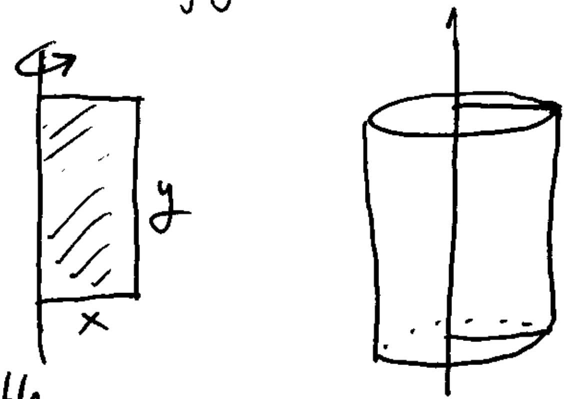
**V1.** Halla las dimensiones de un rectángulo de perímetro 60 cm de modo que el cilindro engendrado al girar en torno a uno de sus lados tenga volumen máximo.
**V2.** Entre todos los triángulos inscritos en una semicircunferencia de radio R, ¿cuál es el de área máxima?
**V3.** Determina las dimensiones del rectángulo de área máxima que se puede inscribir en una semicircunferencia de 40 cm de diámetro.
**V4.** Con un alambre de 1m de longitud se quiere construir un cuadrado y un triángulo equilátero. ¿Cuáles deben ser sus dimensiones para que tengan área mínima?
**V5.** Demuestra que entre todos los rectángulos de área dada, el cuadrado tiene el círculo circunscrito mínimo.
**V6.** Halla el trapecio de mayor área que puede inscribirse en un semicírculo, teniendo la base inferior en el diámetro.
**V7.** Una ventana tiene la forma de semicírculo montado sobre un rectángulo. El rectángulo es de cristal transparente, mientras que el semicírculo es de cristal de color que transmite la mitad de luz por unidad de área transparente. El perímetro total (exterior) de la ventana es fijo. Hallar las proporciones de la ventana que proporcionen

$\boxed{V1}$ Observa las figuras:




- Variables

  $x, y \ (x, y > 0)$ dimensiones del rectángulo

- ligadura

  $$2x + 2y = 60 \iff x + y = 30.$$

- Función a optimizar $f = \pi x^2 \cdot y$
- Se introduce la ligadura en la función: es más sencilla la variable $y$ $\quad y = 30 - x \to$

  $$f(x) = \pi x^2 \cdot (30 - x) = 30\pi x^2 - \pi x^3.$$

- $1^a$ y $2^a$ derivada

  $$f'(x) = 60\pi x - 3\pi x^2 \qquad f''(x) = 60\pi - 6\pi x$$

- Condición de extremo

  $$f'(x) = 0 \to 60\pi x - 3\pi x^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 & \text{(imposible)} \\ x = \dfrac{60\pi}{3\pi} = 20 \end{cases}$$

  $$f''(20) = 60\pi - 6 \cdot \pi \cdot 20 < 0 \to \text{máximo}.$$

- Solución:

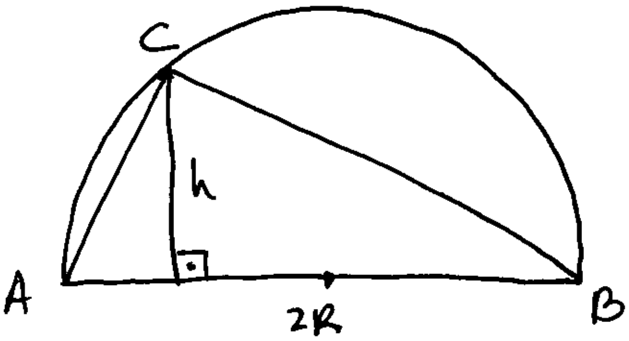
  $$x = 20 \to y = 30 - 20 = 10 \Rightarrow f_{MAX} = \pi \cdot 20^2 \cdot 10 = 4000\pi.$$

Recuerda el volumen de un cilindro $V = \pi \cdot r^2 \cdot h$

$r$ = radio de la base

$h$ = altura

$\boxed{V2}$ Observa la figura

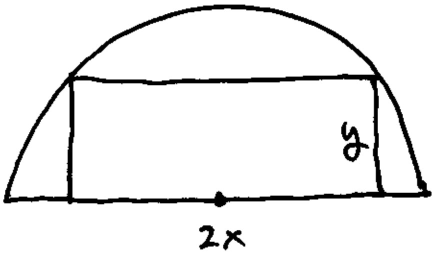


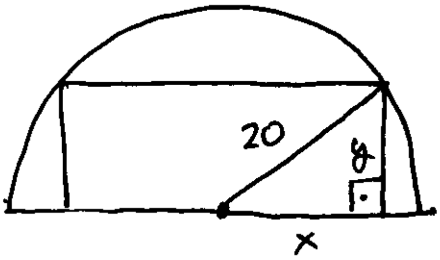

Función a optimizar $f = \frac{2R \cdot h}{2} \Rightarrow \boxed{f(h) = Rh}$ $\quad h, R > 0$

Es una función lineal creciente. $\Rightarrow$ su máximo corresponde al máximo de $h$, que es $R$ $\Rightarrow$

$h = R \rightarrow f_{max} = R^2.$

V3 Hagamos un dibujo de la situación.




Incógnitas: dimensiones del rectángulo
base : $2x$ (*)
altura : $y$

ligadura
Teorema de Pitágoras $\boxed{x^2+y^2=20^2}$
Función a optimizar : área ($f$)
$\boxed{f=2x\cdot y}$

Se introduce la ligadura en la función : $y^2=400-x^2 \rightarrow y=\sqrt{400-x^2}$

$\Rightarrow f(x)=2x\cdot\sqrt{400-x^2}=\sqrt{4x^2\cdot(400-x^2)}=\sqrt{1600x^2-4x^4}$.

Recuerda : los extremos de $\sqrt{g}$ son los extremos de $g$.

$g(x)=1600x^2-4x^4$

$g'(x)=3200x-16x^3 \qquad g''(x)=3200-48x^2$

Condición de extremo : $g'=0 \rightarrow$

$3200x-16x^3=0 \longrightarrow 16x\cdot(200-x^2)=0$

Tres soluciones : $x_1=0 \quad x_2=\sqrt{200} \quad x_3=-\sqrt{200}$.

---

(*) si hubieramos elegido como base $x$ las operaciones habrían sido más complejas.

la ligadura : $(\frac{x}{2})^2+y^2=20^2$.

Se descarta $x_3$ pues $x$ debe ser positiva (es una longitud)

$g''(0) = 3200 \rightarrow$ mínimo.

$g''(\sqrt{200}) = 3200 - 48\cdot(\sqrt{200})^2 = 3200 - 9600 = -6400 < 0 \rightarrow$ Máximo

Solución:

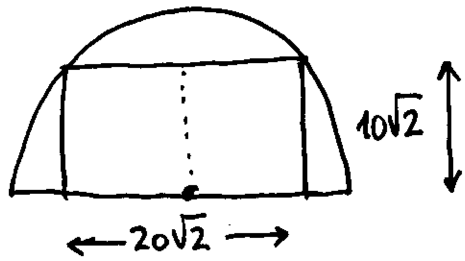
base $\boxed{2x = 2\cdot\sqrt{200} = 20\sqrt{2}\ m}$

altura ¿$y$?

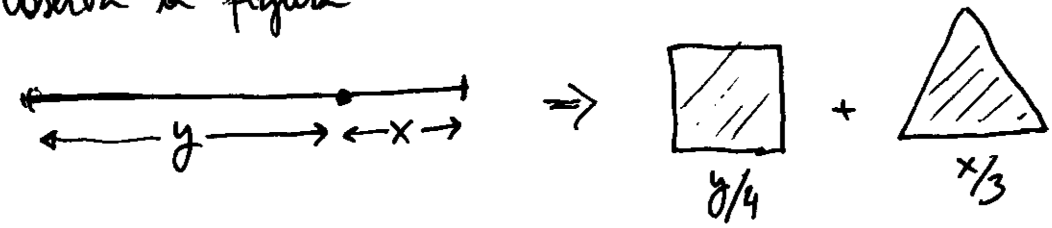
$x^2 + y^2 = 20^2 \leftrightarrow (\sqrt{200})^2 + y^2 = 400 \rightarrow y^2 = 200 \rightarrow y = \sqrt{200}$

$\boxed{y = \sqrt{200} = 10\sqrt{2}\ m}$

Observa que es un rectángulo formado por 2 cuadrados.



$\boxed{V4}$ Observa la figura




- ligadura $\boxed{x+y=1}$

$\boxed{y}$ sería el perímetro del cuadrado

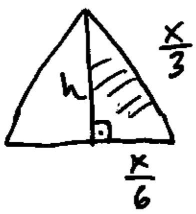
$\boxed{x}$ sería el perímetro del triángulo.

- Función a optimizar $A = A_C + A_T$

$A_C$ = área del cuadrado

$$A_C = \left(\frac{y}{4}\right)^2$$

$A_T$ = área del triángulo equilátero.




$$h^2 + \left(\frac{x}{6}\right)^2 = \left(\frac{x}{3}\right)^2 \Leftrightarrow h^2 + \frac{x^2}{36} = \frac{x^2}{9} \Rightarrow h^2 = \frac{x^2}{9} - \frac{x^2}{36} = \frac{x^2}{12}$$

$$\rightarrow h = \frac{x}{\sqrt{12}} = \frac{x\sqrt{12}}{12} = \frac{2x\sqrt{3}}{12} = \frac{\sqrt{3}}{6}x.$$

$$A_T = \frac{1}{2}\cdot\frac{x}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{6}\cdot x = \frac{\sqrt{3}}{36}x^2$$

$$\Rightarrow \boxed{A = \frac{\sqrt{3}}{36}x^2 + \frac{1}{16}y^2}$$

- Se introduce la ligadura en la función:

$$y = 1-x \rightarrow \boxed{A(x) = \frac{\sqrt{3}}{36}x^2 + \frac{1}{16}\cdot(1-x)^2}$$

- 1ª y 2ª derivada:

$$A'(x) = \frac{\sqrt{3}}{36}\cdot 2x + \frac{1}{16}\cdot 2\cdot(1-x)\cdot(-1) = \frac{\sqrt{3}}{18}x - \frac{1}{8} + \frac{1}{8}x$$

$$A''(x) = \frac{\sqrt{3}}{18} + \frac{1}{8}.$$

- Condición de extremo

$$A' = 0 \rightarrow \frac{\sqrt{3}}{18}x - \frac{1}{8} + \frac{1}{8}x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{18} + \frac{1}{8}\right)\cdot x = \frac{1}{8} \Rightarrow \frac{18+8\sqrt{3}}{18\cdot 8}\cdot x = \frac{1}{8} \Rightarrow$$

$$x = \frac{18}{18+8\sqrt{3}} = \frac{9}{9+4\sqrt{3}}$$

Racionalizando.

$$x = \frac{9}{9+4\sqrt{3}} \cdot \frac{9-4\sqrt{3}}{9-4\sqrt{3}} = \frac{9\cdot(9-4\sqrt{3})}{81-16\cdot 3} = \frac{9\cdot(9-4\sqrt{3})}{33} = \frac{3\cdot(9-4\sqrt{3})}{11}$$

$$\Rightarrow \boxed{x = \frac{27-12\sqrt{3}}{11}}$$

$$A''\left(\frac{27-12\sqrt{3}}{11}\right) = \frac{\sqrt{3}}{18} + \frac{1}{8} > 0 \rightarrow \text{mínimo.}$$

- Solución:

$$x = \frac{27-12\sqrt{3}}{11}\, m \simeq 0{,}57\, m \text{ (perímetro del triángulo)}$$

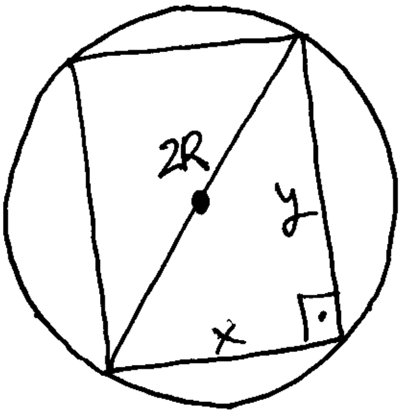
$$y = 1-x = 1 - \frac{27-12\sqrt{3}}{11} = \frac{11-27+12\sqrt{3}}{11} = \frac{-16+12\sqrt{3}}{11} \simeq 0{,}43\ m$$

(perímetro del cuadrado)

$$A_m = \frac{\sqrt{3}}{36}\cdot\left(\frac{27-12\sqrt{3}}{11}\right)^2 + \frac{1}{16}\cdot\left(\frac{-16+12\sqrt{3}}{11}\right)^2 = \frac{3\sqrt{3}-4}{44}\, m^2$$

$$A_m \simeq 0{,}027\, m^2.$$

$\boxed{V5}$ Observa la figura




- Variables: lados del rectángulo: $x, y$ y radio $R$
- Ligaduras:

$$x \cdot y = A$$

$A$ = área fija del rectángulo

- $x^2 + y^2 = (2R)^2$

- Función a optimizar: área del círculo

$$f = \pi R^2$$

Vamos a combinar ambas ligaduras.

$$x^2 + y^2 = (2R)^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 4R^2 \Longrightarrow R^2 = \frac{1}{4}(x^2 + y^2)$$

$$f = \frac{\pi}{4}(x^2 + y^2)$$

$$y = \frac{A}{x} \rightarrow f(x) = \frac{\pi}{4} \cdot \left(x^2 + \frac{A^2}{x^2}\right)$$

- 1ª y 2ª derivadas

$$f'(x) = \frac{\pi}{4}\left(2x - \frac{2A^2}{x^3}\right) \qquad f''(x) = \frac{\pi}{4} \cdot \left(2 + \frac{6A^2}{x^4}\right)$$

- Condición de extremo

$$f' = 0 \rightarrow 2x - \frac{2A^2}{x^3} = 0 \rightarrow x^4 = A^2 \rightarrow x = \pm\sqrt{A}$$

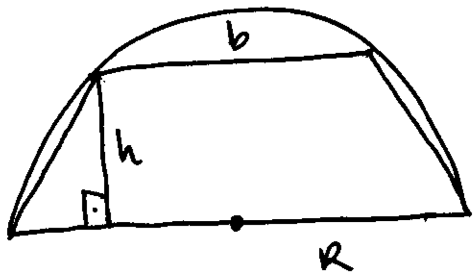
Sólo tiene sentido la solución positiva.

$f''(\sqrt{A}) > 0$ observa cómo es $f''(x)$

- Solución: $x = \sqrt{A} \rightarrow y = \dfrac{A}{\sqrt{A}} = \dfrac{A}{\sqrt{A}} \cdot \dfrac{\sqrt{A}}{\sqrt{A}} = \sqrt{A} \Longrightarrow \boxed{x = y}$

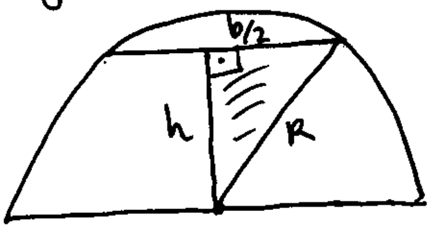
Se trata de un CUADRADO !!

$\boxed{\text{V6}}$ Observa la figura




R = radio del semicírculo
h = altura del trapecio.
b = base menor del trapecio.

- Variables: h, b (ambas > 0)
- Ligadura. Observa la figura




En ella encontramos un triángulo rectángulo de lados R, b/2, h

$$R^2 = h^2 + \left(\frac{b}{2}\right).$$

Observación: si elegimos como variable 2b en vez de b las operaciones quedan más sencillas (no hay fracciones).
La ligadura sería $R^2 = h^2 + b^2$.

- Función a optimizar
  (ya tomo 2b como base menor)

$$f = \frac{2b+2R}{2}\cdot h = (b+R)\cdot h$$

- Se introduce la ligadura en la función a optimizar. Parece más sencillo despejar h (haz la otra opción y compara)

$$h = \sqrt{R^2-b^2} \Rightarrow \boxed{f(b) = (b+R)\cdot\sqrt{R^2-b^2}}$$

- 1ª y 2ª derivadas

$$f'(b) = 1\cdot\sqrt{R^2-b^2} + (b+R)\cdot\frac{-2b}{2\sqrt{R^2-b^2}} = \sqrt{R^2-b^2} - \frac{b(b+R)}{\sqrt{R^2-b^2}}$$

$$f'(b) = \frac{\left(\sqrt{R^2-b^2}\right)^2 - b\cdot(b+R)}{\sqrt{R^2-b^2}} = \frac{R^2-b^2-b^2-bR}{\sqrt{R^2-b^2}} = \frac{R^2-2b^2-bR}{\sqrt{R^2-b^2}}.$$

$$f''(b) = \frac{(-4b-R)\cdot\sqrt{R^2-b^2} - (R^2-2b^2-bR)\cdot\frac{-2b}{2\sqrt{R^2-b^2}}}{\left(\sqrt{R^2-b^2}\right)^2}$$

- Condición de extremo

$$f'(b)=0 \rightarrow R^2-2b^2-bR=0 \Leftrightarrow \boxed{2b^2+bR-R^2=0} \rightarrow$$

$$b = \frac{-R \pm \sqrt{R^2-4\cdot 2\cdot(-R^2)}}{4} = \frac{-R\pm 3R}{4} = \begin{cases} -R \\ R/2 \end{cases}.$$

$-R$ no tiene sentido (es negativo).

Para estudiar el signo de la 2ª derivada basta estudiarlo en $(-4b-R)$ que para $b>0$ es evidentemente negativo.

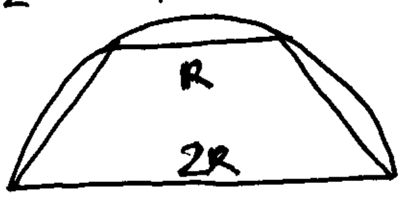
Argumento:

- el denominador es una cantidad positiva: $(\quad)^2$
- en el numerador, el 2º sumando es nulo para $b=\frac{R}{2}$. pues es solución de $R^2-2b^2-bR=0$.
- en el numerador, el 1er sumando es un producto de 2 factores siendo uno de ellos $\sqrt{R^2-b^2}$ que es positivo.

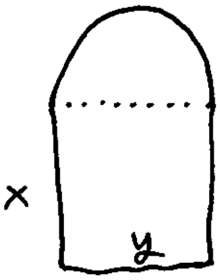
$$\Rightarrow f''\left(\frac{R}{2}\right) < 0 \rightarrow \text{máximo}.$$

- Solución: $b=\frac{R}{2} \rightarrow \boxed{2b=R}$ $\quad h=\sqrt{R^2-b^2}=\sqrt{R^2-\left(\frac{R}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{3}R}{2}$.

$\Rightarrow$ Área del trapecio: $(b+R)\cdot h = \left(\frac{R}{2}+R\right)\cdot\frac{\sqrt{3}R}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{4}R^2$



$\boxed{V7}$ Observa la figura




← admite la mitad de la luz.

← cristal transparente

• Variables

$x$ = alto del rectángulo

$y$ = diámetro del semicírculo = base del rectángulo.

• ligadura

perímetro de la ventana $P$

$$\underline{P} = x+y+x + \pi\cdot\frac{y}{2} = 2x+y+\frac{\pi y}{2}.$$

$$y = \text{diámetro} \Rightarrow \frac{y}{2} = \text{radio}$$

• Función a optimizar

La cantidad de luz que traspasa es directamente proporcional al área; la parte circular deja pasar la mitad de una ventana transparente, dejará pasar la mitad de su área.

$$f = \underbrace{x\cdot y}_{\substack{\uparrow \\ \text{ventana} \\ \text{rectangular} \\ \text{TRANSPARENTE}}} + \underbrace{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\pi\left(\frac{y}{2}\right)^2}_{\substack{\uparrow \\ \text{ventana} \\ \text{semicircular} \\ \frac{1}{2} \text{ de todo el área.}}}$$

el 1er $\frac{1}{2}$: deja pasar la mitad de la ventana transparente.

el 2º $\frac{1}{2}$: la mitad del área del círculo

$$f = x\cdot y + \frac{1}{16}\pi y^2$$

• Se introduce la ligadura en la función. Es más sencillo despejar la variable $x$ de la restricción.

$$x = \frac{1}{2}\left(P - y - \frac{\pi}{2}y\right) \rightarrow$$

$$f(y) = \frac{1}{2}\left(P - y - \frac{\pi}{2}y\right)\cdot y + \frac{\pi}{16}y^2 = \frac{P}{2}y - \frac{1}{2}y^2 - \frac{\pi}{4}y^2 + \frac{\pi}{16}y^2$$

$$\Rightarrow \boxed{f(y) = -\frac{1}{2}y^2 - \frac{3\pi}{16}y^2 + \frac{P}{2}y}$$

• 1ª y 2ª derivadas

$$f'(y) = -y - \frac{6\pi}{16}y + \frac{P}{2} = -y - \frac{3\pi}{8}y + \frac{P}{2}$$

$$f''(y) = -1 - \frac{3\pi}{8}$$

• Condición de extremo

$$f' = 0 \rightarrow y + \frac{3\pi}{8}y = \frac{P}{2} \Leftrightarrow y\cdot\frac{8+3\pi}{8} = \frac{P}{2} \Rightarrow y = \frac{4P}{8+3\pi}$$

$$f''\left(\frac{4P}{8+3\pi}\right) < 0 \rightarrow \text{máximo.}$$

• Solución:

$$\boxed{y = \frac{4P}{8+3\pi}} \rightarrow x = \frac{1}{2}\left(P - \frac{4P}{8+3\pi} - \frac{\pi}{2}\cdot\frac{4P}{8+3\pi}\right) = \frac{P}{2}\cdot\frac{2\cdot(8+3\pi) - 8 - 4\pi}{2(8+3\pi)}$$

$$\Rightarrow \boxed{x = \frac{P(\pi+4)}{2(8+3\pi)}}$$