1º Una señal de carretera indica que la pendiente de ese tramo es del 12%, lo que quiere decir que por cada 100 metros que recorre en horizontal asciende 12 metros. ¿Qué ángulo forma la carretera con la horizontal? ¿Y si fuera del 24%? Obtén la fórmula general que relaciona la pendiente de una carretera, p (expresada en %) con el ángulo α que forma la carretera con la horizontal.

2º Calcula el ángulo que forma la diagonal de una cara con la diagonal del cubo.

3º Resuelve el triángulo del cual se conoce su perímetro: 30 cm y la medida de dos de sus ángulos: 40º y 80º.

4º Indica en cada uno de los siguientes casos, si el triángulo correspondiente es acutángulo, rectángulo u obtusángulo.

a) a=97, b=72, c=65
b) a=90, b=72, c=65
c) a=100, b=72, c=65

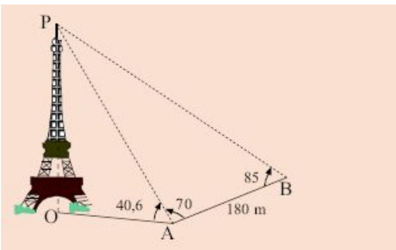
(Observación: no es necesario resolver el triángulo)

5º Para calcular la anchura de un río fijamos dos puntos A y B, ambos situados en nuestra orilla distantes 5 metros uno de otro. Observamos un árbol cuya base está situada en la orilla opuesta. Las visuales al árbol con la línea que une A y B forman ángulos de 55º y 65º respectivamente. Calcula la anchura del río. (Observación: el problema admite DOS planteamientos.)

6º Resuelve los triángulos:

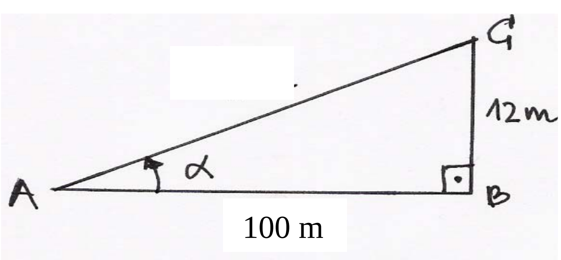
a) A=45º, a=8 cm, b=10 cm.
a) a=23 cm, B=53º, C=84º.
b) a=5 cm, b=4 cm, C=47º.
c) a=5 cm, b=4 cm. c=11 cm.
d) a=2 cm, b=9 cm, A=125º.

7º Para calcular la altura de la torre Eiffel sin acceder hasta su base, una persona efectúa las medidas de los ángulos del dibujo en dos puntos A y B separados 180 m. ¿Cuánto mide la altura OP de la torre Eiffel?



SOLUCIONES

1º Considera la figura



AC carretera, AB horizontal, BC vertical
Caso 12%

$$tg\alpha = \frac{12}{100} \Rightarrow \alpha = arctg\ 0{,}12 \approx 5^{o}\ 42'\ 38''$$

Caso 24%

$$tg\alpha = \frac{24}{100} \Rightarrow \alpha = arctg\ 0{,}24 \approx 13^{o}\ 29'\ 44''$$

Caso p%

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{p}{100} \Rightarrow \alpha = \mathrm{arctg}\frac{p}{100}$$

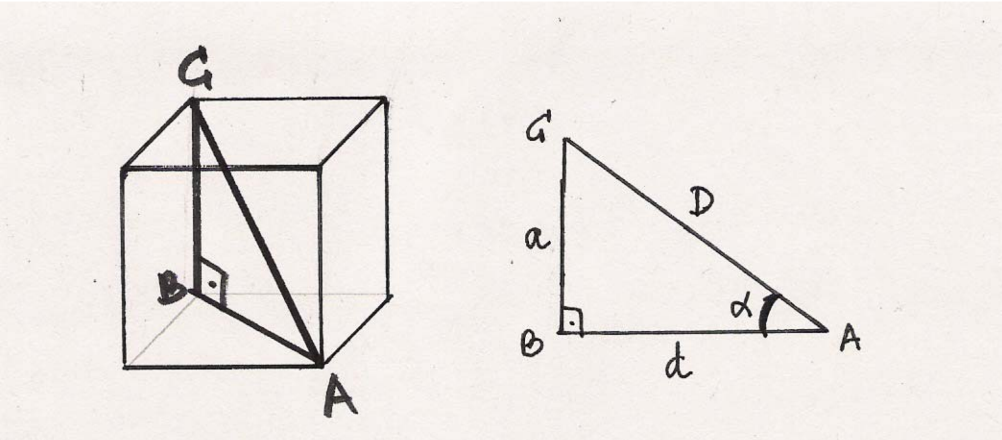
2º

$$d^2 = a^2 + a^2 = 2a^2 \Rightarrow d = a\sqrt{2}$$

$$D^2 = a^2 + a^2 + a^2 = 3a^2 \Rightarrow D = a\sqrt{3}$$

Considera el triángulo rectángulo

$$\cos\alpha = \frac{d}{D} = \frac{a\sqrt{2}}{a\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{2}{3}} \Rightarrow \alpha = \arccos\sqrt{\frac{2}{3}} \approx 35^{o}15'51'' = 0{,}6154 \text{ rad}$$



3º Sea A=40º y B=80º $C = 180^{o} - A - B = 60^{o}$

Aplicamos el teorema del seno

$$\frac{a}{\mathrm{sen}A} = \frac{b}{\mathrm{sen}B}$$

$\frac{a}{\mathrm{sen}A} = \frac{c}{\mathrm{sen}C} \Leftrightarrow \frac{a}{\mathrm{sen}A} = \frac{30-(a+b)}{\mathrm{sen}C}$, pues $a+b+c=30$, y tenemos un sistema de dos ecuaciones con 2 incógnitas: a y b.

$$\begin{cases} a\cdot \mathrm{sen}80^{o} = b\cdot \mathrm{sen}40^{o} \Rightarrow b = \dfrac{a\cdot \mathrm{sen}80^{o}}{\mathrm{sen}40^{o}} \\ a\cdot \mathrm{sen}60^{o} = (30-a-b)\cdot \mathrm{sen}40^{o} \end{cases} \Rightarrow a\cdot \mathrm{sen}60^{o} = \left(30 - a - \frac{a\cdot \mathrm{sen}80^{o}}{\mathrm{sen}40^{o}}\right)\cdot \mathrm{sen}40^{o} \Rightarrow$$

$$a(\mathrm{sen}60^{o} + \mathrm{sen}40^{o} + \mathrm{sen}80^{o}) = 30\cdot \mathrm{sen}40^{o} \Rightarrow a = \frac{30\cdot \mathrm{sen}40^{o}}{\mathrm{sen}60^{o} + \mathrm{sen}40^{o} + \mathrm{sen}80^{o}} \approx 7{,}73\mathrm{cm}$$

$$b = \frac{a\cdot \mathrm{sen}80^{o}}{\mathrm{sen}40^{o}} \approx \frac{7{,}73\cdot \mathrm{sen}80^{o}}{\mathrm{sen}40^{o}} \approx 11{,}84\mathrm{cm} \Rightarrow c = 30 - a - b \approx 10{,}43\mathrm{cm}$$

4º Estudiaremos el ángulo mayor, que está asociado al lado mayor.

El teorema del coseno establece que

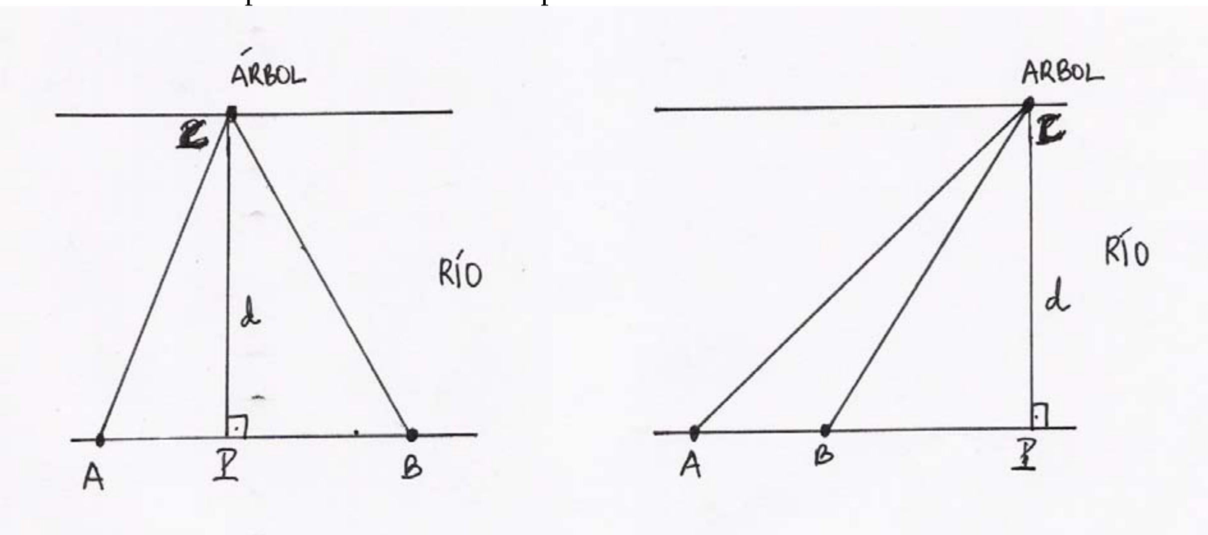
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\cdot b\cdot c\cdot \cos A \quad \Leftrightarrow \quad \cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2\cdot b\cdot c}$$

a) $\cos A = \frac{72^2+65^2-97^2}{2\cdot 72\cdot 65} = 0 \Rightarrow A = 90º$.

b) $\cos A = \frac{72^2+65^2-90^2}{2\cdot 72\cdot 65} = \frac{1309}{9360} > 0 \Rightarrow A < 90º \Rightarrow$ es un triángulo acutángulo.

c) $\cos A = \frac{72^2+65^2-100^2}{2\cdot 72\cdot 65} = \frac{-591}{9360} < 0 \Rightarrow A > 90º \Rightarrow$ es un triángulo obtusángulo.

5º Observación: el problema admite DOS planteamientos.



Caso 1: El árbol está entre A y B.

En el triángulo ABC: $A = 55º, B = 65º, C = 180º - A - B = 60º, c = 5m.$ Sea **C** la base del árbol, **d** la distancia de la orilla al árbol (altura del lado AB en el triángulo ABC) y **P** la proyección de C sobre AB.

Planteamiento:

Triángulo APC (rectángulo en P): $\text{sen}A = \frac{d}{b} \Rightarrow d = b\cdot \text{sen}A = b\cdot \text{sen}55º$

Triángulo ABC: teorema del seno $\frac{c}{\text{sen}C} = \frac{b}{\text{sen}B} \Rightarrow \frac{5}{\text{sen}60º} = \frac{b}{\text{sen}65º} \Rightarrow b = \frac{5\cdot \text{sen}65º}{\text{sen}60º} \approx 5.23\text{m}$

$\Rightarrow d \approx 5,23\text{sen}55º \approx 4,28\text{m}$

Caso 2: El árbol NO está entre A y B.

En el triángulo ABC: $A = 55º, B = 180º - 65º = 115º, C = 180º - A - B = 10º, c = 5m.$ Sea **C** la base del árbol, **d** la distancia de la orilla al árbol (altura del lado AB en el triángulo ABC) y **P** la proyección de C sobre la recta que contiene a AB.

Planteamiento:

Triángulo APC (rectángulo en P): $\text{sen}A = \frac{d}{b} \Rightarrow d = b\cdot \text{sen}A = b\cdot \text{sen}55º$

Triángulo ABC: teorema del seno

$\frac{c}{\text{sen}C} = \frac{b}{\text{sen}B} \Rightarrow \frac{5}{\text{sen}10º} = \frac{b}{\text{sen}115º} \Rightarrow b = \frac{5\cdot \text{sen}115º}{\text{sen}10º} \approx 26,09\text{m}$

$\Rightarrow d \approx 26,09\text{sen}55º \approx 21,37\text{m}$

Observación: la posición relativa es la del dibujo pues la visual de A es menor que la visual de B

6º Resuelve los triángulos:

a) A=45º, a=8 cm, b=10 cm.

¿B? Teorema del seno:

$$\frac{a}{\text{senA}}=\frac{b}{\text{senB}}\Rightarrow\frac{8}{\text{sen}45^o}=\frac{10}{\text{senB}}\Rightarrow\text{senB}=\frac{10\cdot\text{sen}45^o}{8}\approx 0,88\text{cm}\Rightarrow\begin{cases}B\approx 62,11^o=62^o 6'36''\\ B'=180-B\approx 117,89^o=117^o 53'24''\end{cases}$$

.

Veamos si las dos soluciones son válidas:

Si B=62.11º $C=180^o-A-B\approx 17.11^o$ y **c** se obtiene aplicando el teorema del seno

$$\frac{c}{\text{senC}}=\frac{a}{\text{senA}}\Rightarrow c=\frac{a\cdot\text{senC}}{\text{senA}}=\frac{8\cdot\text{sen}17.11}{\text{sen}45}\approx 3.32\text{cm}$$

Si B'=117.89º $C'=180^o-A-B'\approx 72.89^o$ y **c'** se obtiene aplicando el teorema del seno

$$\frac{c'}{\text{senC}}=\frac{a}{\text{senA}}\Rightarrow c'=\frac{a\cdot\text{senC}'}{\text{senA}}=\frac{8\cdot\text{sen}72.89}{\text{sen}45}\approx 10.81\text{cm}$$

b) a=23 cm, B=53º, C=84º.

¿A? A=180º-B-C=43º

¿b? Teorema del seno $\frac{b}{\text{senB}}=\frac{a}{\text{senA}}\Rightarrow b=\frac{a\cdot\text{senB}}{\text{senA}}=\frac{23\cdot\text{sen}53^o}{\text{sen}43^o}\approx 26.93\text{cm}$

¿c? Teorema del seno $\frac{c}{\text{senC}}=\frac{a}{\text{senA}}\Rightarrow c=\frac{a\text{senC}}{\text{senA}}=\frac{23\text{sen}84^o}{\text{sen}43^o}\approx 33.53\text{cm}$

c) a=5 cm, b=4 cm, C=47º.

¿c? Teorema del coseno

$$c^2=a^2+b^2-2\cdot a\cdot b\cdot\cos C\Rightarrow c^2=5^2+4^2-2\cdot 5\cdot 4\cdot\cos 47^o\Rightarrow c\approx 3,70\text{cm}$$

¿B? Teorema del seno

$$\frac{b}{\text{senB}}=\frac{c}{\text{senC}}\Rightarrow\text{senB}=\frac{b\cdot\text{senC}}{c}=\frac{4\cdot\text{sen}47^o}{3.70}\approx 0.79\Rightarrow\begin{cases}B\approx 52,24^o=52^o 14'24''\\ B'=180-B\approx 127,76^o\end{cases}$$

La 2º solución,**B'**, no es posible pues A=180º-B'-C=5.24º con A<B y a>b.

¿A? A=180-B-C=80.76º=80º45'36''

d) a=5 cm, b=4 cm. c=11 cm.

No es posible pues $a+b<c$

e) a=2 cm, b=9 cm, A=125º.

¿B? Teorema del seno: $\frac{b}{\text{senB}}=\frac{a}{\text{senA}}\Rightarrow\text{senB}=\frac{b\cdot\text{senA}}{a}=\frac{9\cdot\text{sen}125^o}{2}\approx 3,68>1\Rightarrow$ no es posible.

7º Se consideran los triángulos AOP, recto en O y ABP. Sea OP la altura de la torre.

En AOP $\text{sen}40,6^o=\frac{OP}{b}\Rightarrow OP=b\cdot\text{sen}40,6^o$

En ABP $P=180^o-A-B=25^o$, p=180m y aplicando el teorema del seno

$$\frac{b}{\text{senB}}=\frac{p}{\text{senP}}\Rightarrow b=\frac{p\cdot\text{senB}}{\text{senP}}=\frac{180\cdot\text{sen}85^o}{\text{sen}25^o}\approx 424,29\text{m}$$

$$\Rightarrow OP\approx 424,29\cdot\text{sen}40,6^o\approx 276,12\text{m}$$