Análisis Matemático

CUESTIONARIO DE RESPUESTA MÚLTIPLE (50%)
(Cada respuesta correcta vale 0,5 puntos. Si la contestación es incorrecta, resta 0,2 puntos)

- La función $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}x+(bx)^2, & x<0\\ b+\sqrt{x+1}, & 0\le x\end{cases}$ es:

a) Continua y derivable si $b = \pm 1$
b) Derivable sólo si $b = 1$
c) Continua sólo si $b = -1$

- Teniendo en cuenta que $\sqrt{64}=8$, utilizando la diferencial se obtiene que el valor de $\sqrt{65}$ es:

a) 8,0823
b) 8,0625
c) 8,06225

- La función $f(x)=2x^3+px^2-3$ corta al eje de abscisas en el intervalo [–1, 1]:

a) Para todo $p < 5$
b) Para todo $p > 1$
c) Sólo si $1 < p < 5$

- El polinomio de Taylor de grado 3 de la función $f(x)=\sin x+\cos 2x$, en $x = 0$, es:

a) $P(x)=1+x-\frac{3}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3$

b) $P(x)=1+x-2x^2-\frac{1}{6}x^3$

c) $P(x)=1-2x-x^2+\frac{1}{6}x^3$

- El valor que verifica el teorema del valor medio para $f(x)=x^2-ax+3$, en el intervalo (1, 4), es:

a) $\frac{3a}{2}$ b) $\frac{5}{2a}$ c) $\frac{5}{2}$

- El área comprendida entre las dos parábolas $y=x^2$ e $y=-2x^2+3$, vale:

a) $\frac{27}{4}$
b) 4
c) Ninguna de las anteriores, su valor es: _____

- La función $f(x)=\frac{3x^2-ax}{x+2}$ tiene un mínimo relativo en $x = 2$:

a) Cuando $a = 18$
b) Cuando $a = 10$
c) En $x = 2$ no puede tener un mínimo relativo.

- La derivada de $g(x)=\frac{e^{2x+1}}{(x-1)^2}$ en el punto $x=-\frac{1}{2}$ vale:

a) $-\frac{2}{81}$ b) $\frac{24}{7}$ c) $\frac{40}{27}$

- La curva de ecuación $y=3x^2-1$ y la recta $y=4x+b$ son tangentes en el punto $x=\frac{2}{3}$:

a) Para cualquier valor de *b*.
b) Sólo si $b=-\frac{7}{3}$
c) No son tangentes para ningún valor de *b*.

- El valor de $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x}\right)$ es:

a) $\frac{1}{2}$ b) $-\infty$ c) $-\frac{1}{4}$

PROBLEMAS:

1. (2 puntos) Se considera la función $f(x) = \dfrac{x}{(x-1)^2}$

a) Determinar su dominio y asíntotas.
b) Demostrar que es creciente en el intervalo abierto (−1, 1).
c) Determinar sus extremos relativos.
d) Representar la función.

2. (1 punto) Se considera la función real de variable real definida por

$$f(x) = \frac{x^3}{a} - ax^2 + 5x + 10, \quad a \neq 0.$$

a) Obtener los valores de *a* para los cuales la función $f(x)$ tiene un máximo en $x = 1$ (0,7 puntos).
b) Calcular los extremos relativos de $f(x)$ para $a = 3$ (0,3 puntos).

3. Calcular las siguientes integrales:

a) $\displaystyle\int \frac{x^3 + 5x^2 - 3x + 2}{\sqrt{x}}\,dx$ (0,5 puntos)

b) $\displaystyle\int x\cos\left(3x^2\right)dx$ (0,4 puntos)

c) $\displaystyle\int x^2 \ln x\,dx$ (0,6 puntos)

d) $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{(3-x)^2}\,dx$ (0,5 puntos)

Soluciones

TEST

1. La función $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}x+(bx)^2, & x<0\\ b+\sqrt{x+1}, & 0\le x\end{cases}$ es:

a) Continua y derivable si $b = \pm 1$
b) Derivable sólo si $b = 1$
c) Continua sólo si $b = -1$

Sol.

Continuidad en $x = 0$. (Para que sea continua es necesario que los límites laterales sean iguales.)

Por la izquierda: $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\left(\dfrac{1}{2}x+(bx)^2\right)=0$

Por la derecha: $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(b+\sqrt{x+1}\right)=b+1 \Rightarrow b=-1$

Derivabilidad en $x = 0$.

Salvo en $x = 0$, la derivada es:

$$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}+2b^2x, & x<0\\ \dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}, & 0<x\end{cases}$$

Derivada por la izquierda: $\lim\limits_{x\to 0^-} f'(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\left(\dfrac{1}{2}x+2b^2x\right)=\dfrac{1}{2}$

Derivada por la derecha: $\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}=\dfrac{1}{2}$ $\Rightarrow$ No depende del valor de b.

Luego, la función continua (y derivable) es $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}x+x^2, & x<0\\ -1+\sqrt{x+1}, & 0\le x\end{cases}$.

2. Teniendo en cuenta que $\sqrt{64}=8$, utilizando la diferencial se obtiene que el valor de $\sqrt{65}$ es:

a) 8,0823 **b) 8,0625** c) 8,06225

Sol.

Se toma $f(x)=\sqrt{x} \Rightarrow f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

Mediante la diferencial: $df(x)=f'(x)dx \Rightarrow df(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}dx$

Para $x = 64$ y $dx = 1$ se tiene: $df(64)=\dfrac{1}{2\sqrt{64}}\cdot 1=\dfrac{1}{16}=0{,}0625$.

Por tanto, $f(65)\approx f(64)+df(64)=8+0{,}0625=8{,}0625$

Mediante la tangente en $x = 64$, que es $y - f(64) = f'(64)(x - 64) \Rightarrow y - 8 = \frac{1}{2\sqrt{64}}(x - 64) \Rightarrow$

$y = \frac{1}{16}x + 4$.

Para $x = 65$, $f(65) \approx \frac{1}{16}\cdot 65 + 4 = 8{,}0625$

3. La función $f(x) = 2x^3 + px^2 - 3$ corta al eje de abscisas en el intervalo [−1, 1]:

a) Para todo $p < 5$

b) Para todo $p > 1$

c) Sólo si $1 < p < 5$

Sol. Por Bolzano.

$f(-1) = -5 + p$; $f(1) = -1 + p$

$f(-1) = -5 + p = 0$ si $p = 5 \Rightarrow f(-1) > 0$ si $p > 5$ y $f(-1) < 0$ si $p < 5$

$f(1) = -1 + p = 0$ si $p = 1 \Rightarrow f(1) < 0$ si $p < 1$ y $f(1) > 0$ si $p > 1$

Por tanto, con toda seguridad, $f(-1) < 0$ y $f(1) > 0$ si $1 < p < 5$; y la función cortará al eje entre −1 y 1. Pero, además, como $f(0) = -3$, siempre que $f(1) > 0$, la función cortará al eje OX en el intervalo [0, 1] que está contenido en [−1, 1], pero esto pasa siempre que $p > 1$. En consecuencia, la respuesta correcta es b)

4. El polinomio de Taylor de grado 3 de la función $f(x) = \sin x + \cos 2x$, en $x = 0$, es:

a) $P(x) = 1 + x - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3$

b) $P(x) = 1 + x - 2x^2 - \frac{1}{6}x^3$

c) $P(x) = 1 - 2x - x^2 + \frac{1}{6}x^3$

Sol.

$f(x) = \sin x + \cos 2x \rightarrow f(0) = 1$

$f'(x) = \cos x - 2\sin 2x \rightarrow f'(0) = 1$

$f''(x) = -\sin x - 4\cos 2x \rightarrow f''(0) = -4$

$f'''(x) = -\cos x + 8\sin 2x \rightarrow f'''(0) = -1$

Por tanto, $P(x) = 1 + x - \frac{4}{2!}x^2 - \frac{1}{3!}x^3 = 1 + x - 2x^2 - \frac{1}{6}x^3$

5. El valor que verifica el teorema del valor medio para $f(x) = x^2 - ax + 3$, en el intervalo (1, 4), es:

a) $\frac{3a}{2}$ b) $\frac{5}{2a}$ **c)** $\frac{5}{2}$

Sol.

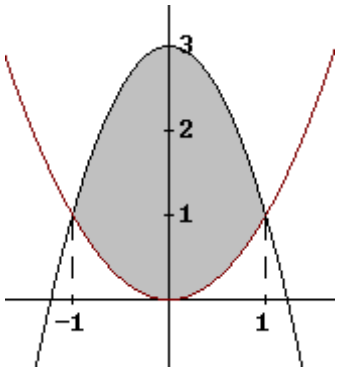
$\frac{f(4) - f(1)}{4 - 1} = f'(x), x \in (1, 4) \Leftrightarrow \frac{19 - 4a - (4 - a)}{3} = 2x - a \Rightarrow \frac{15 - 3a}{3} = 2x - a \Rightarrow x = \frac{5}{2}$

6. El área comprendida entre las dos parábolas $y = x^2$ e $y = -2x^2 + 3$, vale:

a) $\frac{27}{4}$ **b) 4** c) Ninguna de las anteriores, su valor es: _____

Sol

La región es la sombreada en la siguiente figura.



Las curvas se cortan en los puntos (–1, 1) y (1, 1), que son las soluciones del sistema

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = -2x^2 + 3 \end{cases}$$

Como $y = x^2$ va por debajo de $y = -2x^2 + 3$ en el intervalo (–1, 1), el área viene dada por:

$$A = \int_{-1}^{1} (-2x^2 + 3 - x^2)dx = \int_{-1}^{1} (-3x^2 + 3)dx = \left(-x^3 + 3x\right)\Big|_{-1}^{1} = 2 - (-2) = 4$$

7. La función $f(x) = \frac{3x^2 - ax}{x + 2}$ tiene un mínimo relativo en $x = 2$:

a) Cuando $a = 18$

b) Cuando $a = 10$

c) En $x = 2$ no puede tener un mínimo relativo.

Sol.

Para que $f(x)$ tenga un mínimo relativo en $x = 2$ debe cumplirse que: $f'(2) = 0$ y $f''(2) > 0$

$$f'(x) = \frac{(6x - a)(x + 2) - (3x^2 - ax)}{(x + 2)^2} = \frac{3x^2 + 12x - 2a}{(x + 2)^2} \Rightarrow f'(2) = \frac{12 + 24 - 2a}{16} = 0 \Rightarrow a = 18$$

Veamos que, para ese valor de $a = 18$, $f''(2) > 0$:

$$f''(x) = \frac{96}{(x + 2)^3} \rightarrow f''(2) = \frac{96}{64} > 0$$

8. La derivada de $g(x) = \frac{e^{2x+1}}{(x-1)^2}$ en el punto $x = -\frac{1}{2}$ vale:

a) $-\frac{2}{81}$ b) $\frac{24}{7}$ **c)** $\frac{40}{27}$

Sol.

$$g(x) = \frac{e^{2x+1}}{(x-1)^2} \Rightarrow g'(x) = \frac{2e^{2x+1}(x-1)^2 - e^{2x+1}2(x-1)}{(x-1)^4} \Rightarrow \text{(simplificando)}$$

$$\Rightarrow g'(x) = \frac{2e^{2x+1}(x-1) - e^{2x+1}2}{(x-1)^3} = \frac{2(x-2)e^{2x+1}}{(x-1)^3} \rightarrow g'(-1/2) = \frac{2\left(-\frac{1}{2} - 2\right)e^0}{\left(-\frac{1}{2} - 1\right)^3} = \frac{-5}{-\frac{27}{8}} = \frac{40}{27}$$

9. La curva de ecuación $y = 3x^2 - 1$ y la recta $y = 4x + b$ son tangentes en el punto $x = \frac{2}{3}$:

a) Para cualquier valor de *b*.

b) Sólo si $b = -\frac{7}{3}$

c) No pueden ser tangentes para ningún valor de *b*.

Sol:

En el punto de tangencia la derivada debe valer 4, que es el valor de la pendiente de la recta tangente.

$$y' = 6x = 4 \Rightarrow x = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

Para $x = \frac{2}{3}$, $y = 3\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2 - 1 = \frac{1}{3}$.

El punto de tangencia es $\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$

Como ese punto debe cumplir la ecuación de la recta $y = 4x + b$:

$$\frac{1}{3} = 4\cdot\frac{2}{3} + b \Rightarrow b = -\frac{7}{3}$$

10. El valor de $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x}\right)$ es:

a) $\frac{1}{2}$ b) $-\infty$ c) $-\frac{1}{4}$

Sol.

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x}\right) = [\infty - \infty] = \lim_{x\to 0}\left(\frac{x - \ln(1+x)}{x\ln(1+x)}\right) = \left[\frac{0}{0}\right]$$

Aplicando L´Hôpital, se tiene:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{x - \ln(1+x)}{x\ln(1+x)}\right) = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1 - \frac{1}{1+x}}{\ln(1+x) + \frac{x}{1+x}}\right) = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\frac{1}{(1+x)^2}}{\frac{1}{1+x} + \frac{1+x-x}{(1+x)^2}}\right) = \frac{1}{2}$$

PROBLEMAS:

1. (2 puntos) Se considera la función $f(x) = \dfrac{x}{(x-1)^2}$

a) Determinar su dominio y asíntotas.
b) Demostrar que es creciente en el intervalo abierto (–1, 1).
c) Determinar sus extremos relativos.
d) Representar la función.

Solución:
a) Dominio: **R** – {1}.
Asíntotas:

$\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x}{(x-1)^2} = \left[\dfrac{1}{0}\right] = +\infty \Rightarrow x = 1$ es A. V.

$\lim\limits_{x\to \pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to \pm\infty} \dfrac{x}{(x-1)^2} = \left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$ = (L´Hôpital) = $\lim\limits_{x\to \pm\infty} \dfrac{1}{2(x-1)} = \left[\dfrac{1}{\pm\infty}\right] = 0 \Rightarrow y = 0$ es A. H. por la izquierda y por la derecha.

b) Derivando: $f'(x) = \dfrac{(x-1)^2 - 2(x-1)\cdot x}{(x-1)^4} = \dfrac{-x-1}{(x-1)^3}$

Como para cualquier valor de x tal que $-1 < x < 1$, $f'(x) > 0 \Rightarrow$ la función es creciente en ese intervalo.

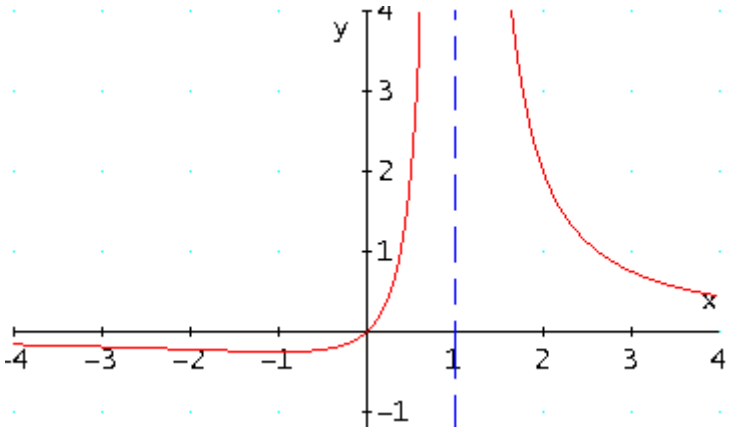
c) $f'(x) = \dfrac{-x-1}{(x-1)^3} = 0 \Rightarrow x = -1$ es punto singular.

Como $f''(x) = \dfrac{2x+4}{(x-1)^4}$ y $f''(-1) = \dfrac{1}{8} > 0$, en $x = -1$ se tiene un mínimo relativo.

No hay más extremos relativos.

d) Por los apartados a) y b) se deduce que la función tiene dos asíntotas, una vertical en $x = 1$ y otra horizontal, la recta $y = 0$.
Además es decreciente si $x < -1$ o si $x > 1$, pues en ambos casos $f'(x) < 0$.
Con lo dicho y dando algunos valores puede trazarse su gráfica.

x	$f(x) = \dfrac{x}{(x-1)^2}$
–3	–0,1875
–2	–0,222
–1	–0,25
0	0
0,5	2
2	2
3	0,75
10	0,123



2. (1 punto) Se considera la función real de variable real definida por

$f(x) = \frac{x^3}{a} - ax^2 + 5x + 10, \quad a \neq 0.$

a) Obtener los valores de *a* para los cuales la función $f(x)$ tiene un máximo en *x* = 1 (0,7 puntos).

b) Calcular los extremos relativos de $f(x)$ para *a* = 3 (0,3 puntos).

Solución:

(a) $f(x) = \frac{x^3}{a} - ax^2 + 5x + 10 \Rightarrow f'(x) = \frac{3x^2}{a} - 2ax + 5 \Rightarrow f''(x) = \frac{6x}{a} - 2a$

Si tiene un máximo en x = 1, entonces $f'(1) = 0$ y $f''(1) < 0$.
Por tanto,

$\frac{3}{a} - 2a + 5 = 0 \Rightarrow -2a^2 + 5a + 3 = 0 \Rightarrow a = -\frac{1}{2}$ o $a = 3$.

Para $a = -\frac{1}{2}$, $f''(x) = -12x + 1$ y $f''(1) = -11$

Para $a = 3$, $f''(x) = 2x - 6$ y $f''(1) = -4$

Por tanto hay máximos si $a = -\frac{1}{2}$ o $a = 3$.

Obsérvese que las funciones serían, respectivamente, $f(x) = -2x^3 + 2x^2 + 5x + 10$ y

$f(x) = \frac{x^3}{3} - 3x^2 + 5x + 10$

(b) Para *a* = 3 la función y sus derivadas son:

$f(x) = \frac{x^3}{3} - 3x^2 + 5x + 10 \Rightarrow f'(x) = x^2 - 6x + 5 \Rightarrow f''(x) = 2x - 6$

La derivada primera se anula en: x = 1 y x = 5.

Como $f''(1) = -4$, en x = 1 hay un máximo; punto (1, 35/3)
Como $f''(5) = 4$, en x = 5 hay un mínimo; punto (5, 5/3).

3. Calcular las siguientes integrales:

a) $\int \frac{x^3+5x^2-3x+2}{\sqrt{x}}dx$ (0,5 puntos)

b) $\int x\cos\left(3x^2\right)dx$ (0,4 puntos)

c) $\int x^2 \ln x dx$ (0,6 puntos)

d) $\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{(3-x)^2}dx$ (0,5 puntos)

Solución:

a) Operando se tiene:

$$\int \frac{x^3+5x^2-3x+2}{\sqrt{x}}dx = \int \left(x^{5/2}+5x^{3/2}-3x^{1/2}+2x^{-1/2}\right)dx =$$

$$= \frac{2}{7}x^{7/2}+5\frac{2}{5}x^{5/2}-3\frac{2}{3}x^{3/2}+2\cdot 2x^{1/2}+c = \left(\frac{2}{7}x^3+2x^2-2x+4\right)x^{1/2}+c$$

b) $\int x\cos\left(3x^2\right)dx = \frac{1}{6}\int 6x\cos\left(3x^2\right)dx = \frac{1}{6}\sin\left(3x^2\right)+c$

c) $\int x^2 \ln x dx = \frac{x^3}{3}\ln x - \int \frac{x^2}{3}dx = \frac{x^3}{3}\ln x - \frac{x^3}{9}$

Hemos tomado: $\begin{cases} u = \ln x \\ dv = x^2 dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x}dx \\ v = \frac{x^3}{3} \end{cases}$

d) Es impropia: $\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{(3-x)^2}dx = \lim_{b\to-\infty}\int_b^0 \frac{1}{(3-x)^2}dx = \lim_{b\to-\infty}\left(\frac{1}{3-x}\right)\Big|_b^0 = \lim_{b\to-\infty}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{3-b}\right) = \frac{1}{3}$