

1. Dado $\alpha \in 4^\circ$ cuadrante tal que $\cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$, hallar, mediante identidades trigonométricas (resultados simplificados y racionalizados; no vale utilizar decimales):

a) $\sin \alpha/2 = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}} = \sqrt{\frac{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{2 - \sqrt{2}}{4}} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}$ 0,15

$\alpha \in 4^\circ \text{ cuad.} \Rightarrow 270^\circ < \alpha < 360^\circ$

$135^\circ < \alpha/2 < 180^\circ \Rightarrow \frac{\alpha}{2} \in 2^\circ \text{ cuad.}$

0,05

TOTAL: 0,25

b) $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha = 2 \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -1$ 0,1

$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$

$\sin^2 \alpha + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 1$

$\sin^2 \alpha + \frac{1}{2} = 1$

$\sin^2 \alpha = \frac{1}{2} \rightarrow \sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$ descartado p.p. $\alpha \in 4^\circ \text{ cuad.}$

$\sin \alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ 0,1

TOTAL: 0,25

c) $\text{tg}(\alpha - 60^\circ) = \frac{\text{tg} \alpha - \text{tg} 60^\circ}{1 + \text{tg} \alpha \cdot \text{tg} 60^\circ} = \frac{-1 - \sqrt{3}}{1 + (-1) \cdot \sqrt{3}} = -\frac{1 + \sqrt{3}}{1 - \sqrt{3}} = -\frac{(1 + \sqrt{3})^2}{(1 - \sqrt{3})(1 + \sqrt{3})} = -\frac{1 + 2\sqrt{3} + 3}{1 - 3} = \frac{4 + 2\sqrt{3}}{2} = 2 + \sqrt{3}$ 0,1

$\text{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{-\sqrt{2}/2}{\sqrt{2}/2} = -1$ 0,05

$= \frac{4 + 2\sqrt{3}}{2} = 2 + \sqrt{3}$ 0,1

TOTAL: 0,25

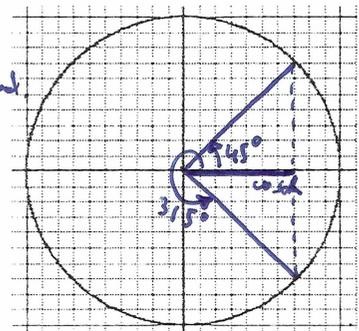
d) Razonar en la circunferencia goniométrica (sin calculadora) de qué α se trata (aproximando a los segundos).

$\cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \alpha = \arccos \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\alpha = 45^\circ$ descartado p.p. $\alpha \in 4^\circ \text{ cuad.}$

$\alpha = 315^\circ$ 0,15

TOTAL: 0,25



0,05

2. Dados $\vec{u} = (-3, 1)$ y $\vec{v} = (-10, 4)$, hallar $\vec{w} = (x, y)$ tal que $\vec{u} \cdot \vec{w} = 1$ y $\vec{w} \perp \vec{v}$

$\vec{u} \cdot \vec{w} = 1 \Rightarrow (-3, 1) \cdot (x, y) = -3x + y = 1$ *0,25*

$\vec{w} \perp \vec{v} \Rightarrow \vec{w} \cdot \vec{v} = 0 \Rightarrow (x, y) \cdot (-10, 4) = -10x + 4y = 0$

por sustitución:
 $y = 1 + 3x \Rightarrow$

0,25 $\Rightarrow -10x + 4(1 + 3x) = 0$
 $-10x + 4 + 12x = 0$

$2x = -4$

$x = -2$ *0,25*

$y = -5$ *0,25*

TOTAL: **1**

1. Dadas las rectas de la figura, se pide:

a) Obtener la ecuación de r' sabiendo que es // a r , en todas las formas conocidas.

$r' // r \Rightarrow \vec{v}_{r'} = \vec{v}_r = (3, 4)$
 $P(1, -3) \in r'$ *0,05*

$r': \begin{cases} x = 1 + 3\lambda \\ y = -3 + 4\lambda \end{cases}$ *0,05*
 PARAMÉTRICAS

$\frac{x-1}{3} = \frac{y+3}{4} \rightarrow 4x-4 = 3y+9$
 $4x-3y-13=0$

$r: \begin{cases} x = 1 + 3\lambda \\ y = 3 + 4\lambda \end{cases}$

$s: y = -\frac{3}{4}(x+3)$

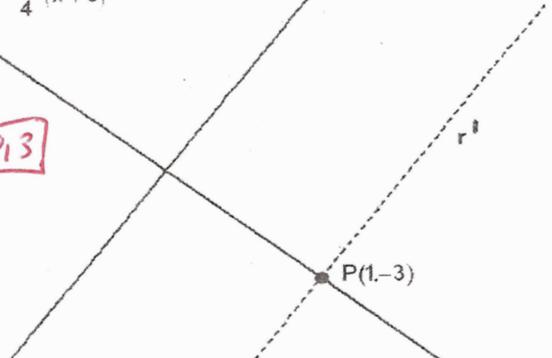
0,05
 $\frac{x-1}{3} = \frac{y+3}{4}$
 CONTINUA

$\Rightarrow 4x - 4 = 3y + 9$
 $4x - 3y - 13 = 0$ *0,05*
 GEN. o implícita

TOTAL: **0,3**

0,05
 $y + 3 = \frac{4}{3}(x - 1)$
 PRO. - POTR.

$3y = 4x - 13; \quad y = \frac{4}{3}x - \frac{13}{3}$ *0,05*
 EXPLÍCITA



b) Calcular la $d(r, r')$

$d(r, r') = d(P, r') = \frac{|4 - 9 - 13|}{\sqrt{16 + 9}} = \frac{|-18|}{\sqrt{25}} = \frac{18}{5} u$
0,05 *0,1* *0,1* *0,1*

TOTAL: **0,35**

c) Hallar el ángulo que forman r y s

$m_s = -\frac{3}{4} \Rightarrow \vec{u}_s = (4, -3)$ *0,05*

x baja 0,15 por no indicar el valor absoluto

$\cos \alpha = \frac{|\vec{u}_r \cdot \vec{u}_s|}{\|\vec{u}_r\| \cdot \|\vec{u}_s\|} = \frac{|(3, 4) \cdot (4, -3)|}{\sqrt{9+16} \cdot \sqrt{16+9}} = \frac{|12-12|}{5 \cdot 5} = 0 \Rightarrow \alpha = \arccos 0 = 90^\circ \Rightarrow r \perp s$
0,05 *0,05* *0,05* *0,15*

TOTAL: **0,35**

4. Dada $f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x} & \text{si } x \leq -1 \\ (x-2)^2 + 1 & \text{si } -1 < x \leq 3 \\ \frac{x-7}{x-5} & \text{si } x > 3 \end{cases}$, se pide:

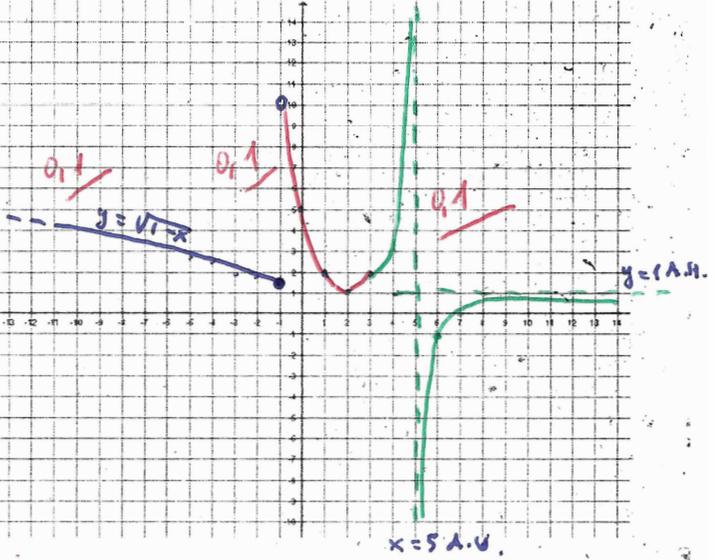
se baja 0,1 por no indicar los números de los ramos
 " " " " " " " las asíntotas en la gráfica
 " " 0,05 por no dar suficientes valores en cada rama
 " " " " " " " por no indicar que ocurre en el extremo de la rama

NOTA: 0,3 a) Gráfica.

$y = \sqrt{1-x}$	∞	\dots	2,165	2,445	2,24	2	1,73	1,41
------------------	----------	---------	-------	-------	------	---	------	------

x	-1	0	1	2	3
$y = (x-2)^2 + 1$	2	5	2	1	2

x	3	4	5	6	7	8	9	10	11	\dots	105	\dots	∞
$y = \frac{x-7}{x-5}$	2	3	2	-1	0	0,33	0,5	0,6	0,67	\dots	0,98	\dots	1



NOTA: 0,1 b) Dom(f) = $\mathbb{R} - \{5\}$ 0,05 Im(f) = \mathbb{R} 0,05

c) Intervalos de crecimiento. M y m

NOTA: 0,15 0,05 $f(x) \downarrow \forall x \in (-\infty, -1) \cup (-1, 2)$
 0,05 $f(x) \uparrow \forall x \in (2, 5) \cup (5, \infty)$ } m(2,1) 0,05

NOTA: 0,35 d) Clasificar analíticamente sus posibles discontinuidades.

- La 1ª rama es continua en su dominio particular de definición, pues ahí el radicando $1-x$ es siempre positivo
- La 2ª rama es continua por ser polinómica
- La 3ª rama no es continua en $x=5$ pues ahí no está definida

¿continua en $x = -1$?

1:) $\exists f(-1) = \sqrt{2}$ (1ª rama)
 2:) $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \sqrt{1-x} = \sqrt{2}$
 $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} [(x-2)^2 + 1] = 10$
 $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow -1} f(x) \Rightarrow$ discontinuidad de salto finito en $x = -1$ 0,05

NOTA: se baja 0,05 por cada fallo en lenguaje matemático

¿continua en $x = 3$?

1:) $f(3) = 2$ (2ª rama)
 2:) $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} (x-2)^2 + 1 = 2$
 $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-7}{x-5} = \frac{-4}{-2} = 2$
 $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 2 \Rightarrow f(x)$ continua en $x = 3$ 0,05

¿continua en $x = 5$?

$\lim_{x \rightarrow 5^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x-7}{x-5} = \frac{-2}{0^-} = \infty$
 $\lim_{x \rightarrow 5^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x-7}{x-5} = \frac{-2}{0^+} = -\infty$
 $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 5} f(x) \Rightarrow$ discontinuidad de salto ∞ en $x = 5$ 0,05
 Sol: f(x) continua $\forall x \in \mathbb{R} - \{-1, 5\}$ 0,05

TOTAL: $\boxed{11}$ e) Ecuación de las posibles asíntotas: $x=5$ A.V. $y=1$ A.H.

5. Calcular:

a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x^2 + 3x - 1}{x^3 - x^2 - x + 1} \stackrel{0/0}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^2 - 2x + 1)}{(x-1)(x^2 - 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)^2}{(x+1)(x-1)} = \frac{0}{2} = \boxed{0}$

$$\begin{array}{c|cccc} 1 & 1 & -3 & 3 & -1 \\ & & 1 & -2 & 1 \\ \hline & 1 & -2 & 1 & 0 \end{array} \quad \begin{array}{c|cccc} 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ & & 1 & 0 & -1 \\ \hline & 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}$$

TOTAL: $\boxed{0,4}$

b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 3x - 1}{x^4 - x^2 - x + 1} \stackrel{\infty/\infty}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2}{x^4} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3}{x^2} = \frac{3}{\infty} = \boxed{0}$

TOTAL: $\boxed{0,2}$

c) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 2x} - x) \stackrel{\infty - \infty}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 2x} - x)(\sqrt{x^2 + 2x} + x)}{\sqrt{x^2 + 2x} + x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 2x - x^2}{\sqrt{x^2 + 2x} + x} \stackrel{\infty/\infty}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{\sqrt{x^2 + 2x} + x}$

$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{\sqrt{\frac{x^2}{x^2} + \frac{2x}{x^2}} + \frac{x}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{\sqrt{1 + \frac{2}{x}} + 1} = \frac{2}{2} = \boxed{1}$

TOTAL: $\boxed{0,4}$

6. Derivar y simplificar:

a) $y = \frac{3x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - \frac{x}{5} + \frac{1}{x} \rightarrow y' = \frac{1}{4} 12x^3 - \frac{1}{3} 6x^2 + \frac{1}{2} 2x - \frac{1}{5} = \boxed{3x^3 - 2x^2 + x - \frac{1}{5}}$

b) $y = \sqrt[4]{(x^4 - 1)^3} = (x^4 - 1)^{3/4} \xrightarrow{u^n} y' = \frac{3}{4} (x^4 - 1)^{-1/4} \cdot 4x^3 = \boxed{\frac{3x^3}{\sqrt[4]{x^4 - 1}}}$

c) $y = \frac{1}{(x^2 + 1)^3} \xrightarrow{1/u} y' = \frac{-3(x^2 + 1)^2 \cdot 2x}{(x^2 + 1)^6} = \boxed{\frac{-6x}{(x^2 + 1)^4}}$

$\boxed{0,25}$ cada apdo.

d) $y = \frac{2x^2 - 3}{3x^2 - 2} \xrightarrow{u/v} y' = \frac{4x(3x^2 - 2) - (2x^2 - 3) \cdot 6x}{(3x^2 - 2)^2} = \frac{12x^3 - 8x - 12x^3 + 18x}{(3x^2 - 2)^2} = \boxed{\frac{10x}{(3x^2 - 2)^2}}$

- Elige dos preguntas de entre las cuatro siguientes (En total tienes que hacer 8 preguntas; todas puntúan igual):

7. a) Operar y simplificar:

$$\frac{\frac{x-1}{x^3-3x+2}}{\frac{2}{x+2}} = \frac{(x-1)(x+2)}{2 \cdot (x^3-3x+2)} = \frac{(x-1)(x+2)}{2(x-1)(x^2+x-2)} = \frac{\cancel{x-1} \cdot (x+2)}{2(\cancel{x-1})(x-1)(x+2)} = \frac{1}{2(x-1)} = \frac{1}{2x-2}$$

raíz 1 (0,05) raíz 2 (0,1) Comparte la raíz 1 Comparte la raíz 2

	1	0	-3	2
1		1	1	-2
	1	1	-2	0
-2		-2	2	
	1	-1	0	

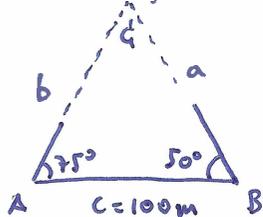
b) Resolver:

Comprobación: $\sqrt{10} - \sqrt{10} = \sqrt{10} \Rightarrow$ Soluc: $x = 5$ (0,2)

$\sqrt{x+5} - \sqrt{x-5} = \sqrt{10}$
 $(\sqrt{x+5} - \sqrt{x-5})^2 = (\sqrt{10})^2$
 $x+5 - 2\sqrt{10}\sqrt{x+5} + 10 = x-5$ (0,05)
 $20 = 2\sqrt{10}\sqrt{x+5}$ (0,05)
 $10 = \sqrt{10}\sqrt{x+5}$
 $10^2 = (\sqrt{10}\sqrt{x+5})^2$ (0,05)
 $100 = 10(x+5)$ (0,05)
 $10 = x+5$
 $5 = x$ (0,1)

TOTAL: (0,5) (0,3+0,2)

8. Se desea unir entre sí tres puntos, A, B y C, mediante caminos rectos. La distancia de A a B es de 100 m, el ángulo correspondiente a B es de 50°, y el ángulo en A es de 75°. ¿Cuál es la distancia entre B y C? ¿Y entre A y C?



$C = 180^\circ - (50^\circ + 75^\circ) = 55^\circ$ (0,1)

$\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C} \Rightarrow \frac{a}{\sin 75^\circ} = \frac{100}{\sin 55^\circ} \Rightarrow a = \frac{100 \sin 75^\circ}{\sin 55^\circ} \approx 117,92 \text{ m}$ (0,25)

$\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \Rightarrow \frac{b}{\sin 50^\circ} = \frac{100}{\sin 55^\circ} \Rightarrow b = \frac{100 \sin 50^\circ}{\sin 55^\circ} \approx 93,52 \text{ m}$ (0,25)

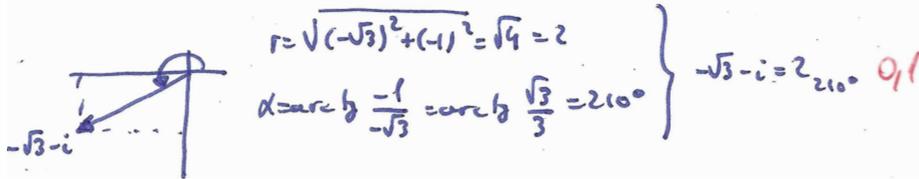
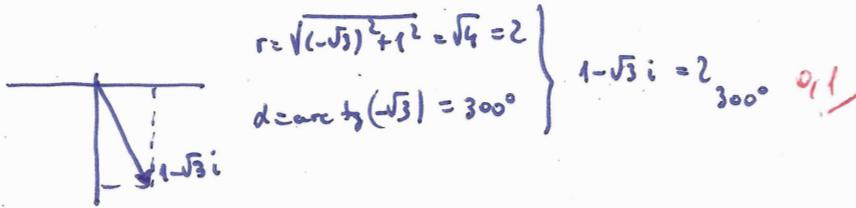
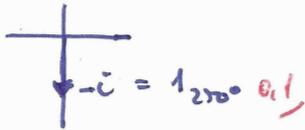
Se baja 0,1 por no indicar las unidades
 " " " " fallos en el redondeo
 " " " " no indicar el \approx

TOTAL: (1)

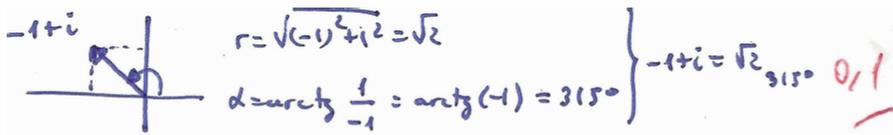
9. Operar en forma polar (se recomienda dibujar previamente cada complejo) y dar el resultado en binómica:

$$\frac{-i \cdot (1 - \sqrt{3}i)^3}{(-1+i)^4 \cdot (-\sqrt{3}-i)} = \frac{1_{270^\circ} \cdot (2_{300^\circ})^3}{(\sqrt{2}_{315^\circ})^4 \cdot 2_{210^\circ}} = \frac{1_{270^\circ} \cdot 8_{900^\circ}}{4_{1260^\circ} \cdot 2_{210^\circ}} = \frac{8_{1170^\circ}}{8_{1470^\circ}} = 8_{-300^\circ} = 8_{60^\circ} =$$

$$= 8(\cos 60^\circ + i \sin 60^\circ) = 8 \cdot \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \boxed{4 + 4\sqrt{3}i}$$



TOTAL: 1



10. Resolver:

a) $\log(x+1) = \log(5x-13) - \log(x-3)$

b) $9^x - 2 \cdot 3^{x+2} + 81 = 0$