1º Representa en la recta real los siguientes números explicando el procedimiento seguido:

a) $-\sqrt{10}$ b) $\dfrac{17}{3}$ c) $\dfrac{3-2\sqrt{5}}{5}$

2º Expresa en forma fraccionaria

a) $2,340676767......$ b) $2,340634063406......$

3º Racionaliza las siguientes expresiones:

a) $\dfrac{2+\sqrt{3}}{\sqrt[7]{5^2}}=$ b) $\dfrac{a}{a-2\sqrt{3b}}=$ c) $\dfrac{3-2\sqrt{5}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}=$

d) $\dfrac{2+\sqrt{3}}{\sqrt[7]{5^9}}=$ e) $\dfrac{3\sqrt{4}+2\sqrt{3}}{3\sqrt{4}-2\sqrt{3}}=$ f) $\dfrac{\sqrt{2}}{3\sqrt[3]{3}}=$

g) $\dfrac{2\sqrt{x}}{5\sqrt[3]{x^2}}=$ h) $\dfrac{1}{2+\sqrt{3}+\sqrt{5}}=$ i) $\dfrac{1}{\sqrt{3}\cdot\left(5-\sqrt{3}\right)}=$

4º Deduce el valor del número de oro a partir de su definición.

5º Demuestra que $\sqrt{2}$ es irracional.

6º Calcula los valores de x que cumplen las siguientes ecuaciones:

a) $|x-4|=3$ b) $|2x+5|=7$

c) $|3-4x|=2$ d) $|x|+|x-4|=7$

7º El aforo de un estadio de fútbol es de 25 000 espectadores. En un partido reciente el campo estaba prácticamente lleno. Un matemático muy dado a los porcentajes comprobó que el 15,555555…% de los espectadores estaban en el graderío sur y que el 24,524524524…% de los espectadores eran mujeres. ¿Cuántos espectadores asistieron al partido?

8º El patio de una cárcel es un cuadrado de 50 metros de lado. Un recluso pasea recorriendo el perímetro ABCD con una velocidad constante y otro los hace sobre una diagonal AC con la misma velocidad. Si parten simultáneamente del punto A, ¿volverán a encontrarse?

9º Operaciones con radicales:

a) $2\sqrt{3}+3\sqrt{108}-5\sqrt{12}$ b) $\dfrac{3}{5}\sqrt{\dfrac{5}{3}}-\dfrac{5}{3}\sqrt{\dfrac{3}{5}}+\sqrt{15}$ c) $4\sqrt[3]{81}-5\sqrt[3]{24}+2\sqrt[3]{78125}$

d) $\sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3}}}$ e) $\sqrt[5]{\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{4}}$ f) $\dfrac{\sqrt{x\sqrt{x}}}{\sqrt[3]{x}}$ g) $\sqrt{2\cdot\sqrt{\dfrac{\sqrt{72}}{\sqrt{2}+\sqrt{8}}}}$ h) $\sqrt[3]{\dfrac{15\sqrt{8}+3\sqrt{128}}{\sqrt{32}-\sqrt{18}}}$

10º Demuestra que si $p=\sqrt{6+4\sqrt{2}}-\sqrt{6-4\sqrt{2}}$, entonce p^2 es un número entero. Calcula su valor.

1º

a) $\boxed{-\sqrt{10}}$

Método

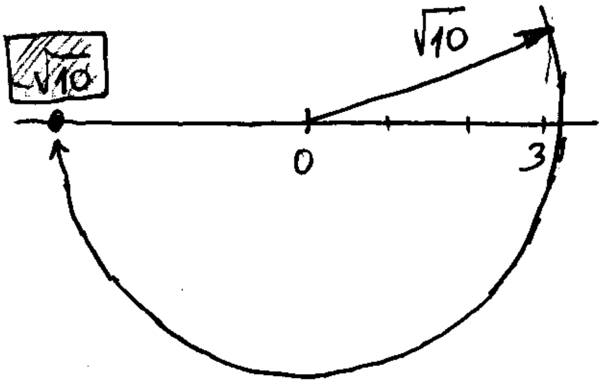
- 1. Se representa $+\sqrt{10}$

  Se busca el cuadrado perfecto más cercano a 10.

  $3^2 = 9 < 10 \longrightarrow 10 = 3^2 + 1^2$

  Teorema de Pitágoras

- 2. Se representa el opuesto de $\sqrt{10}$.



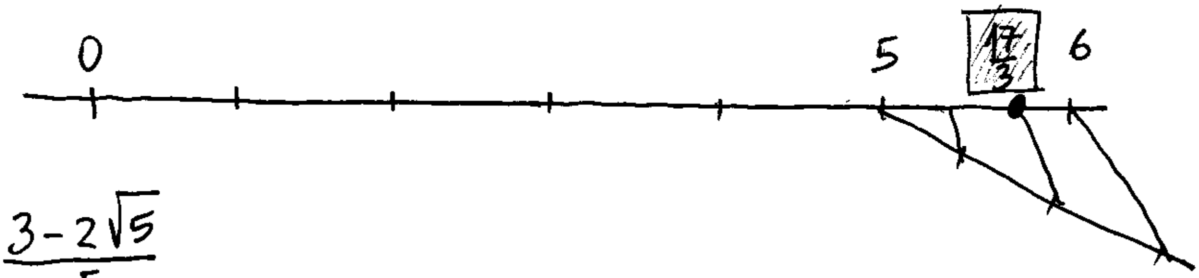
b) $\boxed{\frac{17}{3}}$

Método

- 1. Como $\frac{17}{3}$ es mayor que 1 se busca su parte entera

  $17 \,\underline{|\,3}$; cociente 5, resto 2 $\longrightarrow \frac{17}{3} = 5 + \frac{2}{3}$

• 2. Se aplica el teorema de Tales para encontrar $2/3$.

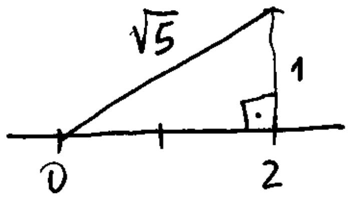


c) $\frac{3-2\sqrt{5}}{5}$

Método

• 1. Se representa $\sqrt{5}$

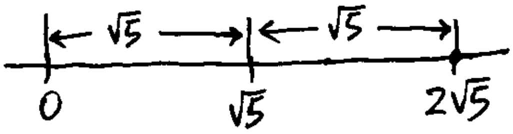
Teorema de Pitágoras $5 = 2^2 + 1^2$



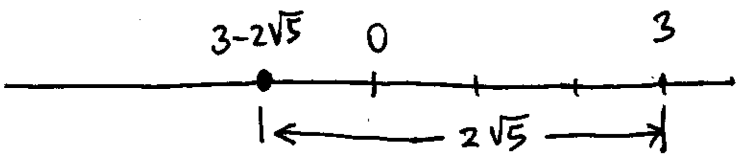
• 2. Se representa $2\sqrt{5}$

$2\sqrt{5} = \sqrt{5} + \sqrt{5}$

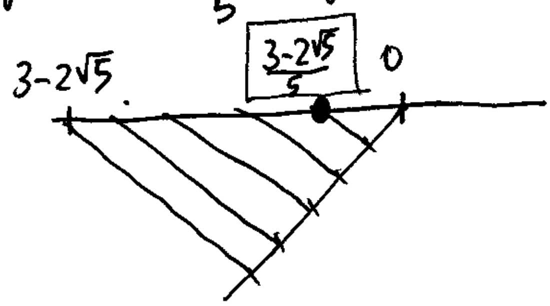
Con la medida $\sqrt{5}$ en el compás: se añade.



• 3. Se representa $3 - 2\sqrt{5}$



• 4. Se representa $\frac{3-2\sqrt{5}}{5}$ aplicando el teorema de Tales



2º

a) $2,340676767\ldots$

Se trata de un número decimal periódico mixto de anteperiodo $\boxed{340}$ y periodo $\boxed{67}$

$$A = 2,340676767\ldots$$

Para buscar 2 número con el mismo periodo se multiplicará por 100000 y 1000.

$$\begin{array}{rcl} 100000A & = & 234067,67\ldots \\ -\ 1000A & = & -\ 2340,67\ldots \\ \hline 99000\,A & = & 231727,00\ldots \end{array} \Rightarrow$$

$$A = \frac{231727}{99000}$$ Solución.

b) $2,340634063406\ldots$

Se trata de un número decimal periódico puro de periodo $\boxed{3406}$

$$A = 2,340634063406\ldots$$

Para buscar un número con el mismo periodo se multiplicará por 10000.

$$\begin{array}{rcl} 10000A & = & 23406,3406\ldots \\ -\ A & = & -\ 2,3406\ldots \\ \hline 9999A & = & 23404,0000\ldots \end{array} \Rightarrow$$

$$A = \frac{23404}{9999}$$ Solución.

3º

a) $\dfrac{2+\sqrt{3}}{\sqrt[7]{5^2}}$

• tipo $\sqrt[m]{a^n}$ con $m>n$.

• Método $\sqrt[7]{5^2}\cdot\boxed{\sqrt[7]{5^5}}=\sqrt[7]{5^7}=5$

$$\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt[7]{5^2}}\cdot\frac{\sqrt[7]{5^5}}{\sqrt[7]{5^5}}=\boxed{\frac{(2+\sqrt{3})\cdot\sqrt[7]{5^5}}{5}}$$

b) $\dfrac{a}{a-2\sqrt{3b}}$

• tipo $\sqrt{A}\pm\sqrt{B}$

• Método: Conjugado $(\sqrt{A}-\sqrt{B})\cdot(\sqrt{A}+\sqrt{B})=(\sqrt{A})^2-(\sqrt{B})^2=A-B$

$$\frac{a}{a-2\sqrt{3b}}\cdot\frac{a+2\sqrt{3b}}{a+2\sqrt{3b}}=\frac{a\cdot(a+2\sqrt{3b})}{a^2-(2\sqrt{3b})^2}=\boxed{\frac{a\cdot(a+2\sqrt{3b})}{a^2-12b}}$$

Cuidado con $(2\sqrt{3b})^2$: se trata del cuadrado de un producto
$=2^2\cdot(\sqrt{3b})^2=4\cdot3b=12b.$

c) $\dfrac{3-2\sqrt{5}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$

Es como el apartado b)

$$\frac{3-2\sqrt{5}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}=\frac{(3-2\sqrt{5})\cdot(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{(\sqrt{5})^2-(\sqrt{3})^2}=\boxed{\frac{(3-2\sqrt{5})\cdot(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{2}}$$

d) $\dfrac{2+\sqrt{3}}{\sqrt[7]{5^9}}$

tipo $\sqrt[m]{a^n}$. Observa que en $\sqrt[7]{5^9}$ $9>7 \Rightarrow$ se pueden extraer factores.

$$\sqrt[7]{5^9} = 5\cdot\sqrt[7]{5^2}$$

$$\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt[7]{5^9}} = \frac{2+\sqrt{3}}{5\cdot\sqrt[7]{5^2}}\cdot\frac{\sqrt[7]{5^2}}{\sqrt[7]{5^2}} = \frac{(2+\sqrt{3})\cdot\sqrt[7]{5^2}}{5\cdot 5} = \boxed{\frac{(2+\sqrt{3})\cdot\sqrt[7]{5^2}}{25}}$$

Otro método, sin sacar factores, sería buscar una potencia de 5 que multiplicada por 5^9 nos diera un exponente múltiplo de 7

$$\sqrt[7]{5^9}\cdot\sqrt[7]{5^5} = \sqrt[7]{5^{14}} = 5^2.$$

e) $\dfrac{3\sqrt{4}+2\sqrt{3}}{3\sqrt{4}-2\sqrt{3}}$

se multiplica y divide por el conjugado del denominador.

$$\frac{3\sqrt{4}+2\sqrt{3}}{3\sqrt{4}-2\sqrt{3}}\cdot\frac{3\sqrt{4}+2\sqrt{3}}{3\sqrt{4}+2\sqrt{3}} = \frac{(3\sqrt{4})^2+2\cdot3\sqrt{4}\cdot2\sqrt{3}+(2\sqrt{3})^2}{(3\sqrt{4})^2-(2\sqrt{3})^2}$$

$$= \frac{9\cdot4+12\sqrt{12}+4\cdot3}{9\cdot4-4\cdot3} = \frac{48+12\sqrt{12}}{24} = \frac{48+24\sqrt{3}}{24} = \boxed{2+\sqrt{3}}$$

$$\sqrt{12} = \sqrt{2^2\cdot3} = 2\sqrt{3}$$

Este mismo ejercicio puede hacerse más SENCILLO.

Observación 1.

$$\sqrt{4}=2 \rightarrow \quad \frac{3\sqrt{4}+2\sqrt{3}}{3\sqrt{4}-2\sqrt{3}} = \frac{6+2\sqrt{3}}{6-2\sqrt{3}}$$

$$\frac{6+2\sqrt{3}}{6-2\sqrt{3}} \cdot \frac{6+2\sqrt{3}}{6-2\sqrt{3}} = \frac{6^2+2\cdot 6\cdot 2\sqrt{3}+(2\sqrt{3})^2}{6^2-(2\sqrt{3})^2} = \frac{36+24\sqrt{3}+12}{36-12}$$

$$= \frac{48+24\sqrt{3}}{24} = \boxed{2+\sqrt{3}}$$

Observación 2.

Si introduces factores queda algo más limpio.

$$\frac{6+2\sqrt{3}}{6-2\sqrt{3}} = \frac{6+\sqrt{12}}{6-\sqrt{12}} \cdot \frac{6+\sqrt{12}}{6+\sqrt{12}} = \frac{6^2+2\cdot 6\cdot\sqrt{12}+(\sqrt{12})^2}{6^2-(\sqrt{12})^2} = \frac{48+12\sqrt{12}}{24}\ldots$$

f) $$\frac{\sqrt{2}}{3\sqrt[3]{3}} \cdot \frac{\sqrt[3]{3^2}}{\sqrt[3]{3^2}} = \frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{3^2}}{3\cdot 3} = \boxed{\frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{3^2}}{9}}$$

g) $$\frac{2\sqrt{x}}{5\sqrt[3]{x^2}} \cdot \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}} = \boxed{\frac{2\sqrt{x}\cdot\sqrt[3]{x}}{5\cdot x}}$$

h) $$\frac{1}{2+\sqrt{3}+\sqrt{5}}$$

Se repite el proceso del conjugado 2 veces

$$\frac{1}{2+\sqrt{3}+\sqrt{5}}\cdot\frac{2+\sqrt{3}-\sqrt{5}}{2+\sqrt{3}-\sqrt{5}}=\frac{2+\sqrt{3}-\sqrt{5}}{(2+\sqrt{3})^2-(\sqrt{5})^2}=\frac{2+\sqrt{3}-\sqrt{5}}{2^2+2\cdot2\cdot\sqrt{3}+(\sqrt{3})^2-(\sqrt{5})^2}$$

$$=\frac{2+\sqrt{3}-\sqrt{5}}{2+4\sqrt{3}}\cdot\frac{2-4\sqrt{3}}{2-4\sqrt{3}}=\frac{(2+\sqrt{3}-\sqrt{5})\cdot(2-4\sqrt{3})}{2^2-(4\sqrt{3})^2}$$

$$=\boxed{\frac{(2+\sqrt{3}-\sqrt{5})\cdot(2-4\sqrt{3})}{-44}}$$

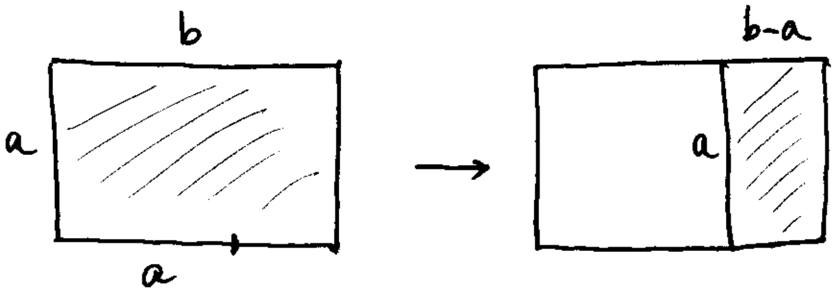
i) $\dfrac{1}{\sqrt{3}\cdot(5-\sqrt{3})}$

Eliminamos el paréntesis y luego aplicamos el método correspondiente

$$\frac{1}{5\sqrt{3}-3}\cdot\frac{5\sqrt{3}+3}{5\sqrt{3}+3}=\frac{5\sqrt{3}+3}{(5\sqrt{3})^2-3^2}=\boxed{\frac{5\sqrt{3}+3}{66}}$$

$$(5\sqrt{3})^2-3^2=25\cdot3-9=75-9=66.$$

(4º) Un rectángulo se dice que es de oro cuando sus dimensiones cumplen la siguiente condición.



Los rectángulos "sombreados" son SEMEJANTES

$$\boxed{\frac{b}{a}=\frac{a}{b-a}} \quad (1)$$

Sólo interesa saber qué relación guardan las dimensiones.

$$\frac{b}{a}=R=\frac{a}{b-a}$$

Expresemos la igualdad (1) en términos de R

$$\frac{b}{a}=\frac{a}{b-a} \iff \frac{b}{a}=\frac{a/a}{b/a-a/a} \iff \boxed{R=\frac{1}{R-1}} \iff$$

$$R\cdot(R-1)=1 \iff \boxed{R^2-R-1=0}$$

Resolviendo

$$R=\frac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-4\cdot 1\cdot(-1)}}{2\cdot 1}=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$$

(la solución $\frac{1-\sqrt{5}}{2}<0$ no tiene sentido) $\Rightarrow R=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

A esta cantidad se le denomina NÚMERO DE ORO $\boxed{\Phi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$

5º Demostración por reducción al absurdo.

Supongamos que

$\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ con $p, q \in \mathbb{Z}$ y primos entre sí (la fracción está simplificada)

$2 = \frac{p^2}{q^2} \Rightarrow p^2 = 2q^2 \Rightarrow p^2$ es PAR $\Rightarrow p$ es PAR $\Rightarrow p = 2a$

por lo tanto

$(2a)^2 = 2q^2 \Leftrightarrow 4a^2 = 2q^2 \Leftrightarrow q^2 = 2a^2 \Rightarrow q^2$ es PAR

$\Rightarrow q$ es PAR $\Rightarrow q = 2b$

Entonces

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q} = \frac{2a}{2b} = \frac{a}{b}$$

Contradicción: p y q serían pares y no lo pueden ser por hipótesis (PRIMOS ENTRE SI)

La demostración se puede generalizar para $\sqrt{n}$ siempre que n no sea un cuadrado perfecto.

6ª) Recuerda

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

la generalización es automática $|f(x)| = \begin{cases} f(x) & \text{si } f(x) \geq 0 \\ -f(x) & \text{si } f(x) < 0. \end{cases}$

a) $|x-4| = 3 \Rightarrow \begin{cases} x-4 = 3 \longrightarrow x = 7 \\ -(x-4) = 3 \longrightarrow -x = -1 \rightarrow x = 1. \end{cases}$

b) $|2x+5| = 7 \Rightarrow \begin{cases} 2x+5 = 7 \longrightarrow 2x = 2 \longrightarrow x = 1 \\ -(2x+5) = 7 \longrightarrow -2x = 12 \rightarrow x = -6. \end{cases}$

c) $|3-4x| = 2 \Rightarrow \begin{cases} 3-4x = 2 \longrightarrow -4x = -1 \longrightarrow x = 1/4 \\ -(3-4x) = 2 \longrightarrow 4x = 5 \longrightarrow x = 5/4. \end{cases}$

d) Hay que repetir el proceso 2 veces.

$$|x| + |x-4| = 7 \Rightarrow \begin{cases} x + |x-4| = 7 \Rightarrow \begin{cases} x+(x-4) = 7 \rightarrow 2x = 11 \rightarrow x = 11/2 \\ x-(x-4) = 7 \rightarrow 0 = 3 \text{ no tiene} \end{cases} \\ -x + |x-4| = 7 \Rightarrow \begin{cases} -x+(x-4) = 7 \rightarrow 0 = 3 \text{ no tiene} \\ -x-(x-4) = 7 \rightarrow -2x = 3 \rightarrow x = -3/2 \end{cases} \end{cases}$$

7ª Sea N el total de espectadores que acudieron al partido de fútbol

$N \in \mathbb{N}$. (es un entero positivo)

A es el número de espectadores del graderío sur.

$A = 15,\hat{5}\%$ de N

$a = 15,5.... \rightarrow$

$$\begin{array}{r} 10a = 155,5... \\ -a = -15,5 \\ \hline 9a = 140 \end{array} \rightarrow a = \frac{140}{9}$$

$$\Rightarrow A = \frac{140}{9} \cdot \frac{N}{100} = \frac{140N}{900} = \frac{7N}{45}.$$

como $A \in \mathbb{N} \Rightarrow$ N debe ser un múltiplo de 45. (para que la fracción $\frac{7N}{45}$ sea exacta)

B es el número de mujeres

$B = 24,\widehat{524}\%$ de N

$b = 24,524.... \rightarrow$

$$\begin{array}{r} 1000b = 24524,524... \\ -b = -24,524... \\ \hline 999b = 24500 \end{array} \longrightarrow b = \frac{24500}{999}$$

$$\Rightarrow B = \frac{24500}{999} \cdot \frac{N}{100} = \frac{245N}{999}$$

como $B \in \mathbb{N} \rightarrow$ N debe ser un múltiplo de 999 (para que la fracción $\frac{245N}{999}$ sea exacta).

CONCLUSIÓN: N debe ser múltiplo simultáneamente de 45 y 999 buscamos los múltiplos comunes de 45 y 999 mediante el mínimo común múltiplo

$$\begin{array}{r|l} 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 999 & 3 \\ 333 & 3 \\ 111 & 3 \\ 37 & 37 \\ 1 & \end{array} \qquad \Rightarrow m.c.m(45,999) = 3^3 \cdot 5 \cdot 37 = 4995$$

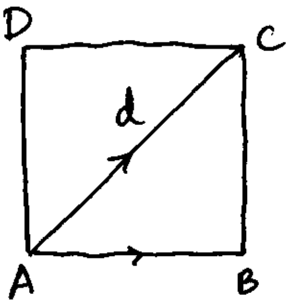
El número de espectadores debe ser múltiplo de 4995. (recuerda

$$N = \dot{4995} = \boxed{4995},\ 4995 \times 2 = \boxed{9990};\ 4995 \times 3 = \boxed{14985};$$

$$4995 \times 4 = \boxed{19980};\ 4995 \times 5 = \boxed{24975},\ 4995 \times 6 = \boxed{29970}, \ldots$$

$N < 25000$ y casi lleno $\Rightarrow \boxed{N = 24975}$ Solución.

8º



$l = 50$ metros

$d^2 = 50^2 + 50^2 \to d = \sqrt{5000} = 50\sqrt{2}$ metros

Sea P el preso que pasea por el perímetro. y Q el preso que pasea por la diagonal. Se pueden encontrar en A ó en C. Para ello cada uno debe recorrer un número entero (positivo) de lados o diagonales.

preso P: $n \cdot l = 50 \cdot n$, $n \in \mathbb{Z}$

preso Q: $m \cdot d = 50\sqrt{2} \cdot m$, $m \in \mathbb{Z}$.

encuentro $nl = md \iff 50n = 50\sqrt{2}\,m \to \boxed{\sqrt{2} = \frac{n}{m}}$

Es imposible hallar $m, n \in \mathbb{Z}$ pues $\sqrt{2} \in \mathbb{I}$.

9º

a) $\boxed{2\cdot\sqrt{3}+3\cdot\sqrt{108}-5\cdot\sqrt{12}=10\cdot\sqrt{3}}$

se extraen factores de $\sqrt{108}$ y $\sqrt{12}$

$$\begin{array}{r|l} 108 & 2 \\ 54 & 2 \\ 27 & 3 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad 108=2^2\cdot 3^3 \rightarrow \sqrt{108}=2\cdot 3\cdot\sqrt{3}=6\sqrt{3}$$

$$\begin{array}{r|l} 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad 12=2^2\cdot 3 \rightarrow \sqrt{12}=2\cdot\sqrt{3}.$$

$\Rightarrow 2\cdot\sqrt{3}+3\cdot 6\sqrt{3}-5\cdot 2\sqrt{3}=2\cdot\sqrt{3}+18\cdot\sqrt{3}-10\cdot\sqrt{3}$

se extrae factor común: $\sqrt{3} \Rightarrow$

$(2+18-10)\cdot\sqrt{3}=10\sqrt{3}$

b) $\boxed{\frac{3}{5}\sqrt{\frac{5}{3}}-\frac{5}{3}\cdot\sqrt{\frac{3}{5}}+\sqrt{15}=\frac{13\sqrt{15}}{15}}$

como hay fracciones se racionaliza

$$\sqrt{\frac{5}{3}}=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{15}}{3} \rightarrow \frac{3}{5}\sqrt{\frac{5}{3}}=\frac{\cancel{3}}{5}\cdot\frac{\sqrt{15}}{\cancel{3}}=\frac{\sqrt{15}}{5}$$

$$\sqrt{\frac{3}{5}}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}\cdot\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{15}}{5} \rightarrow \frac{5}{3}\sqrt{\frac{3}{5}}=\frac{\cancel{5}}{3}\cdot\frac{\sqrt{15}}{\cancel{5}}=\frac{\sqrt{15}}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{15}}{5}-\frac{\sqrt{15}}{3}+\sqrt{15}=\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{3}+1\right)\cdot\sqrt{15}=\frac{3-5+15}{15}\sqrt{15}$$

c) $\boxed{4\sqrt[3]{81} - 5\sqrt[3]{24} + 2\sqrt[3]{78125} = 2\sqrt[3]{3} + 50\sqrt[3]{5}}$

$$\begin{array}{r|l} 81 & 3 \\ 27 & 3 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad 81 = 3^4. \quad \sqrt[3]{81} = 3\sqrt[3]{3}$$

$$\begin{array}{r|l} 24 & 2 \\ 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad 24 = 2^3 \cdot 3 \quad \sqrt[3]{24} = 2\cdot\sqrt[3]{3}$$

$$\begin{array}{r|l} 78125 & 5 \\ 15625 & 5 \\ 3125 & 5 \\ 625 & 5 \\ 125 & 5 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad 78125 = 5^7 \quad \sqrt[3]{78125} = 5^2\cdot\sqrt[3]{5}$$

$$\Rrightarrow 4\cdot3\sqrt[3]{3} - 5\cdot2\sqrt[3]{3} + 2\cdot25\sqrt[3]{5} =$$

$$12\sqrt[3]{3} - 10\sqrt[3]{3} + 50\sqrt[3]{5} = (12-10)\cdot\sqrt[3]{3} + 50\sqrt[3]{5}$$

d) $\boxed{\sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3}}} = \sqrt[8]{3^7}}$

se introducen los "3" de dentro a fuera.

$$\sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3}}} = \sqrt{3\sqrt{\sqrt{3^3}}} = \sqrt{3\sqrt[4]{3^3}} = \sqrt{\sqrt[4]{3^4\cdot3^3}} \Rrightarrow$$

e) $\boxed{\sqrt[5]{\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{4}} = \sqrt[30]{128}}$

1º se efectúa el producto $\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{4} = \sqrt[6]{2^3}\cdot\sqrt[6]{4^2}$

$$= \sqrt[6]{2^3\cdot4^2} = \sqrt[6]{2^3\cdot2^4} = \sqrt[6]{2^7}$$

2º $\sqrt[5]{\sqrt[6]{2^7}} = \sqrt[30]{2^7} = \sqrt[30]{128}$

f) $$\boxed{\frac{\sqrt{x\sqrt{x}}}{\sqrt[3]{x}} = \sqrt[12]{x^5}}$$

1º/ efectuamos el numerador $\sqrt{x\sqrt{x}} = \sqrt{\sqrt{x^2 \cdot x}} = \sqrt[4]{x^3}$

2º/ racionalizamos

$$\frac{\sqrt[4]{x^3}}{\sqrt[3]{x}} = \frac{\sqrt[4]{x^3}}{\sqrt[3]{x}} \cdot \frac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x^2}} = \frac{\sqrt[4]{x^3} \cdot \sqrt[3]{x^2}}{x}$$

3º/ reduzcamos el numerador de esta fracción: mismo índice.

m.c.m $(4,3) = 12$

$$\sqrt[4]{x^3} \cdot \sqrt[3]{x^2} = \sqrt[12]{x^9} \cdot \sqrt[12]{x^8} = \sqrt[12]{x^{17}} = x \cdot \sqrt[12]{x^5}$$

$$\Rightarrow \frac{x \cdot \sqrt[12]{x^5}}{x} = \sqrt[12]{x^5}$$

g) $$\boxed{\sqrt{2 \cdot \sqrt{\frac{\sqrt{72}}{\sqrt{2} + \sqrt{8}}}} = \sqrt[4]{8}}$$

se procede de dentro a fuera.

- $\sqrt{72}$

72	2
36	2
18	2
9	3
3	3
1	

$72 = 2^3 \cdot 3^2 \rightarrow \sqrt{72} = 2 \cdot 3 \cdot \sqrt{2} = 6 \cdot \sqrt{2}$.

- $\sqrt{8} = \sqrt{2^3} = 2\cdot\sqrt{2}$
- $\sqrt{2}+\sqrt{8} = \sqrt{2}+2\cdot\sqrt{2} = 3\cdot\sqrt{2}$
- $\dfrac{\sqrt{72}}{\sqrt{2}+\sqrt{8}} = \dfrac{6\sqrt{2}}{3\sqrt{2}} = 2$
- $\sqrt{2\cdot\underbrace{\sqrt{\dfrac{\sqrt{72}}{\sqrt{2}+\sqrt{8}}}}} = \sqrt{2\cdot\sqrt{2}} = \sqrt{\sqrt{2^3}} = \sqrt[4]{2^3} = \sqrt[4]{8}$

h) $\boxed{\sqrt[3]{\dfrac{15\sqrt{8}+3\sqrt{128}}{\sqrt{32}-\sqrt{18}}} = 3\sqrt[3]{2}}$

Extraemos factores del radicando:

$$\left.\begin{aligned} \sqrt{8} &= 2\sqrt{2} \\ \sqrt{128} &= \sqrt{2^7} = 2^3\cdot\sqrt{2} = 8\sqrt{2} \\ \sqrt{32} &= \sqrt{2^5} = 2^2\cdot\sqrt{2} = 4\cdot\sqrt{2} \\ \sqrt{18} &= \sqrt{2\cdot 3^2} = 3\cdot\sqrt{2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\frac{15\cdot 2\sqrt{2}+3\cdot 8\sqrt{2}}{4\cdot\sqrt{2}-3\cdot\sqrt{2}} = \frac{54\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \sqrt{54}$$

$$\Rightarrow \sqrt[3]{54} = \sqrt[3]{2\cdot 3^3} = 3\cdot\sqrt[3]{2}$$

10º

Si $p = \sqrt{6+4\sqrt{2}} - \sqrt{6-4\sqrt{2}}$

entonces $p^2 = \left(\sqrt{6+4\sqrt{2}} - \sqrt{6-4\sqrt{2}}\right)^2 =$

$$= \left(\sqrt{6+4\sqrt{2}}\right)^2 - 2\cdot\sqrt{6+4\sqrt{2}}\cdot\sqrt{6-4\sqrt{2}} + \left(\sqrt{6-4\sqrt{2}}\right)^2$$

Observa que el doble producto es una SUMA por una DIFERENCIA.

$$(6+4\sqrt{2})\cdot(6-4\sqrt{2}) = 6^2-(4\sqrt{2})^2 = 36-16\cdot 2 = 4.$$

$$\Rightarrow p^2 = 6+\cancel{4\sqrt{2}} - 2\cdot\underbrace{\sqrt{4}}_{2} + 6-\cancel{4\sqrt{2}} = 12-4 = 8.$$

$$\Rightarrow p^2 = 8. \rightarrow \boxed{p = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}}$$