1º Expresa en forma científica los siguientes números:

a) 54^{89}, b) 148^{-290}, c) 3^{5^7}

2º Con la ayuda del logaritmo, calcula el valor de x en cada una de las siguientes ecuaciones:

a) $1{,}025^x = 3{,}75$ b) $6\cdot 5^{2x+1} = 50$ c) $\log_x \frac{\sqrt{2}}{2} = 8$ d) $\log_{0,1} x = -6$

3º Sabiendo que log2=0,301030 calcula:

a) $\log\sqrt[3]{0{,}0025}$ b) $\log\frac{2048}{\sqrt[7]{625}}$

4º Aplicando la definición, calcula:

a) $\log_{\frac{1}{3}} 81$ b) $\log_{\sqrt{2}} 64$ c) $\log_3 \frac{1}{3}$

5º Descubre el error del siguiente razonamiento:

Si $1<2 \Rightarrow 1\cdot \boxed{\log\left(\frac{1}{2}\right)} < 2\cdot\boxed{\log\left(\frac{1}{2}\right)} \Leftrightarrow \log\left(\frac{1}{2}\right) < \log\left(\frac{1}{2}\right)^2 \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right) < \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{1}{2} < \frac{1}{4}$???,

6º Dada la sucesión $a_n = \frac{3n-5}{n+2}$. Calcula su límite. ¿A partir de qué término la diferencia con su límites es menor que 0,0001?

7º Calcula los siguientes límites.

En cada uno de los límites debe sindicar:

1.- Tipo de indeterminación.
2.- Método que se aplica.
3.- Solución del ejercicio.

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n^3-3n+2}{4n^4-5}$ b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{-2n^4-3n+2}{4n^3-5}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\left(n^2+1\right)^2-3n^2+2}{n^3-5}$ d) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{7n-1}{\sqrt{3n^2+5n-1}}$

e) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n^2+4n-6}{n+2}-3n$ f) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n^2}{n+1}-\frac{n^2+1}{n-2}\right)$

g) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n^2-2}-\sqrt{n^2+n}$ h) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n^2+3n}-\sqrt{n^2+n}$

i) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n+2}\right)^{n-1}$ j) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{3n^2}{n^3+2}\right)^{n+1}$

k) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n-3}{n+2}\right)^{2n-1}$ l) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1-\frac{2}{3n}\right)^{n}$

m) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{2n+1}{2n-3}\right)^{\frac{n^2}{n+3}}$ n) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3...}}}}}$

(1º) Expresión de números grandes en notación científica. Si pruebas con una calculadora (normal) a hacer 54^{89} seguramente te dé ERROR. ¿Cómo resolverlo?

a) 54^{89}

$$54^{89} = 10^N$$

tomando logaritmos $\log 10^N = \log 54^{89} \Leftrightarrow$

$$N \cdot \log 10 = 89 \cdot \log 54 \Rightarrow$$

$$N \simeq 154{,}183 \Rightarrow$$

$$54^{89} \simeq 10^{154{,}183} = 10^{0{,}183+154} = 10^{0{,}183} \cdot 10^{154}$$

$$10^{0{,}183} \simeq 1{,}524$$

$$\Rightarrow \boxed{54^{89} \simeq 1{,}524 \cdot 10^{154}}$$

b) $148^{-290} = 10^N$

tomando logaritmos

$$\log 10^N = \log 148^{-290} \Leftrightarrow N \cdot \underbrace{\log 10}_{1} = -290 \cdot \log 148$$

$$\Rightarrow N \simeq -629{,}375 \Rightarrow$$

$$148^{-290} = 10^{-629{,}375} = 10^{-0{,}375-629} = 10^{-0{,}375} \cdot 10^{-629}$$

$$10^{-0{,}375} = 0{,}420 = 4{,}2 \cdot 10^{-1}$$

$$\Rightarrow 148^{-290} = 4{,}2 \cdot 10^{-1} \cdot 10^{-629} \Rightarrow \boxed{148^{-290} \simeq 4{,}2 \cdot 10^{-630}}$$

c) En este tipo de potencias se procede de arriba a abajo.

$$5^7 = 78125 \rightarrow 3^{5^7} = 3^{78125}$$

$$10^N = 3^{78125}$$

$$\log 10^N = \log 3^{78125} \Leftrightarrow N \cdot \log 10 = 78125 \cdot \log 3 \Rightarrow$$

$$N \simeq 37275{,}098 \rightarrow$$

$$3^{5^7} = 10^{37275{,}098} = 10^{0{,}098 + 37275}$$

$$= 10^{0{,}098} \cdot 10^{37275} = 1{,}253 \cdot 10^{37275}$$

Solución:

$$\boxed{3^{5^7} \simeq 1{,}253 \cdot 10^{37275}}$$

2º Recuerda

$$\log_a b = x \iff a^x = b \iff a^{\log_a b} = b \quad (a, b > 0)$$

$$\log_a (A \cdot B) = \log_a A + \log_a B \quad \bullet \quad \log_a A^n = n \cdot \log_a A.$$

si A y B son >0 y $A > B \rightarrow \log A > \log B$.

Este argumento es válido también si $A = B$ y si $A < B$.

ⓐ $\boxed{1{,}025^x = 3{,}75}$

tomando logaritmos $\log 1{,}025^x = \log 3{,}75 \rightarrow$

$$x \cdot \log 1{,}025 = \log 3{,}75 \Rightarrow \boxed{x = \frac{\log 3{,}75}{\log 1{,}025}}$$

ⓑ $\boxed{6 \cdot 5^{2x+1} = 50} \iff 5^{2x+1} = \frac{50}{6} = \frac{25}{3}$

$$\log 5^{2x+1} = \log \frac{25}{3} \rightarrow (2x+1) \cdot \log 5 = \log \frac{25}{3} \rightarrow$$

$$2x+1 = \frac{\log 25/3}{\log 5} \rightarrow \boxed{x = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\log 25/3}{\log 5} - 1 \right)}$$

ⓒ $\log_x \frac{\sqrt{2}}{2} = 8 \Rightarrow x^8 = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \boxed{x = +\sqrt[8]{\frac{\sqrt{2}}{2}}}$

sólo es válida la raíz positiva.

ⓓ $\log_{0{,}1} x = -6 \Rightarrow \boxed{x = 0{,}1^{-6} = 10^6}$

3º

ⓐ $\boxed{\log \sqrt[3]{0{,}0025} = -0{,}867353}$

$$0{,}0025 = \frac{25}{10000} = \frac{1}{400}$$

La IDEA es expresar el argumento del logaritmo (en este caso 0,0025; pues $\sqrt[3]{\ }$ "sale" como una potencia) en términos de potencias de base 2 y base 10 porque

$$\log 2^n = n \cdot \log 2 = n \cdot 0{,}301030.$$

$$\log 10^m = m \cdot \log 10 = m.$$

$$\log \sqrt[3]{0{,}0025} = \log 0{,}0025^{1/3} = \frac{1}{3} \cdot \log 0{,}0025 = \frac{1}{3} \cdot \log \frac{1}{400}$$

$$= \frac{1}{3} \cdot (\log 1 - \log 400) = -\frac{1}{3} \log 400 = -\frac{1}{3} \cdot \log (2^2 \cdot 10^2) =$$

$$= -\frac{1}{3} \cdot \left(\log 2^2 + \log 10^2 \right) = -\frac{1}{3} \left(2 \cdot \log 2 + 2 \cdot \log 10 \right) =$$

$$= -\frac{1}{3} \left(2 + 2 \log 2 \right) = -0{,}867353$$

ⓑ $\boxed{\log \frac{2048}{\sqrt[7]{625}} = 2{,}911918}$

$$\log 2048 - \log 625^{1/7} = \log 2048 - \frac{1}{7} \log 625$$

$$2048 = 2^{11} \longrightarrow \log 2048 = \log 2^{11} = 11 \cdot \log 2$$

$$625 = 5^4 = \left(\frac{10}{2}\right)^4 \longrightarrow \log 625 = \log \left(\frac{10}{2}\right)^4 = 4 \cdot \log\left(\frac{10}{2}\right) = 4 \cdot (\log 10 - \log 2)$$

$$= 4 \cdot (1 - \log 2)$$

$$\Rightarrow \log \frac{2048}{\sqrt[7]{625}} = 11 \cdot \log 2 - \frac{4}{7} \cdot (1 - \log 2)$$

4º

a) $\boxed{\log_{\frac{1}{3}} 81 = -4}$

se trata de expresar 81 en términos de $\frac{1}{3}$ para poder aplicar

$$\log_a a^n = n \cdot \log_a a = n$$

$$81 = 3^4 \qquad 3 = \left(\frac{1}{3}\right)^{-1} \rightarrow 81 = \left[\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}\right]^4 = \left(\frac{1}{3}\right)^{-4}$$

$$\log_{\frac{1}{3}} 81 = \log_{\frac{1}{3}} \left(\frac{1}{3}\right)^{-4} = -4 \cdot \log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{3}\right) = -4$$

Puedes comprobar el resultado con la calculadora

$$\log_{1/3} 81 = \frac{\ln 81}{\ln 1/3} = -4$$

b) $\boxed{\log_{\sqrt{2}} 64 = 12}$

$$64 = 2^6 \quad y \quad 2 = (\sqrt{2})^2 \Rightarrow 64 = \left[(\sqrt{2})^2\right]^6 = (\sqrt{2})^{12}$$

$$\log_{\sqrt{2}} 64 = \log_{\sqrt{2}} (\sqrt{2})^{12} = 12 \cdot \log_{\sqrt{2}} \sqrt{2} = 12$$

c) $\boxed{\log_3 \frac{1}{3} = -1}$

$$\frac{1}{3} = 3^{-1} \rightarrow \log_3 \frac{1}{3} = \log_3 3^{-1} = -1 \cdot \log_3 3 = -1$$

5º Recuerda que si multiplicas o divides por un número NEGATIVO los 2 miembros de una desigualdad esta cambia de sentido.

sea $a<0 \Rightarrow$ si $A<B \Rightarrow a\cdot A > a\cdot B$

si $A>B \Rightarrow a\cdot A < a\cdot B$.

Error: $\log\frac{1}{2}<0 \Rightarrow$ si $1<2 \Rightarrow 1\cdot\log\frac{1}{2} > 2\cdot\log\frac{1}{2}$

6º $\lim_{n\to\infty}\frac{3n-5}{n+2}=\lim_{n\to\infty}\frac{3-\frac{5}{n}}{1+\frac{2}{n}}=3.$

$\left|\frac{3n-5}{n+2}-3\right|<0{,}0001 \iff$

$\left|\frac{3n-5-3(n+2)}{n+2}\right|<0{,}0001 \iff$

$\left|\frac{3n-5-3n-6}{n+2}\right|<0{,}0001 \iff$

$\left|\frac{-11}{n+2}\right|<0{,}0001 \iff$

$\frac{11}{n+2}<0{,}0001 \iff \frac{11}{0{,}0001}<n+2 \iff$

$110000<n+2 \iff 110000-2<n \Rightarrow$

$\boxed{n>109998}$

A partir del término 109998 la diferencia entre el termino y 3 es menor de 0,0001.

7°

a) $$\boxed{\lim_{n\to\infty} \frac{2n^3-3n+2}{4n^4-5} = 0}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^3-3n+2}{4\boxed{n^4}-5} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) \underset{(\cdot)}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2n^3}{n^4} - \frac{3n}{n^4} + \frac{2}{n^4}}{\frac{4n^4}{n^4} - \frac{5}{n^4}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2}{n} - \frac{3}{n^3} + \frac{2}{n^4}}{4 - \frac{5}{n^4}} = \frac{0-0+0}{4-0} = \frac{0}{4} = 0$$

(·) se divide cada término por la mayor potencia del denominador : n^4

b) $$\boxed{\lim_{n\to\infty} \frac{-2n^4-3n+2}{4n^3-5} = -\infty}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{-2n^4-3n+2}{4\boxed{n^3}-5} = \left(\frac{-\infty}{\infty}\right) \overset{(\cdot)}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{-2n^4}{n^3} - \frac{3n}{n^3} + \frac{2}{n^3}}{\frac{4n^3}{n^3} - \frac{5}{n^3}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{-2n - \frac{3}{n^2} + \frac{2}{n^3}}{4 - \frac{5}{n^3}} = \frac{-\infty - 0 + 0}{4-0} = \frac{-\infty}{4} = -\infty$$

c) $$\boxed{\lim_{n\to\infty} \frac{(n^2+1)^2-3n^2+2}{n^3-5} = \infty}$$

Operamos en el numerador para expresar la sucesión como un límite de un cociente de polinomios.

$$(n^2+1)^2 - 3n^2+2 = n^4+2n^2+1-3n^2+2 = n^4 - n^2+3$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^4-n^2+3}{n^3-5} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n^4}{n^3}-\frac{n^2}{n^3}+\frac{3}{n^3}}{\frac{n^3}{n^3}-\frac{5}{n^3}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n-\frac{1}{n}+\frac{3}{n^3}}{1-\frac{5}{n^3}} = \frac{\infty-0+0}{1-0} = \frac{\infty}{1} = \infty$$

d) $$\boxed{\lim_{n\to\infty} \frac{7n-1}{\sqrt{3n^2+5n-1}} = \frac{7}{\sqrt{3}} = \frac{7\sqrt{3}}{3}}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{7n-1}{\sqrt{3n^2+5n-1}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) \underset{(*)}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{7n}{n}-\frac{1}{n}}{\frac{\sqrt{3n^2+5n-1}}{n}}$$

la mayor potencia de $\sqrt{3n^2+5n-1}$ es $\sqrt{n^2} = n$. (se toma la raíz de la mayor potencia del radicando. (sin coeficientes)

$$\sqrt{3n^2+5n-1} \sim \sqrt{3n^2} \sim \sqrt{n^2} = \boxed{n}.$$

Recuerda cómo se divide

$$\frac{\sqrt{3n^2+5n-1}}{n} = \frac{\sqrt{3n^2+5n-1}}{\sqrt{n^2}} = \sqrt{\frac{3n^2+5n-1}{n^2}} = \sqrt{\frac{3n^2}{n^2}+\frac{5n}{n^2}-\frac{1}{n^2}}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{7n}{n}-\frac{1}{n}}{\sqrt{\frac{3n^2}{n^2}+\frac{5n}{n^2}-\frac{1}{n^2}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{7-\frac{1}{n}}{\sqrt{3+\frac{5}{n}-\frac{1}{n^2}}} = \frac{7-0}{\sqrt{3+0-0}} = \frac{7}{\sqrt{3}}$$

e) $\boxed{\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2+4n-6}{n+2} - 3n = -2}$

Se efectúa la resta para expresar la sucesión como un cociente de polinomios en n

$$\frac{3n^2+4n-6}{n+2} - 3n = \frac{3n^2+4n-6-3n\cdot(n+2)}{n+2} = \frac{3n^2+4n-6-3n^2-6n}{n+2}$$

$$= \frac{-2n-6}{n+2}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{-2n-6}{n+2} = \left(\frac{-\infty}{\infty}\right) \underset{(*)}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{-2n}{n} - \frac{6}{n}}{\frac{n}{n} + \frac{2}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{-2-\frac{6}{n}}{1+\frac{2}{n}} = \frac{-2-0}{1+0} = -2$$

f) $\boxed{\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^2}{n+1} - \frac{n^2+1}{n-2}\right) = -3}$

Se efectúa la resta de las fracciones para expresar la sucesión como un cociente de polinomios en n.

$$\frac{n^2}{n+1} - \frac{n^2+1}{n-2} = \frac{n^2\cdot(n-2)-(n+1)\cdot(n^2+1)}{(n+1)\cdot(n-2)} =$$

$$= \frac{\cancel{n^3}-2n^2-\cancel{n^3}-n-n^2-1}{n^2-2n+n-2} = \frac{-3n^2-n-1}{n^2-n-2}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{-3n^2-n-1}{n^2-n-2} = \left(\frac{-\infty}{\infty}\right) \underset{(*)}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{-\frac{3n^2}{n^2} - \frac{n}{n^2} - \frac{1}{n^2}}{\frac{n^2}{n^2} - \frac{n}{n^2} - \frac{2}{n^2}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{-3-\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}}{1-\frac{1}{n}-\frac{2}{n^2}} = \frac{-3-0-0}{1-0-0} = -3$$

g) $\boxed{\lim_{n\to\infty} \sqrt{n^2-2} - \sqrt{n^2+n} = \frac{-1}{2}}$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n^2-2} - \sqrt{n^2+n} = (\infty - \infty) \overset{(\bullet\bullet)}{=}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left(\sqrt{n^2-2} - \sqrt{n^2+n}\right) \cdot \left(\sqrt{n^2-2} + \sqrt{n^2+n}\right)}{\sqrt{n^2-2} + \sqrt{n^2+n}} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left(\sqrt{n^2-2}\right)^2 - \left(\sqrt{n^2+n}\right)^2}{\sqrt{n^2-2} + \sqrt{n^2+n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2-2-n^2-n}{\sqrt{n^2-2} + \sqrt{n^2+n}} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{-2-n}{\sqrt{n^2-2} + \sqrt{n^2+n}} = \left(\frac{-\infty}{\infty}\right) \overset{(\bullet)}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{-2}{n} - \frac{n}{n}}{\frac{\sqrt{n^2-2}}{n} + \frac{\sqrt{n^2+n}}{n}} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{-2}{n} - 1}{\sqrt{1-\frac{2}{n^2}} + \sqrt{1+\frac{1}{n}}} = \frac{-0-1}{\sqrt{1-0} + \sqrt{1+0}} = \frac{-1}{2}$$

($\bullet\bullet$) se multiplica y divide por el conjugado.

h) $\boxed{\lim_{n\to\infty} \sqrt{n^2+3n} - \sqrt{n^2+n} = 1}$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n^2+3n} - \sqrt{n^2+n} = (\infty - \infty) \overset{(\bullet\bullet)}{=}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left(\sqrt{n^2+3n} - \sqrt{n^2+n}\right) \cdot \left(\sqrt{n^2+3n} + \sqrt{n^2+n}\right)}{\sqrt{n^2+3n} + \sqrt{n^2+n}} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left(\sqrt{n^2+3n}\right)^2 - \left(\sqrt{n^2+n}\right)^2}{\sqrt{n^2+3n} + \sqrt{n^2+n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n^2+3n) - (n^2+n)}{\sqrt{n^2+3n} + \sqrt{n^2+n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+3n-n^2-n}{\sqrt{n^2+3n}+\sqrt{n^2+n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n}{\sqrt{n^2+3n}+\sqrt{n^2+n}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) \overset{(\bullet)}{=}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2n}{n}}{\frac{\sqrt{n^2+3n}}{n}+\frac{\sqrt{n^2+n}}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{\sqrt{1+\frac{3}{n}}+\sqrt{1+\frac{1}{n}}} = \frac{2}{2} = 1$$

$$\frac{\sqrt{n^2+3n}}{n} = \frac{\sqrt{n^2+3n}}{\sqrt{n^2}} = \sqrt{\frac{n^2+3n}{n^2}} = \sqrt{\frac{n^2}{n^2}+\frac{3n}{n^2}} = \sqrt{1+\frac{3}{n}}$$

$$\sqrt{1+\frac{3}{n}} + \sqrt{1+\frac{1}{n}} \to \sqrt{1+0}+\sqrt{1+0} = \sqrt{1}+\sqrt{1} = 2.$$

- Para los límites del tipo (1^∞) hay 2 procedimientos

Método 1. Por construcción.

Método 2. Fórmula.

$$\lim_{n\to\infty} a_n^{b_n} = (1^\infty) = e^{\lim_{n\to\infty}(a_n-1)\cdot b_n}$$

i) $$\boxed{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+2}\right)^{n-1} = (1^\infty) = e}$$

Construcción:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+2}\right)^{n-1} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+2}\right)^{(n+2)\cdot\frac{n-1}{n+2}} =$$

$$\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n+2}\right)^{n+2}\right]^{\frac{n-1}{n+2}} = e^1 = e$$

Fórmula.

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+2}\right)^{n-1}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+2}-1\right)\cdot(n-1)}$$

$$=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n-1}{n+2}}=e^{1}=e.$$

j) $\boxed{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{3n^2}{n^3+2}\right)^{n+1}=(1^{\infty})=e^3}$

Construcción.

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{3n^2}{n^3+2}\right)^{n+1}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{n^3+2}{3n^2}}\right)^{n+1}=$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{n^3+2}{3n^2}}\right)^{\frac{n^3+2}{3n^2}\cdot(n+1)\cdot\frac{3n^2}{n^3+2}}=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{n^3+2}{3n^2}}\right)^{\frac{n^3+2}{3n^2}}\right]^{\frac{(n+1)\cdot 3n^2}{n^3+2}}=e^3$$

ahora $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)\cdot 3n^2}{n^3+2}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n^3+3n^2}{n^3+2}=3$

Fórmula

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{3n^2}{n^3+2}\right)^{n+1}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{3n^2}{n^3+2}-1\right)\cdot(n+1)}$$

$$=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n^2\cdot(n+1)}{n^3+2}}=e^3.$$

k) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n-3}{n+2}\right)^{2n-1} = (1^{\infty})$

Construcción

$$\begin{array}{r|l} n-3 & n+2 \\ \hline -n-2 & 1 \\ \hline -5 & \end{array} \Rightarrow \frac{n-3}{n+2} = 1 + \frac{-5}{n+2}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-3}{n+2}\right)^{2n-1} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{-5}{n+2}\right)^{2n-1} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{n+2}{-5}}\right)^{2n-1}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{n+2}{-5}}\right)^{\frac{n+2}{-5}\cdot(2n-1)\cdot\frac{-5}{n+2}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{n+2}{-5}}\right)^{\frac{n+2}{-5}}\right]^{\frac{-5(2n-1)}{n+2}} = e^{-10}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{-5(2n-1)}{n+2} = \lim_{n\to\infty}\frac{-10n+5}{n+2} = -10.$$

Fórmula

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-3}{n+2}\right)^{2n-1} = e^{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n-3}{n+2}-1\right)\cdot(2n-1)} = e^{-10}$$

trabajando el exponente: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n-3-(n+2)}{n+2}\cdot(2n-1) =$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{n-3-n-2}{n+2}\cdot(2n-1) = \lim_{n\to\infty}\frac{-5\cdot(2n-1)}{n+2} = -10$$

l) $\boxed{\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{2}{3n}\right)^{n}=\left(1^{\infty}\right)=e^{-\frac{2}{3}}}$

Construcción

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{2}{3n}\right)^{n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{-2}{3n}\right)^{n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{3n}{-2}}\right)^{n}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{3n}{-2}}\right)^{\frac{3n}{-2}\cdot n\cdot\frac{-2}{3n}}=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{3n}{-2}}\right)^{\frac{3n}{-2}}\right]^{\frac{-2n}{3n}}=e^{-2/3}$$

Formula

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{2}{3n}\right)^{n}=e^{\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{2}{3n}-1\right)\cdot n}=e^{\lim_{n\to\infty}\frac{-2n}{3n}}=e^{-2/3}$$

m) $\boxed{\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+1}{2n-3}\right)^{\frac{n^2}{n+3}}=\left(1^{\infty}\right)=e^{2}}$

Construcción

$$\begin{array}{r|l} 2n+1 & 2n-3 \\ -2n+3 & 1 \\ \hline 4 & \end{array}\Rightarrow\frac{2n+1}{2n-3}=1+\frac{4}{2n-3}=1+\frac{1}{\frac{2n-3}{4}}.$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+1}{2n-3}\right)^{\frac{n^2}{n+3}}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{2n-3}{4}}\right)^{\frac{2n-3}{4}\cdot\frac{n^2}{n+3}\cdot\frac{4}{2n-3}}=$$

$$\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{2n-3}{4}}\right)^{\frac{2n-3}{4}}\right]^{\frac{4n^2}{(n+3)\cdot(2n-3)}}=e^{2}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{4n^2}{(n+3)\cdot(2n-3)}=\lim_{n\to\infty}\frac{4n^2}{2n^2-3n+6n-9}=\frac{4}{2}=2$$

Fórmula.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+1}{2n-3}\right)^{\frac{n^2}{n+3}} = e^{\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+1}{2n-3}-1\right)\cdot\frac{n^2}{n+3}} = e^2$$

trabajando el exponente:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1-(2n-3)}{2n-3}\cdot\frac{n^2}{n+3} = \lim_{n\to\infty}\frac{2n+1-2n+3}{2n-3}\cdot\frac{n^2}{n+3}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{4n^2}{(2n-3)\cdot(n+3)} = 2$$

n) $\boxed{\lim_{n\to\infty}\sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3\ldots}}} = 3}$

Busquemos el término general de la sucesión.

$$a_1 = \sqrt{3} = 3^{1/2}$$

$$a_2 = \sqrt{3\sqrt{3}} = \sqrt{\sqrt{3^3}} = \sqrt[4]{3^3} = 3^{3/4}$$

$$a_3 = \sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3}}} = \sqrt{\sqrt{3^3\sqrt{3}}} = \sqrt{\sqrt{\sqrt{3^7}}} = \sqrt[8]{3^7} = 3^{7/8}$$

los exponentes son

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}, \ldots \right. \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}, \frac{2^2-1}{2^2}, \frac{2^3-1}{2^3}, \ldots\right.$$

fácilmente se observa que el término general es $\frac{2^n-1}{2^n}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^n-1}{2^n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2^n}{2^n}-\frac{1}{2^n}\right) = 1$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3\ldots}}} = \lim_{n\to\infty} 3^{\frac{2^n-1}{2^n}} = 3$$