IES Leonardo da Vinci.
Departamento de Matemáticas
Alba de Tormes, Salamanca

LÍMITES DE FUNCIONES I
1º Bachillerato. Ciencias y Sociales.

1º Calcula el límite de las siguientes funciones:

a) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^3+2x^2-x-2}{x^2+x}$

b) $\lim\limits_{x\to \infty} \sqrt{x}\left(\sqrt{x+a}-\sqrt{x}\right)$

c) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-x-2}{x^2-4x+4}$

d) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^3-4x^2+x+6}{x^2-5x+6}$

e) $\lim\limits_{x\to \infty} \sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+1}$

f) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^4-16}{x^3+8}$

g) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{x+6}-3}{x-3} =$

h) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{x-2}$

i) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1+x)^2-1}{x}$

j) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1+x)^3-1}{x}$

k) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{3-\sqrt{2x^2+1}}{3x+6}$

l) $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}} \dfrac{8x^2+8x-6}{4x^2-1}$

m) $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{x+7}{(x+3)^2}$

n) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{2x-8}{\sqrt{x^2+9}-5}$

1º a) $\lim_{x \to -1} \dfrac{x^3+2x^2-x-2}{x^2+x}$

• se calcula el valor numérico en $x=-1$.

$(-1)^3+2(-1)^2-(-1)-2=-1+2+1-2=0$.

$(-1)^2+(-1)=1-1=0$

es del tipo $\boxed{\left(\frac{0}{0}\right)}$

• se descompone el numerador y el denominador en producto de factores. Una raíz es $-1 \Rightarrow$ un factor es $(x+1)$. Se emplea la regla de Ruffini.

Numerador

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 2 & -1 & -2 \\ -1 & & -1 & -1 & 2 \\ \hline & 1 & 1 & -2 & \underline{|0} \end{array} \rightarrow (x+1)\cdot(x^2+x-2)$$

Denominador $x^2+x=x\cdot(x+1)$

$$\lim_{x \to -1} \frac{\cancel{(x+1)}\cdot(x^2+x-2)}{x\cdot\cancel{(x+1)}} = \lim_{x \to -1} \frac{x^2+x-2}{x} = \frac{-2}{-1} = \boxed{2}$$

• se vuelven a calcular los valores numéricos.

$(-1)^2+(-1)-2=1-1-2=-2$

b) $\lim_{x\to\infty} \sqrt{x}\cdot\left(\sqrt{x+a}-\sqrt{x}\right) = \lim_{x\to\infty} \sqrt{x^2+ax}-x = (\infty-\infty)$

• se multiplica y divide por el conjugado.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2+ax}-x\right)\cdot\left(\sqrt{x^2+ax}+x\right)}{\sqrt{x^2+ax}+x} =$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2+ax}\right)^2-x^2}{\sqrt{x^2+ax}+x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+ax-x^2}{\sqrt{x^2+ax}+x} =$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{ax}{\sqrt{x^2+ax}+x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right)$$

• se divide cada término por la mayor potencia del denominador $\boxed{x}$.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{ax}{x}}{\frac{\sqrt{x^2+ax}}{x}+\frac{x}{x}}$$

$$\frac{\sqrt{x^2+ax}}{x} = \frac{\sqrt{x^2+ax}}{\sqrt{x^2}} = \sqrt{\frac{x^2}{x^2}+\frac{ax}{x^2}} = \sqrt{1+\frac{a}{x}}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{a}{\sqrt{1+\frac{a}{x}}+1} = \boxed{\frac{a}{2}}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{a}{x} = 0$$

c) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2-x-2}{x^2-4x+4}$

- valor numérico

$$\left.\begin{array}{l} 2^2-2-2=4-2-2=0 \\ 2^2-4\cdot 2+4=4-8+4=0 \end{array}\right\} \boxed{\left(\frac{0}{0}\right)}$$

- descomponemos el numerador y el denominador en factores

se aplica Ruffini siendo 2 una raíz.

$$\begin{array}{c|ccc} & 1 & -1 & -2 \\ 2 & & 2 & 2 \\ \hline & 1 & 1 & \lfloor 0 \end{array} \rightarrow (x-2)\cdot(x+1)$$

$$\Rightarrow$$

$$\begin{array}{c|ccc} & 1 & -4 & 4 \\ 2 & & 2 & -4 \\ \hline & 1 & -2 & \lfloor 0 \end{array} \rightarrow (x-2)\cdot(x-2)$$

$$\lim_{x \to 2} \frac{\cancel{(x-2)}\cdot(x+1)}{\cancel{(x-2)}\cdot(x-2)} = \lim_{x \to 2} \frac{x+1}{x-2} = \left(\frac{3}{0}\right) \rightarrow \boxed{\text{tipo } \left(\frac{k}{0}\right)}$$

- Se calculan los límites laterales.

$$\lim_{\substack{x \to 2^+ \\ x>2}} \frac{x+1}{x-2} = \left(\frac{3}{0^+}\right) = +\infty$$

$$\Rightarrow \nexists \ \boxed{\text{no tiene límite.}}$$

$$\lim_{\substack{x \to 2^- \\ x<2}} \frac{x+1}{x-2} = \left(\frac{3}{0^-}\right) = -\infty$$

Observa: $0^+ \Leftrightarrow x \to 2^+ \to 0^+ \ (>0)$. $(x-2)$ tiende a 0 y es positivo.

d) $$\lim_{x\to 2} \frac{x^3-4x^2+x+6}{x^2-5x+6}$$

• Valor numérico

$$\left.\begin{array}{l} 2^3-4\cdot 2^2+2+6 = 8-16+2+6 = 0. \\ 2^2-5\cdot 2+6 = 4-10+6 = 0 \end{array}\right\} \quad \boxed{\left(\frac{0}{0}\right)}$$

• se descompone el numerador y el denominador en factores y se simplifica la fracción. Observa que 2 es una raíz de ambos polinomios. Se emplea la regla de Ruffini.

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -4 & 1 & 6 \\ 2 & & 2 & -4 & -6 \\ \hline & 1 & -2 & -3 & \boxed{0} \end{array} \quad \rightarrow \quad (x-2)\cdot(x^2-2x-3)$$

$$\begin{array}{c|ccc} & 1 & -5 & 6 \\ 2 & & 2 & -6 \\ \hline & 1 & -3 & \boxed{0} \end{array} \quad \longrightarrow \quad (x-2)\cdot(x-3)$$

$$\lim_{x\to 2} \frac{\cancel{(x-2)}\cdot(x^2-2x-3)}{\cancel{(x-2)}\cdot(x-3)} = \lim_{x\to 2} \frac{x^2-2x-3}{x-3} = \frac{-3}{-1} = \boxed{3}.$$

• Valor numérico:

$$2^2-2\cdot 2-3 = -3 \qquad 2-3 = -1 \quad \Rightarrow \quad \frac{-3}{-1} = 3$$

e) $\lim_{x\to\infty} \sqrt{x^2+x+1} - \sqrt{x^2-x+1} = (\infty - \infty)$

• se multiplica y divide por el conjugado.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2+x+1} - \sqrt{x^2-x+1}\right)\cdot\left(\sqrt{x^2+x+1} + \sqrt{x^2-x+1}\right)}{\sqrt{x^2+x+1} + \sqrt{x^2-x+1}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2+x+1}\right)^2 - \left(\sqrt{x^2-x+1}\right)^2}{\sqrt{x^2+x+1} + \sqrt{x^2-x+1}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+x+1-(x^2-x+1)}{\sqrt{x^2+x+1} + \sqrt{x^2-x+1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+x+1-x^2+x-1}{\sqrt{x^2+x+1} + \sqrt{x^2-x+1}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{\sqrt{x^2+x+1} + \sqrt{x^2-x+1}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right)$$

• se divide por la mayor potencia del denominador : x

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{2x}{x}}{\frac{\sqrt{x^2+x+1}}{x} + \frac{\sqrt{x^2-x+1}}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{\sqrt{\frac{x^2}{x^2}+\frac{x}{x^2}+\frac{1}{x^2}} + \sqrt{\frac{x^2}{x^2}-\frac{x}{x^2}+\frac{1}{x^2}}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}} + \sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}} = \frac{2}{1+1} = \boxed{1}$$

OBSERVA.

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}} = \sqrt{1+0+0} = \sqrt{1} = 1.$$

f) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^4-16}{x^3+8}$

• se calcula el valor numérico

$$\left.\begin{array}{l} (-2)^4-16 = 16-16 = 0 \\ (-2)^3+8 \;= -8+8 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left(\frac{0}{0}\right)$$

• se descomponen en factores el numerador y el denominador. Observa que (-2) es una raíz de ambos polinomios. Aplicando la regla de Ruffini.

Numerador: igualdades notables $a^2-b^2=(a+b)\cdot(a-b)$

$$x^4-16 = (x^2+4)\cdot(x^2-4) = (x^2+4)\cdot(x+2)\cdot(x-2)$$

Denominador:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 0 & 0 & 8 \\ -2 & & -2 & 4 & -8 \\ \hline & 1 & -2 & 4 & \boxed{0} \end{array} \rightarrow (x+2)\cdot(x^2-2x+4)$$

$$\lim_{x\to -2} \frac{(x^2+4)\cdot(x+2)\cdot(x-2)}{(x+2)\cdot(x^2-2x+4)} = \lim_{x\to -2} \frac{(x^2+4)\cdot(x-2)}{x^2-2x+4}$$

• se vuelven a calcular los valores numéricos:

$$\left.\begin{array}{l} \left[(-2)^2+4\right]\cdot(-2-2) = -32 \\ (-2)^2-2\cdot(-2)+4 = 16 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\lim_{x\to -2} \frac{x^4-16}{x^3+8} = \frac{-32}{16} = \boxed{-2}$$

g) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{\sqrt{x+6}-3}{x-3}$

• se calcula el valor numérico.

NUMERADOR $\sqrt{3+6}-3 = 3-3 = 0$

DENOMINADOR $3-3=0$

$\Rightarrow \boxed{\left(\frac{0}{0}\right)}$

• como aparece una raíz cuadrada se multiplica y divide por el conjugado de la expresión que contiene la raíz.

$$\lim_{x \to 3} \frac{(\sqrt{x+6}-3)\cdot(\sqrt{x+6}+3)}{(\sqrt{x+6}+3)\cdot(x-3)} =$$

$$\lim_{x \to 3} \frac{(\sqrt{x+6})^2-3^2}{(\sqrt{x+6}+3)\cdot(x-3)} = \lim_{x \to 3} \frac{x+6-9}{(\sqrt{x+6}+3)\cdot(x-3)}$$

$$\lim_{x \to 3} \frac{\cancel{x-3}}{(\sqrt{x+6}+3)\cdot\cancel{(x-3)}} = \lim_{x \to 3} \frac{1}{\sqrt{x+6}+3}$$

• se vuelven a tomar valores

$\sqrt{3+6}+3 = 6.$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 3} \frac{\sqrt{x+6}-3}{x-3} = \boxed{\frac{1}{6}}$$

h) $\lim_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{x-2}$

- valor numérico en $x=2$

NUMERADOR $\sqrt{2}-\sqrt{2}=0$
DENOMINADOR $2-2=0$ $\Big\} \Rightarrow \boxed{\left(\frac{0}{0}\right)}$

- se multiplica y divide por el conjugado de la expresión que contiene la raíz.

$$\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{(\sqrt{x}-\sqrt{2})\cdot(\sqrt{x}+\sqrt{2})}{(x-2)\cdot(\sqrt{x}+\sqrt{2})} =$$

$$\lim_{x\to 2} \frac{(\sqrt{x})^2-(\sqrt{2})^2}{(x-2)\cdot(\sqrt{x}+\sqrt{2})} = \lim_{x\to 2} \frac{x-2}{(x-2)\cdot(\sqrt{x}+\sqrt{2})} =$$

$$\lim_{x\to 2} \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{2}} =$$

- se vuelven a tomar valores:

$\sqrt{2}+\sqrt{2}=2\sqrt{2}$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{x-2} = \boxed{\frac{1}{2\sqrt{2}}} = \boxed{\frac{\sqrt{2}}{4}}$$

i) $\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^2-1}{x}$

- valor numérico:
  NUMERADOR $(1+0)^2-1=0 \Rightarrow \boxed{\left(\frac{0}{0}\right)}$

- se opera para expresar el numerador y denominador como polinomios
  $(1+x)^2-1 = 1+2x+x^2-1 = 2x+x^2$

- se descompone el numerador (es muy sencillo pues x es un factor común)
  $2x+x^2 = x\cdot(2+x)$

$\Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^2-1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{x}\cdot(2+x)}{\cancel{x}} = \lim_{x\to 0}(2+x) = \boxed{2}$

j) $\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^3-1}{x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{1}+3x+3x^2+x^3-\cancel{1}}{x}$

$= \lim_{x\to 0} \frac{x\cdot(3+3x+x^2)}{x} = \lim_{x\to 0}(3+3x+x^2) = \boxed{3}.$

k) $\lim_{x\to -2} \dfrac{3-\sqrt{2x^2+1}}{3x+6}$.

• valor numérico en $x=-2$.

$$\left.\begin{array}{l} 3-\sqrt{2(-2)^2+1} = 3-\sqrt{9} = 0 \\ 3\cdot(-2)+6 = -6+6 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\left(\frac{0}{0}\right)}$$

• se multiplica y divide por el conjugado de la expresión que contiene a la raíz cuadrada.

$$\lim_{x\to -2} \frac{(3-\sqrt{2x^2+1})\cdot(3+\sqrt{2x^2+1})}{(3x+6)\cdot(3+\sqrt{2x^2+1})} = \lim_{x\to -2} \frac{3^2-(\sqrt{2x^2+1})^2}{(3x+6)\cdot(3+\sqrt{2x^2+1})}$$

numerador:

$$9-(2x^2+1) = 9-2x^2-1 = 8-2x^2 = 2\cdot(4-x^2) = 2\cdot(2+x)\cdot(2-x)$$

denominador:

$$(3x+6)\cdot(3+\sqrt{2x^2+1}) = 3\cdot(x+2)\cdot(3+\sqrt{2x^2+1})$$

$\Rightarrow$

$$\lim_{x\to -2} \frac{2\cdot\cancel{(2+x)}\cdot(2-x)}{3\cdot\cancel{(x+2)}\cdot(3+\sqrt{2x^2+1})} = \lim_{x\to -2} \frac{2\cdot(2-x)}{3\cdot(3+\sqrt{2x^2+1})}$$

• valor numérico en $x=-2$

$$\left.\begin{array}{l} 2\cdot(2-(-2)) = 8 \\ 3\cdot(3+\sqrt{2\cdot(-2)^2+1}) = 3\cdot(3+3) = 18 \end{array}\right\}$$

$$\lim_{x\to -2} \frac{3-\sqrt{2x^2+1}}{3x+6} = \frac{8}{18} = \boxed{\frac{4}{9}}$$

e) $\lim_{x \to 1/2} \dfrac{8x^2+8x-6}{4x^2-1}$

• valor numérico en $x=\frac{1}{2}$.

$$\left.\begin{array}{l} 8\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2+8\cdot\left(\frac{1}{2}\right)-6=\frac{8}{4}+\frac{8}{2}-6=0. \\ 4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2-1=\frac{4}{4}-1=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\left(\frac{0}{0}\right)}$$

• se descompone en factores primos el numerador y el denominador; observa que $x=\frac{1}{2}$ es una raíz de ambos polinomios. Aplicando la regla de Ruffini:

$$\begin{array}{c|ccc} & 8 & 8 & -6 \\ 1/2 & & 4 & 6 \\ \hline & 8 & 12 & \lfloor 0 \end{array} \rightarrow \left(x-\frac{1}{2}\right)\cdot(8x+12)$$

$$\begin{array}{c|ccc} & 4 & 0 & -1 \\ 1/2 & & 2 & +1 \\ \hline & 4 & 2 & \lfloor 0 \end{array} \rightarrow \left(x-\frac{1}{2}\right)\cdot(4x+2).$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 1/2} \frac{\cancel{\left(x-\frac{1}{2}\right)}\cdot(8x+12)}{\cancel{\left(x-\frac{1}{2}\right)}\cdot(4x+2)} = \lim_{x\to\frac{1}{2}} \frac{8x+12}{4x+2} = \boxed{4}$$

$$\left.\begin{array}{l} 8\cdot\frac{1}{2}+12=16 \\ 4\cdot\frac{1}{2}+2=4 \end{array}\right\} \quad \frac{16}{4}=4$$

m) $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{x+7}{(x+3)^2}$

- Valor numérico en $x=-3$

$$\left.\begin{array}{l} -3+7=4 \\ (-3+3)^2=0. \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\left(\frac{4}{0}\right)}$$

- límites laterales.

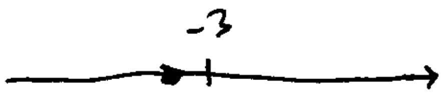
$$\lim_{\substack{x \to -3^+ \\ x>-3}} \frac{x+7}{(x+3)^2} = \left(\frac{4}{0^+}\right) = +\infty$$

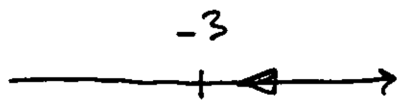
$(x+3)$ tiende a 0 (positivo)

$$\lim_{\substack{x \to -3^- \\ x<-3}} \frac{x+7}{(x+3)^2} = \left(\frac{4}{0^+}\right) = +\infty.$$

$(x+3)$ tiende a 0 (negativo), pero $(x+3)$ está elevado al cuadrado. $\rightarrow$ 0 (positivo)

Para los cálculos del signo una representación gráfica te puede ayudar.





$3^- \Leftrightarrow x<-3 \Rightarrow$
$x+3<0$

$3^+ \Leftrightarrow x>-3 \Rightarrow$
$x+3>0.$

- Conclusión:

Como los límites laterales coinciden $\boxed{\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{x+7}{(x+3)^2} = +\infty}$

La función $f(x)=\dfrac{x+7}{(x+3)^2}$ tiene una asíntota vertical en $x=-3$.

h) $\lim_{x \to 4} \dfrac{2x-8}{\sqrt{x^2+9}-5}$

• valor numérico en $x=4$

$$\left.\begin{array}{l} 2\cdot 4-8=0 \\ \sqrt{4^2+9}-5 = 5-5=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\left(\frac{0}{0}\right)}$$

• se multiplica el numerador y denominador por el conjugado de la expresión que contiene la raíz.

$$\lim_{x \to 4} \frac{(2x-8)\cdot\left(\sqrt{x^2+9}+5\right)}{\left(\sqrt{x^2+9}-5\right)\cdot\left(\sqrt{x^2+9}+5\right)} =$$

$$\lim_{x \to 4} \frac{(2x-8)\cdot\left(\sqrt{x^2+9}+5\right)}{\left(\sqrt{x^2+9}\right)^2-5^2}$$

• operando, agrupando ...

$$(2x-8)\cdot\left(\sqrt{x^2+9}+5\right) = 2\cdot(x-4)\cdot\left(\sqrt{x^2+9}+5\right)$$

$$\left(\sqrt{x^2+9}\right)^2-5^2 = x^2+9-25 = x^2-16 = (x+4)\cdot(x-4)$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 4} \frac{2\cdot\cancel{(x-4)}\cdot\left(\sqrt{x^2+9}+5\right)}{(x+4)\cdot\cancel{(x-4)}} =$$

$$= \lim_{x \to 4} \frac{2\cdot\left(\sqrt{x^2+9}+5\right)}{x+4} = \boxed{\frac{5}{2}}$$

• valor numérico en $x=4$

$$\left.\begin{array}{l} 2\cdot\left(\sqrt{4^2+9}+5\right) = 20 \\ 4+4=8 \end{array}\right\} \frac{20}{8} = \frac{5}{2}$$