyle\int x^7 e^{x^4} dx$

Por partes:

$u = x^4 \Rightarrow du = 4x^3dx$

$dv = x^3e^{x^4}dx \Rightarrow v = \frac{1}{4}e^{x^4}$

Por tanto:

$$\int x^7 e^{x^4} dx = x^4 \frac{1}{4}e^{x^4} - \int x^3 e^{x^4} dx = x^4 \frac{1}{4}e^{x^4} - \frac{1}{4}e^{x^4} + c$$

d) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+x}dx$

$\dfrac{1}{x^2+x} = \dfrac{A}{x} + \dfrac{B}{x+1} = \dfrac{A(x+1)+Bx}{x(x+1)} \Rightarrow$ 1 = A(x + 1) + Bx $\Rightarrow$ B = –1; A = 1

Por tanto:

$$\int \frac{1}{x^2+x}dx = \int\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right)dx = \ln x - \ln(x+1) + c$$