1º Calcula el límite de las siguientes funciones:

a) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^3+2x^2-x-2}{x^2+x}$ b) $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{x}\left(\sqrt{x+a}-\sqrt{x}\right)$

c) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-x-2}{x^2-4x+4}$ d) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^3-4x^2+x+6}{x^2-5x+6}$

e) $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+1}$ f) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^3-4x^2+x+6}{x^2+2x-8}$

g) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^2-x-2}{x^2-4x+4}$ h) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^2+1}{3x-3}-\dfrac{2+4x}{6}$

i) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^2+5x+6}{x^2-4}$ j) $\lim\limits_{x\to\infty} \left[\sqrt{x^2+3x-1}-x\right]$

k) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2-6x+9}{x^2-9}$ l) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{3x^2-2x+1}{-4x^2+3x-3}$

m) $\lim\limits_{x\to\infty} \left[\sqrt{9x^2+2x-1}-(3x+1)\right]$ n) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{2x^2+1}{3x-3}-\dfrac{2+4x}{6}$

o) $\lim\limits_{x\to -\infty} \sqrt{x^2-3x+1}-x$ p) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a}$

q) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x-2}{\sqrt{x^2-4}}$ (racionaliza) r) $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(2+h)^2-4}{h}$

s) $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{|h|}{h}$ t) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{x^2-16}{\sqrt{x}-2}$

2º Calcula el dominio de las siguientes funciones:

a) $f(x)=\sqrt{\dfrac{2x+4}{9-x^2}}$ b) $f(x)=\sqrt{-x^2+5x-6}$

c) $f(x)=\ln\left(\dfrac{x^2-4}{x+2}\right)$ d) $f(x)=\dfrac{\sqrt{9-x^2}}{x-3}$

e) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}$ f) $f(x)=\sqrt{\dfrac{3x+6}{x^2-4}}$

3º Dadas $f(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$ y $g(x)=\sqrt{x^2-3}$. Halla:

a) $f(g(x))$ b) $f^{-1}(x)$

4º Representa gráficamente las funciones:

a) $f(x)=\left|-x^2+6x\right|$ b) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x} & si \quad x\le 2 \\ -x+3 & si \quad x>2 \end{cases}$

5º Dadas las funciones $f(x)=\sqrt{x-1}$ y $g(x)=x^2$. Calcula el dominio de f(x). Calcula las funciones f(g(x)), f(f(x)) y g(f(x)).

6º Dadas las funciones: $f(x)=3x^2-4x+1$ y $g(x)=\dfrac{2x+1}{3x-2}$. Represéntalas y calcula $f(g(x))$ y $g^{-1}(x)$.

7º Representa las funciones $f(x)=-x^2+4x-4$ $\quad g(x)=\left|x^2+4x\right|$ $\quad h(x)=\log\dfrac{1}{x}$

8º Representa gráficamente las funciones:

a) $f(x)=2\cdot 5^{-x}$ a partir de la gáfica de $f(x)=5^x$

b) $f(x)=3+\log_2(x-5)$ a partir de la gráfica de $f(x)=\log_2 x$

9º Un elemento radioactivo se desintegra en función del tiempo t, medido en segundos, según la expresión

$$\boxed{N(t)=N_0\cdot e^{-\lambda t}}$$

N(t): número de átomos radioactivos en el instante t;

N_0: número de átomos radioactivos en el instante inicial t=0;

λ: constante de desintegración, que dependerá del elemento.

a) Halla el periodo de semidesintegración, T, definido como el intervalo de tiempo que ha de transcurrir para que el número inicial de átomos se reduzca a la mitad.

b) Calcula el periodo de semidesintegración del ${}^{90}_{38}Sr$, $\lambda=7{,}8219\cdot 10^{-10} \quad s^{-1}$.

c) Una preparación radioactiva tiene una constante igual a $2{,}31\cdot 10^{-3} \quad h^{-1}$ (h son horas). Calcula el tiempo que ha de transcurrir para que se desintegre un 60% de la masa inicial de la preparación.

10º En un determinado modelo de coche, el consumo de gasolina, para velocidades comprendidas entre 20 y 160 km/hora viene determinado por la función:

$$\boxed{C(x)=8-0{,}045x+0{,}00025x^2}$$

C(x) viene expresado en litros consumidos cada 100 km. Calcula:

a) representa la gráfica de la función,
b) ¿cuántos litros cada 100 km consume a los 120 km/hora?
c) ¿A qué velocidad consume menos y cuántos consume?
d) ¿A qué velocidad se debe conducir para consumir 10 litros cada 100 km?

11º Las escalas de temperatura en grados Celsius (ºC) y Fahrenheit (ºF) se relacionan mediante la fórmula:

$$\boxed{C(F)=\frac{5}{9}(F-32)},$$

a) ¿cuántos grados Celsius son 41 ºF? ¿ y 132 ºF?
b) ¿cuántos grados Fahrenheit son 20 ºC? ¿y 100 ºC?
c) Halla la función que relaciona que permite cambiar de Celsius a Fahrenheit.
d) Representa ambas funciones mediante sus puntos de corte con los ejes.

(p) (a) $$\lim_{x\to -1} \frac{x^3+2x^2-x-2}{x^2+x}$$

• valor numérico

numerador: $(-1)^3+2\cdot(-1)^2-(-1)-2=-1+2+1-2=0$

denominador: $(-1)^2+(-1)=1-1=0$

$\rightarrow \boxed{\left(\frac{0}{0}\right)}$

• se descomponen en factores primos tanto el numerador como el denominador de la fracción. Observa que -1 es una raíz de ambos polinomios. Aplicando la regla de Ruffini

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 2 & -1 & -2 \\ -1 & & -1 & -1 & 2 \\ \hline & 1 & 1 & -2 & \boxed{0} \end{array} \rightarrow (x+1)\cdot(x^2+x-2)$$

El denominador es sencillo: factor común a x

$x^2+x=x\cdot(x+1)$.

$$\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)\cdot(x^2+x-2)}{x\cdot(x+1)}=\lim_{x\to -1}\frac{x^2+x-2}{x}$$

• valor numérico

$(-1)^2+(-1)-2=+1-1-2=-2$

$$\Rightarrow \lim_{x\to -1}\frac{x^3+2x^2-x-2}{x^2+x}=\frac{-2}{-1}=\boxed{2}$$

(b) $\lim_{x\to\infty} \sqrt{x}\cdot\left(\sqrt{x+a}-\sqrt{x}\right) = \lim_{x\to\infty} \sqrt{x^2+ax} - x = \boxed{(\infty-\infty)}$

• se multiplica y divide por el conjugado

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2+ax}-x\right)\cdot\left(\sqrt{x^2+ax}+x\right)}{\sqrt{x^2+ax}+x} =$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2+ax}\right)^2 - x^2}{\sqrt{x^2+ax}+x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+ax-x^2}{\sqrt{x^2+ax}+x}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{ax}{\sqrt{x^2+ax}+x} = \boxed{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}$$

• se divide cada término por la mayor potencia del denominador, en este caso es $\boxed{x}$.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{ax}{x}}{\frac{\sqrt{x^2+ax}}{x}+\frac{x}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{a}{\sqrt{1+\frac{a}{x}}+1} = \frac{a}{1+1} = \boxed{\frac{a}{2}}$$

(c) Valor numérico.

$$\left.\begin{array}{l} 2^2-2-2 = 4-2-2 = 0 \\ 2^2-4\cdot 2+4 = 4-8+4 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to 2} \frac{x^2-x-2}{x^2-4x+4} = \boxed{\left(\frac{0}{0}\right)}$$

• se factoriza mediante la regla de Ruffini observando que 2 es una raíz del numerador y del denominador.

$$\begin{array}{c|ccc} & 1 & -1 & -2 \\ 2 & & 2 & 2 \\ \hline & 1 & 1 & 0 \end{array} \rightarrow (x-2)\cdot(x+1) \qquad \begin{array}{c|ccc} & 1 & -4 & 4 \\ 2 & & 2 & -4 \\ \hline & 1 & -2 & 0 \end{array} \rightarrow (x-2)\cdot(x-2)$$

$$\lim_{x\to 2} \frac{(x-2)\cdot(x+1)}{(x-2)\cdot(x-2)} = \lim_{x\to 2} \frac{x+1}{x-2} = \boxed{\left(\frac{3}{0}\right)}$$

• Se calculan los límites laterales.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{\substack{x\to 2^+\\ x>2}} \dfrac{x+1}{x-2} = \left(\dfrac{3}{0^+}\right) = +\infty \\ \\ \lim\limits_{\substack{x\to 2^-\\ x<2}} \dfrac{x+1}{x-2} = \left(\dfrac{3}{0^-}\right) = -\infty\end{array}\right\}$$

como son diferentes $\Rightarrow$ $\boxed{\text{no tiene límite.}}$

d) Valor numérico en $x=2$

$$\left.\begin{array}{l}2^3-4\cdot 2^2+2+6 = 8-16+2+8 = 0 \\ 2^2-5\cdot 2+6 = 4-10+6 = 0\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^3-4x^2+x+6}{x^2-5x+6} = \boxed{\left(\frac{0}{0}\right)}$$

• se descomponen numerador y denominador; observa que 2 es una raíz de ambos polinomios. Empleando la regla de Ruffini

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -4 & 1 & 6 \\ 2 & & 2 & -4 & -6 \\ \hline & 1 & -2 & -3 & \lfloor 0 \end{array} \rightarrow (x-2)\cdot(x^2-2x-3)$$

$$\begin{array}{r|rrr} & 1 & -5 & 6 \\ 2 & & 2 & -6 \\ \hline & 1 & -3 & \lfloor 0 \end{array} \rightarrow (x-2)\cdot(x-3).$$

$$\lim_{x\to 2} \frac{(x-2)\cdot(x^2-2x-3)}{(x-2)\cdot(x-3)} = \lim_{x\to 2} \frac{x^2-2x-3}{x-3} = \frac{-3}{-1} = \boxed{3}$$

• valor numérico en $x=2$

$2^2-2\cdot 2-3 = 4-4-3 = -3$; $2-3=-1$

e) $\lim_{x \to \infty} \sqrt{x^2+x+1} - \sqrt{x^2-x+1} = \boxed{(\infty - \infty)}$

• se multiplica y divide por el conjugado

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\left(\sqrt{x^2+x+1} - \sqrt{x^2-x+1}\right) \cdot \left(\sqrt{x^2+x+1} + \sqrt{x^2-x+1}\right)}{\sqrt{x^2+x+1} + \sqrt{x^2-x+1}} =$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\left(\sqrt{x^2+x+1}\right)^2 - \left(\sqrt{x^2-x+1}\right)^2}{\sqrt{x^2+x+1} + \sqrt{x^2-x+1}} =$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^2+x+1 - (x^2-x+1)}{\sqrt{x^2+x+1} + \sqrt{x^2-x+1}} =$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^2+x+1 - x^2+x-1}{\sqrt{x^2+x+1} + \sqrt{x^2-x+1}} =$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{2x}{\sqrt{x^2+x+1} + \sqrt{x^2-x+1}} = \boxed{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}$$

• se divide cada término por la mayor potencia del denominador: $\sqrt{x^2} = \boxed{x}$.

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\frac{2x}{x}}{\frac{\sqrt{x^2+x+1}}{x} + \frac{\sqrt{x^2-x+1}}{x}} =$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}} + \sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}} = \frac{2}{1+1} = \boxed{1}$$

(f) Valor numérico en $x=2$

$$\left.\begin{array}{l} 2^3-4\cdot 2^2+2+6 = 8-16+2+6 = 0 \\ 2^2+2\cdot 2-8 = 4+4-8 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^3-4x^2+x+6}{x^2+2x-8} = \boxed{\left(\frac{0}{0}\right)}$$

- se descompone tanto el numerador como el denominador. Observa que 2 es una raíz de ambos polinomios. Empleando la regla de Ruffini

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -4 & 1 & 6 \\ 2 & & 2 & -4 & -6 \\ \hline & 1 & -2 & -3 & \boxed{0} \end{array} \longrightarrow (x-2)\cdot(x^2-2x-3)$$

$$\begin{array}{r|rrr} & 1 & 2 & -8 \\ 2 & & 2 & +8 \\ \hline & 1 & 4 & \boxed{0} \end{array} \longrightarrow (x-2)\cdot(x+4)$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)\cdot(x^2-2x-3)}{(x-2)\cdot(x+4)} = \lim_{x\to 2} \frac{x^2-2x-3}{x+4} = \frac{-3}{6} = \boxed{\frac{-1}{2}}$$

- Valor numérico en $x=2$

$$\left.\begin{array}{l} 2^2-2\cdot 2-3 = 4-4-3 = -3 \\ 2+4 = 6 \end{array}\right\}$$

(g) • Valor numérico en $x=-2$

$$\left.\begin{array}{l} (-2)^2-(-2)-2 = 4+2-2 = 4 \\ (-2)^2-4\cdot(-2)+4 = 4+8+4 = 16 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\lim_{x\to -2} \frac{x^2-x-2}{x^2-4x+4} = \frac{4}{16} = \boxed{\frac{1}{4}}$$

h) $\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2+1}{3x-3} - \frac{2+4x}{6} = \boxed{(\infty-\infty)}$

• observa que es una diferencia de fracciones algebraicas

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2+1}{3x-3} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{2x^2+1}{x}}{\frac{3x-3}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x+\frac{1}{x}}{3-\frac{3}{x}} = \frac{\infty}{3} = \boxed{\infty}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2+4x}{6} = \frac{\infty}{6} = \boxed{\infty}.$$

• para resolver la indeterminación efectuamos la diferencia de ambos miembros.

$$\frac{2x^2+1}{3x-3} - \frac{2+4x}{6} = \frac{(2x^2+1)\cdot 6}{(3x-3)\cdot 6} - \frac{(2+4x)\cdot(3x-3)}{6\cdot(3x-3)}$$

$$= \frac{12x^2+6-(6x-6+12x^2-12x)}{6\cdot(3x-3)} =$$

$$= \frac{12x^2+6-6x+6-12x^2+12x}{18x-18}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{12+6x}{18x-18} = \boxed{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}$$

• se divide por la mayor potencia del denominador: $\boxed{x}$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{12+6x}{x}}{\frac{18x-18}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{12}{x}+6}{18-\frac{18}{x}} = \frac{6}{18} = \boxed{\frac{1}{3}}$$

(i) • valor numérico en $x=-2$

$$\left.\begin{array}{l}(-2)^2+5\cdot(-2)+6 = 4-10+6=0 \\ (-2)^2-4 = 4-4=0\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\lim_{x\to -2} \frac{x^2+5x+6}{x^2-4} = \boxed{\left(\frac{0}{0}\right)}$$

• se descomponen tanto el numerador como el denominador en factores primos. Observa que $x=-2$ es una raíz de ambos polinomios. Se emplea la regla de Ruffini

$$\begin{array}{r|rrr} & 1 & 5 & 6 \\ -2 & & -2 & -6 \\ \hline & 1 & 3 & \boxed{0} \end{array} \Rightarrow (x+2)\cdot(x+3)$$

$$\begin{array}{r|rrr} & 1 & 0 & -4 \\ -2 & & -2 & 4 \\ \hline & 1 & -2 & \boxed{0} \end{array} \Rightarrow (x+2)\cdot(x-2)$$

observa que (x^2-4) se podría haber descompuesto como una identidad notable

$x^2-4 = (x+2)(x-2)$

$a^2-b^2 = (a+b)\cdot(a-b)$

$$\lim_{x\to -2} \frac{(x+2)\cdot(x+3)}{(x+2)\cdot(x-2)} =$$

$$\lim_{x\to -2} \frac{x+3}{x-2} = \frac{-2+3}{-2-2} = \boxed{\frac{1}{-4}}.$$

j) $\lim_{x\to\infty} \sqrt{x^2+3x-1} - x = \boxed{(\infty - \infty)}$

• se multiplica y divide por el conjugado.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(\sqrt{x^2+3x-1} - x)\cdot(\sqrt{x^2+3x-1} + x)}{\sqrt{x^2+3x-1} + x} =$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(\sqrt{x^2+3x-1})^2 - x^2}{\sqrt{x^2+3x-1} + x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+3x-1 - x^2}{\sqrt{x^2+3x-1} + x} =$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x-1}{\sqrt{x^2+3x-1} + x} = \boxed{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}$$

• se dividen todos los términos por la mayor potencia del denominador. $\sqrt{x^2} = \boxed{x}$.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{3x-1}{x}}{\frac{\sqrt{x^2+3x-1}}{x} + \frac{x}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{3 - \frac{1}{x}}{\sqrt{1 + \frac{3}{x} - \frac{1}{x^2}} + 1} = \frac{3}{1+1} = \boxed{\frac{3}{2}}.$$

k) Valor numérico en $x = 3$

$3^2 - 6\cdot 3 + 9 = 9 - 18 + 9 = 0$; $3^2 - 9 = 9 - 9 = 0 \Rightarrow \lim_{x\to 3} \frac{x^2-6x+9}{x^2-9} = \boxed{\left(\frac{0}{0}\right)}$

se factorizan el numerador y el denominador

$$\begin{array}{r|rrr} & 1 & -6 & 9 \\ 3 & & 3 & -9 \\ \hline & 1 & -3 & \boxed{0} \end{array} \rightarrow (x-3)\cdot(x-3) \qquad \text{y } x^2-9 = (x+3)\cdot(x-3)$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 3} \frac{(x-3)\cdot(x-3)}{(x+3)\cdot(x-3)} = \lim_{x\to 3} \frac{x-3}{x+3} = \frac{3-3}{3+3} = \boxed{0}.$$

(l) $\lim_{x\to -\infty} \dfrac{3x^2-2x+1}{-4x^2+3x-3} = \boxed{\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)}$

• se divide por la mayor potencia del denominador : x^2

$$\lim_{x\to -\infty} \dfrac{\dfrac{3x^2-2x+1}{x^2}}{\dfrac{-4x^2+3x-3}{x^2}} = \lim_{x\to -\infty} \dfrac{3-\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x^2}}{-4+\dfrac{3}{x}-\dfrac{2}{x^2}} = \dfrac{3}{-4} = \boxed{-\dfrac{3}{4}}$$

(m) $\lim_{x\to \infty} \sqrt{9x^2+2x-1} - (3x+1) = \boxed{(\infty-\infty)}$

• se multiplica y divide por el conjugado.

$$\lim_{x\to\infty} \dfrac{\left[\sqrt{9x^2+2x-1}-(3x+1)\right]\cdot\left[\sqrt{9x^2+2x-1}+(3x+1)\right]}{\sqrt{9x^2+2x-1}+(3x+1)} =$$

$$\lim_{x\to\infty} \dfrac{\left(\sqrt{9x^2+2x-1}\right)^2-(3x+1)^2}{\sqrt{9x^2+2x-1}+(3x+1)} = \lim_{x\to\infty} \dfrac{9x^2+2x-1-(9x^2+6x+1)}{\sqrt{9x^2+2x-1}+(3x+1)} =$$

$$\lim_{x\to\infty} \dfrac{9x^2+2x-1-9x^2-6x-1}{\sqrt{9x^2+2x-1}+(3x+1)} =$$

$$\lim_{x\to\infty} \dfrac{-4x-2}{\sqrt{9x^2+2x-1}+(3x+1)} = \boxed{\left(\dfrac{-\infty}{\infty}\right)}$$

• se divide por la mayor potencia del denominador : $\boxed{x}$

$$\lim_{x\to\infty} \dfrac{\dfrac{-4x-2}{x}}{\dfrac{\sqrt{9x^2+2x-1}}{x}+\dfrac{3x+1}{x}} = \lim_{x\to\infty} \dfrac{-4-\dfrac{2}{x}}{\sqrt{9+\dfrac{2}{x}-\dfrac{1}{x^2}}+3+\dfrac{1}{x}} = \dfrac{-4}{\sqrt{9}+3} = \boxed{\dfrac{-2}{3}}$$

(v) $$\lim_{x\to -\infty} \frac{2x^2+1}{3x-3} - \frac{2+4x}{6} = -\infty - (-\infty) = -\infty + \infty = \boxed{(\infty - \infty)}$$

• Observa.

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{2x^2+1}{3x-3} = \left(\frac{\infty}{-\infty}\right) = \lim_{x\to -\infty} \frac{\frac{2x^2+1}{x}}{\frac{3x-3}{x}} = \lim_{x\to -\infty} \frac{x+\frac{1}{x}}{3-\frac{3}{x}} = -\infty.$$

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{2+4x}{6} = \frac{-\infty}{6} = -\infty$$

• Se efectúa la diferencia de las fracciones

$$\frac{2x^2+1}{3x-3} - \frac{2+4x}{6} = \frac{(2x^2+1)\cdot 6}{(3x-3)\cdot 6} - \frac{(2+4x)\cdot(3x-3)}{6\cdot(3x-3)} =$$

$$= \frac{(2x^2+1)\cdot 6 - (2+4x)\cdot(3x-3)}{6\cdot(3x-3)} = \frac{12x^2+6-(6x-6+12x^2-12x)}{18x-18}$$

$$= \frac{12x^2+6-6x+6-12x^2+12x}{18x-18} \rightarrow$$

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{12+6x}{18x-18} = \left(\frac{-\infty}{-\infty}\right) = \lim_{x\to -\infty} \frac{\frac{12+6x}{x}}{\frac{18x-18}{x}}$$

$$= \lim_{x\to -\infty} \frac{\frac{12}{x}+6}{18-\frac{18}{x}} = \frac{6}{18} = \boxed{\frac{1}{3}}$$

(o) $\lim\limits_{x\to -\infty} \sqrt{x^2-3x+1} - x = \infty - (-\infty) = \boxed{\infty}$.

(p) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a} = \left(\dfrac{0}{0}\right)$ (al calcular los valores numéricos: $\sqrt{a}-\sqrt{a}=0$, $a-a=0$.)

• se multiplica y divide por el conjugado.

$$\lim_{x\to a} \frac{(\sqrt{x}-\sqrt{a})\cdot(\sqrt{x}+\sqrt{a})}{(x-a)\cdot(\sqrt{x}+\sqrt{a})} =$$

$$\lim_{x\to a} \frac{(\sqrt{x})^2-(\sqrt{a})^2}{(x-a)\cdot(\sqrt{x}+\sqrt{a})} = \lim_{x\to a} \frac{x-a}{(x-a)\cdot(\sqrt{x}+\sqrt{a})} =$$

$$\lim_{x\to a} \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{a}} = \boxed{\frac{1}{2\sqrt{a}}} = \frac{1}{2\sqrt{a}}\cdot\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}} = \boxed{\frac{\sqrt{a}}{2a}}.$$

(q) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x-2}{\sqrt{x^2-4}} = \left(\dfrac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{(x-2)\cdot\sqrt{x^2-4}}{\sqrt{x^2-4}\cdot\sqrt{x^2-4}} = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{(x-2)\cdot\sqrt{x^2-4}}{x^2-4} = \left(\dfrac{0}{0}\right)$

[descomponiendo $x^2-4 = (x+2)\cdot(x-2)$].

$$\lim_{x\to 2} \frac{(x-2)\cdot\sqrt{x^2-4}}{(x+2)\cdot(x-2)} = \lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x^2-4}}{x+2} = \frac{0}{4} = \boxed{0}$$

(r) $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(2+h)^2-4}{h} = \left(\dfrac{0}{0}\right) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{4+4h+h^2-4}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{4h+h^2}{h}$

$$= \lim_{h\to 0} (4+h) = \boxed{4}$$

(5) $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{|h|}{h} = \left(\dfrac{0}{0}\right)$

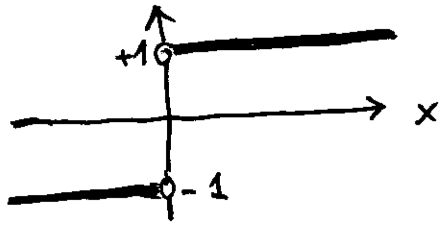
Se calculan los límites laterales.

$\lim\limits_{\substack{h\to 0^+ \\ h>0}} \dfrac{|h|}{h} = \lim\limits_{\substack{h\to 0^+ \\ h>0}} \dfrac{h}{h} = \lim\limits_{\substack{h\to 0^+ \\ h>0}} 1 = 1.$

$\lim\limits_{\substack{h\to 0^- \\ h<0}} \dfrac{|h|}{h} = \lim\limits_{\substack{h\to 0^- \\ h<0}} \dfrac{-h}{h} = \lim\limits_{\substack{h\to 0^- \\ h<0}} (-1) = -1.$

$\boxed{\nexists}$ ⇒ no tiene

La gráfica de $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$ es



(t) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{x^2-16}{\sqrt{x}-2} = \boxed{\left(\dfrac{0}{0}\right)}$ Valor numérico: $4^2-16=0$
$\sqrt{4}-2=0$.

• se multiplica y divide por el conjugado.

$\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{(x^2-16)\cdot(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}-2)\cdot(\sqrt{x}+2)} = \lim\limits_{x\to 4} \dfrac{(x^2-16)\cdot(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x})^2-2^2} =$

$\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{(x^2-16)\cdot(\sqrt{x}+2)}{x-4} = \boxed{\left(\dfrac{0}{0}\right)}$

Factorizando (x^2-16)

$\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{(x+4)\cdot(x-4)\cdot(\sqrt{x}+2)}{x-4} = \lim\limits_{x\to 4} (x+4)\cdot(\sqrt{x}+2) = 8\cdot 4 = \boxed{32}$

2º a) $f(x)=\sqrt{\dfrac{2x+4}{9-x^2}}$

$$\mathrm{Dom}\, f(x) = \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{2x+4}{9-x^2} \geq 0 \right\}$$

El problema se reduce a resolver una inecuación.

- Buscamos los factores y raíces del numerador y denominador

$(2x+4) = 2\cdot(x+2) \longrightarrow$ raíz -2

$9-x^2 = (3-x)\cdot(3+x) \rightarrow$ raíces 3 y -3.

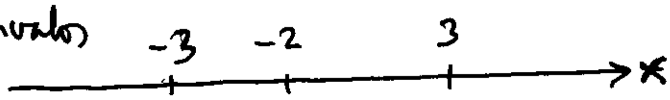
- Tabla de signos. (*)

	$(-\infty,-3)$	-3	$(-3,-2)$	-2	$(-2,3)$	3	$(3,\infty)$
$(x+2)$	$-$	-1	$-$	0	$+$	5	$+$
$(3-x)$	$+$	6	$+$	5	$+$	0	$-$
$(3+x)$	$-$	0	$+$	1	$+$	6	$+$
$\frac{2x+4}{9-x^2}$	$+$	no existe	$-$	0	$+$	no existe	$-$

Solución.

$$\mathrm{Dom}\, f(x) = (-\infty,-3) \cup [-2,3)$$

(*) Observación: si colocas en el eje real es muy sencillo establecer los intervalos



¡Cuidado con el factor $(3-x)$!

(b) $f(x) = \sqrt{-x^2+5x-6}$

$\text{Dom } f(x) = \{ x \in \mathbb{R} : -x^2+5x-6 \geq 0 \}$

El problema se reduce a resolver una inecuación.

$-x^2+5x-6 \geq 0 \iff$ (*)

$\boxed{x^2-5x+6 \leq 0}$

• Factorización:

$x^2-5x+6=0 \longrightarrow x = \dfrac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2-4 \cdot 1 \cdot 6}}{2 \cdot 1} = \dfrac{5 \pm 1}{2} = \begin{cases} 3 \\ 2 \end{cases}$

$(x-3) \cdot (x-2) \leq 0.$

• Tabla de signos

	$(-\infty, 2)$	2	$(2,3)$	3	$(3, \infty)$
$(x-2)$	$-$	0	$+$	1	$+$
$(x-3)$	$-$	-1	$-$	0	$+$
x^2-5x+6	$+$	0	$-$	0	$+$

Solución:

$\text{Dom } f(x) = [2,3].$

(*) Observación: siempre es más sencillo trabajar con el coeficiente de mayor grado positivo. Se suelen cometer menos errores.

ⓒ $f(x) = \ln\left(\dfrac{x^2-4}{x+2}\right)$

$$\text{Dom } f(x) = \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{x^2-4}{x+2} > 0 \right\}$$

Se puede simplificar la fracción algebraica $\dfrac{x^2-4}{x+2} = \dfrac{\cancel{(x+2)}\cdot(x-2)}{\cancel{x+2}}$.

$f(x) = \ln(x-2)$

$$\text{Dom } f(x) = \{ x \in \mathbb{R} : x-2 > 0 \} = \{ x \in \mathbb{R} : x > 2 \} = (2, \infty).$$

ⓓ $f(x) = \dfrac{\sqrt{9-x^2}}{x-3}$

$$\text{Dom } f(x) = \{ x \in \mathbb{R} : 9-x^2 \geq 0 \} \cap \{ x \in \mathbb{R} : x-3 \neq 0 \}. \quad (*)$$

$$9-x^2 \geq 0 \iff x^2-9 \leq 0 \iff \boxed{(x+3)\cdot(x-3) \leq 0}$$

	$(-\infty,-3)$	-3	$(-3,3)$	3	$(3,\infty)$
$x+3$	$-$	0	$+$	6	$+$
$x-3$	$-$	-6	$-$	0	$+$
x^2-9	$+$	0	$-$	0	$+$

Solución $[-3,3]$.

Hemos de eliminar el valor $x=3$ (anula al denominador)

$\Rightarrow$ Dom $f(x) = [-3, 3)$

(*) Es la intersección porque debe existir el numerador "y" el denominador. Deben ser los valores de x comunes de ambas partes de la función.

(e) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}$

$\text{Dom } f(x)=\{x\in\mathbb{R}:\ 4-x^2>0\}$

$4-x^2>0 \iff x^2-4<0 \iff \boxed{(x+2)\cdot(x-2)<0}$

identidad notable $a^2-b^2=(a+b)\cdot(a-b)$.

• Tabla de signos

	$(-\infty,-2)$	-2	$(-2,2)$	2	$(2,\infty)$
$(x+2)$	$-$	0	$+$	4	$+$
$(x-2)$	$-$	-4	$-$	0	$+$
x^2-4	$+$	0	$-$	0	$+$

Solución: $\boxed{\text{Dom } f(x)=(-2,2)}$

(f) $f(x)=\sqrt{\dfrac{3x+6}{x^2-4}}=\sqrt{\dfrac{3(x+2)}{(x+2)(x-2)}}=\sqrt{\dfrac{3}{x-2}}$. (*)

$\text{Dom } f(x)=\{x\in\mathbb{R}:\ x-2>0\}=(2,\infty)$.

Observación: $\dfrac{3\cdot(x+2)}{(x+2)\cdot(x-2)}=\dfrac{3}{x-2}$

se puede simplificar, $\dfrac{x+2}{x+2}=1$, porque $x\neq-2$.

3.

a) $f(g(x)) = f\left(\sqrt{x^2-3}\right) = \dfrac{\sqrt{x^2-3}+1}{\sqrt{x^2-3}-1}$

b) Una función tiene inversa si es inyectiva.

- $f(a) = f(b) \rightarrow \dfrac{a+1}{a-1} = \dfrac{b+1}{b-1} \Leftrightarrow (a+1)\cdot(b-1) = (a-1)\cdot(b+1)$

$\Leftrightarrow a\cdot b - a + b - 1 = a\cdot b + a - b - 1 \Leftrightarrow -a+b = a-b$

$\Leftrightarrow 2b = 2a \Leftrightarrow \boxed{b=a}$. sí es inyectiva.

- cálculo de la inversa

$y = \dfrac{x+1}{x-1} \quad y = f(x)$

$x = \dfrac{y+1}{y-1} \quad y = f^{-1}(x)$

$x\cdot(y-1) = (y+1) \Leftrightarrow x\cdot y - x = y+1 \Leftrightarrow$

$x\cdot y - y = 1 + x \Leftrightarrow y\cdot(x-1) = 1+x \Rightarrow$

$y = \dfrac{1+x}{x-1} \Leftrightarrow \boxed{f^{-1}(x) = \dfrac{1+x}{x-1}}$

Observación: esto no es necesario para el problema. Vamos a comprobar la solución.

$(f\circ f^{-1})(x) = f\left[f^{-1}(x)\right] = \dfrac{\frac{1+x}{x-1}+1}{\frac{1+x}{x-1}-1} = \dfrac{\frac{1+x+x-1}{x-1}}{\frac{1+x-x+1}{x-1}} = \dfrac{2x}{2} = x.$

$\boxed{\text{Observa } f = f^{-1}}$

4f

• Recuerda cómo se representa una parábola incompleta.

$y = ax^2 + bx$

1) ramas: $a > 0$ $\boxed{\cup}$ positivas • $a < 0$ $\boxed{\cap}$ negativas.

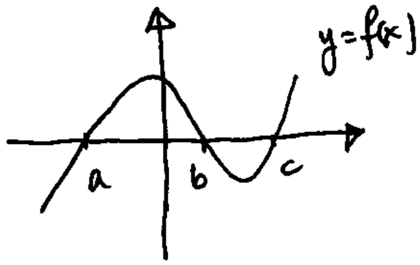
2) raíces: $y = 0 \rightarrow ax^2 + bx = 0 \rightarrow x_1 = 0 \quad x_2 = \frac{-b}{a}$.

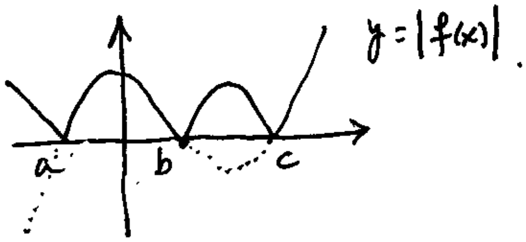
3) eje de simetría y vértice: $x = \frac{-b}{a} \quad V = \left(-\frac{b}{a}, y\left(-\frac{b}{a}\right)\right)$.

• Recuerda cómo se representa $|f(x)|$ si conocemos $f(x)$.

– la parte positiva es la misma.

– la parte negativa (por debajo del eje OX) → la opuesta:





ⓐ $f(x) = |-x^2 + 6x|$.

• $y = -x^2 + 6x$.

$a = -1$ ramas negativas. $\cap$

raíces $-x^2 + 6x = 0 \rightarrow x \cdot (-x+6) = 0$

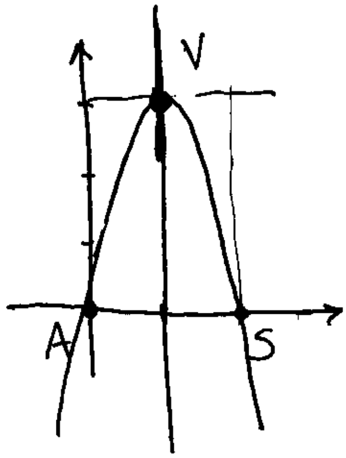
$\rightarrow x_1 = 0 \quad x_2 = 6 \longrightarrow$ puntos de corte $\underbrace{(0,0)}_{A}$ y $\underbrace{(6,0)}_{S}$

eje de simetría: $x_V = 3$

vértice $V = (3, y(3)) = (3, 9)$

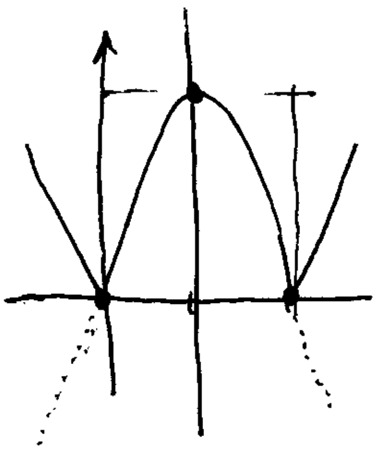
$y(3) = -3^2 + 6 \cdot 3 = 9$

Con los puntos A, S y V se pueden dibujar tanto $-x^2 + 6x$ como $|-x^2 + 6x|$.



$X=3$

$f(x) = -x^2+6x$



$X=3$

$f(x) = |-x^2+6x|.$

ⓑ $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } x \leq 2 \\ -x+3 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

$y = \frac{1}{x}$ es la hipérbola equilátera.

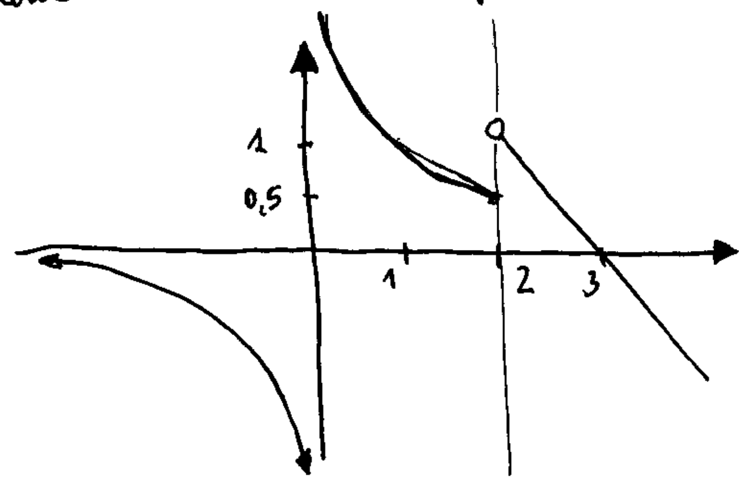
$y=-x+3$ es una recta.

De la recta calculamos 2 puntos. Uno de ellos será siempre el punto frontera.

x	y
2	1
3	0

También se calcula el valor frontera de la hipérbola

x	y
2	$\frac{1}{2}=0{,}5$



7º $\boxed{f(x) = -x^2+4x-4.}$

Ramas $a=-1<0$ negativas.

Un punto y su simétrico

	x	y
A	0	-4
S	4	-4

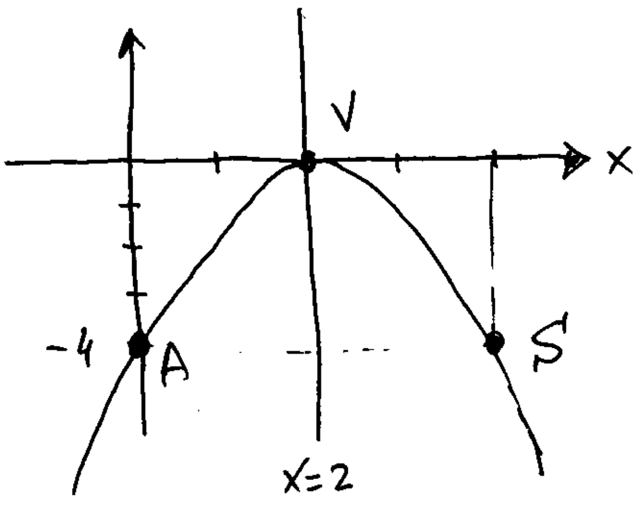
$-x^2+4x-4=-4 \iff -x^2+4x=0$

$\iff x\cdot(-x+4)=0 \Rightarrow \begin{cases} x_1=0 & A=(0,f(0)) \\ x_2=4 & S=(4,f(4)) \end{cases}$

Vértice y eje de simetría.

	x	y
V	2	f(2)

$f(2) = -2^2+4\cdot 2-4 = -4+8-4=0 \Rightarrow V=(2,0)$



$\boxed{g(x) = |x^2+4x|}$

Primero se representará $y=x^2+4x$

Ramas $a=1>0$

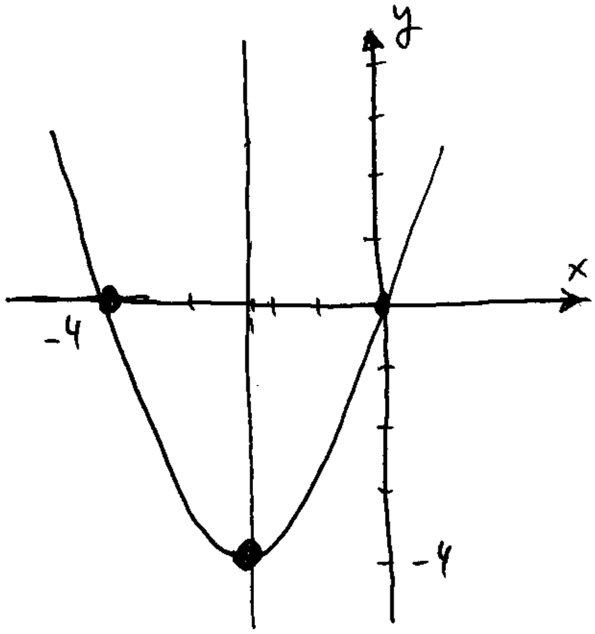
Un punto y su simétrico

	x	y
A	0	0
S	-4	0

$x^2+4x=0.$

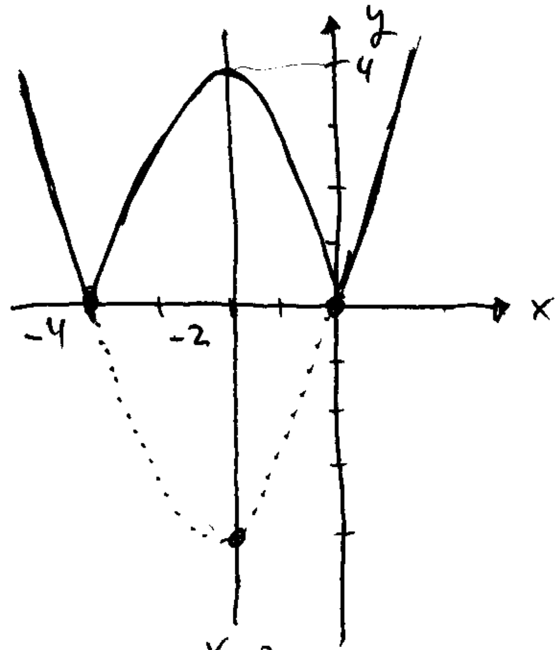
Vértice y eje de simetría

$$V \quad \begin{array}{c|c} x & y \\ \hline -2 & f(-2) \end{array} \qquad f(-2) = (-2)^2 + 4\cdot(-2) = 4 - 8 = -4. \Rightarrow V = (-2, -4)$$



$X = -2$

$f(x) = x^2 + 4x$



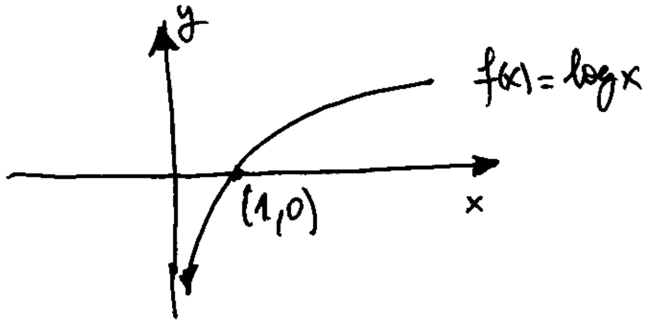
$X = -2$

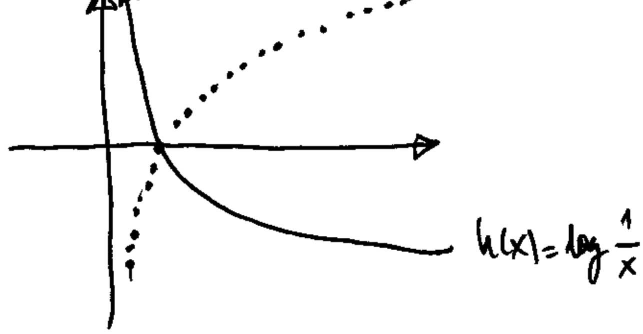
$f(x) = |x^2 + 4x|$

$$\boxed{h(x) = \log \frac{1}{x}}$$

$$\log \frac{1}{x} = \log 1 - \log x = -\log x$$

$\Rightarrow$ $h(x)$ es la OPUESTA de la función $f(x) = \log x$.





9º

ⓐ $N(T)=\frac{N_0}{2}$ condición: al cabo de un tiempo T el número de átomos es la mitad de los iniciales.

$$N(T)=\boxed{N_0\cdot e^{-\lambda T}=\frac{N_0}{2}}$$ ec. exponencial.

$$\Leftrightarrow e^{-\lambda T}=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \ln e^{-\lambda T}=\ln\frac{1}{2} \Leftrightarrow -\lambda T=-\ln 2$$

$$\Leftrightarrow \lambda T=\ln 2 \Rightarrow \boxed{T=\frac{\ln 2}{\lambda}}$$

ⓑ si $\lambda=7{,}8219\cdot 10^{-10} \Rightarrow \boxed{T\simeq\frac{\ln 2}{7{,}8219\cdot 10^{-10}}\simeq 8{,}8612\cdot 10^{8}\text{ segundos}}$

ⓒ para este caso $\lambda=2{,}31\cdot 10^{-3}\ h^{-1}$.

$N(t)=N_0\cdot e^{-\lambda t}$.

Sea T el tiempo pedido. Para $t=T$ el número de átomos es el 60% de los iniciales, es decir,

$N(T)=0{,}60\cdot N_0$.

$\Rightarrow \boxed{0{,}60\cdot N_0=N_0\cdot e^{-\lambda T}}$ ecuación a resolver. $\Leftrightarrow$

$$e^{-\lambda T}=0{,}60 \Leftrightarrow \ln e^{-\lambda T}=\ln 0{,}60 \Leftrightarrow$$

$$-\lambda T=\ln 0{,}60 \Rightarrow T=\frac{\ln 0{,}60}{-\lambda}=-\frac{\ln 0{,}60}{2{,}31\cdot 10^{-3}}$$

$$\boxed{T\simeq 221{,}14\text{ horas}}$$

10º a) Se trata de una parábola

Ramas : $a = 0{,}00025 > 0$ POSITIVAS

Vértice y eje de simetría.

$$x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-0{,}045)}{2\cdot 0{,}00025} = 90. \rightarrow \boxed{V = (90, C(90)) = (90; 5{,}975)}$$

$$C(90) = 8 - 0{,}045\cdot 90 + 0{,}00025\cdot 90^2 = 5{,}975$$

Puntos de corte con los ejes

Eje Y: $x = 0 \rightarrow y = 8. \Rightarrow \boxed{A = (0,8)}$

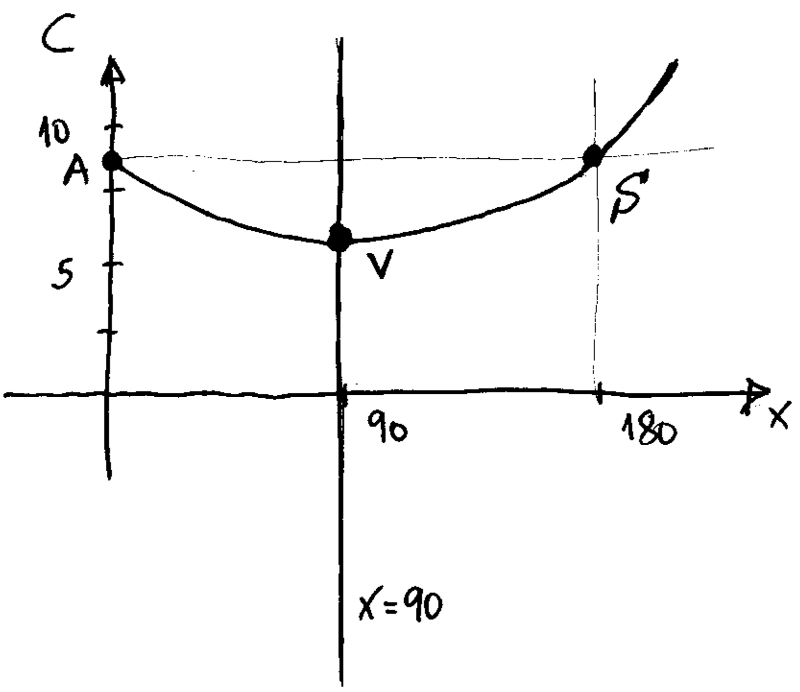
Eje X: $y = 0 \rightarrow 0{,}00025x^2 - 0{,}045x + 8 = 0 \rightarrow$

$$x = \frac{0{,}045 \pm \sqrt{0{,}045^2 - 4\cdot 0{,}00025\cdot 8}}{2\cdot 0{,}00025} \nexists \text{ no tiene.}$$

Punto simétrico de A: $y = 8 \rightarrow 0{,}00025x^2 - 0{,}045x + 8 = 8 \leftrightarrow$

$$0{,}00025x^2 - 0{,}045x = 0 \Leftrightarrow x\cdot(0{,}00025x - 0{,}045) = 0 \Rightarrow$$

$x_1 = 0$ (A) y $x_2 = 180$. (S) : $\boxed{S = (180, 8)}$



ⓑ $x=120 \rightarrow C(120) = 8 - 0{,}045 \cdot 120 + 0{,}00025 \cdot 120^2 = 6{,}2$ litros.

ⓒ Corresponde al mínimo de la función: vértice

velocidad 90 km/hora

consumo 5,975 litros/100 km.

ⓓ $C(x) = 10 \Leftrightarrow$

$$\boxed{8 - 0{,}045x + 0{,}00025x^2 = 10} \Leftrightarrow$$

Ecuación de 2º grado

$$0{,}00025x^2 - 0{,}045x - 2 = 0$$

$$x = \frac{0{,}045 \pm \sqrt{0{,}045^2 - 4 \cdot 0{,}00025 \cdot (-2)}}{2 \cdot 0{,}00025} = \frac{0{,}045 \pm 0{,}063}{0{,}0005}$$

Se obtienen 2 soluciones:

⊕ $x_1 = 126$ Km/hora

⊖ $x_2 = -36$ km/hora (no tiene sentido).

Solución: 126 km/hora.

(11º) Con la simbología habitual

$C = y$ (grados celsius)

$F = x$ (grados farenheit)

$$C = \frac{5}{9}(F-32) \iff \boxed{y = \frac{5}{9}(x-32)}$$

(a) si $x = 41°F \rightarrow y = \frac{5}{9}(41-32) = 5°C$

si $x = 132°F \rightarrow y = \frac{5}{9}(132-32) \simeq 55{,}6°C$

(b) si $y = 20°C \rightarrow 20 = \frac{5}{9}(x-32) \Rightarrow x = \frac{20\cdot 9}{5} + 32 = 68°F.$

si $y = 100°C \rightarrow 100 = \frac{5}{9}(x-32) \Rightarrow x = \frac{9\cdot 100}{5} + 32 = 212°F.$

(c) se trata de hallar la función inversa de $y \, (= f(x))$.

• ¿es inyectiva? Sí por ser una función lineal.

$$f(b) = f(a) \Rightarrow \frac{5}{9}(b-32) = \frac{5}{9}(a-32) \iff \frac{5b}{9} - \frac{5\cdot 32}{9} = \frac{5a}{9} - \frac{5\cdot 32}{9}$$

$$\iff \frac{5b}{9} = \frac{5a}{9} \Rightarrow b = a.$$

• $x = \frac{5}{9}(y-32)$ $\boxed{y = f^{-1}(x)}$

$$\Rightarrow \frac{9x}{5} = y - 32 \Rightarrow y = \frac{9x}{5} + 32 \Rightarrow \boxed{f^{-1}(x) = \frac{9}{5}x + 32}$$

(d)

$y = \frac{5}{9}(x-32)$ de Farenheit a Celsius

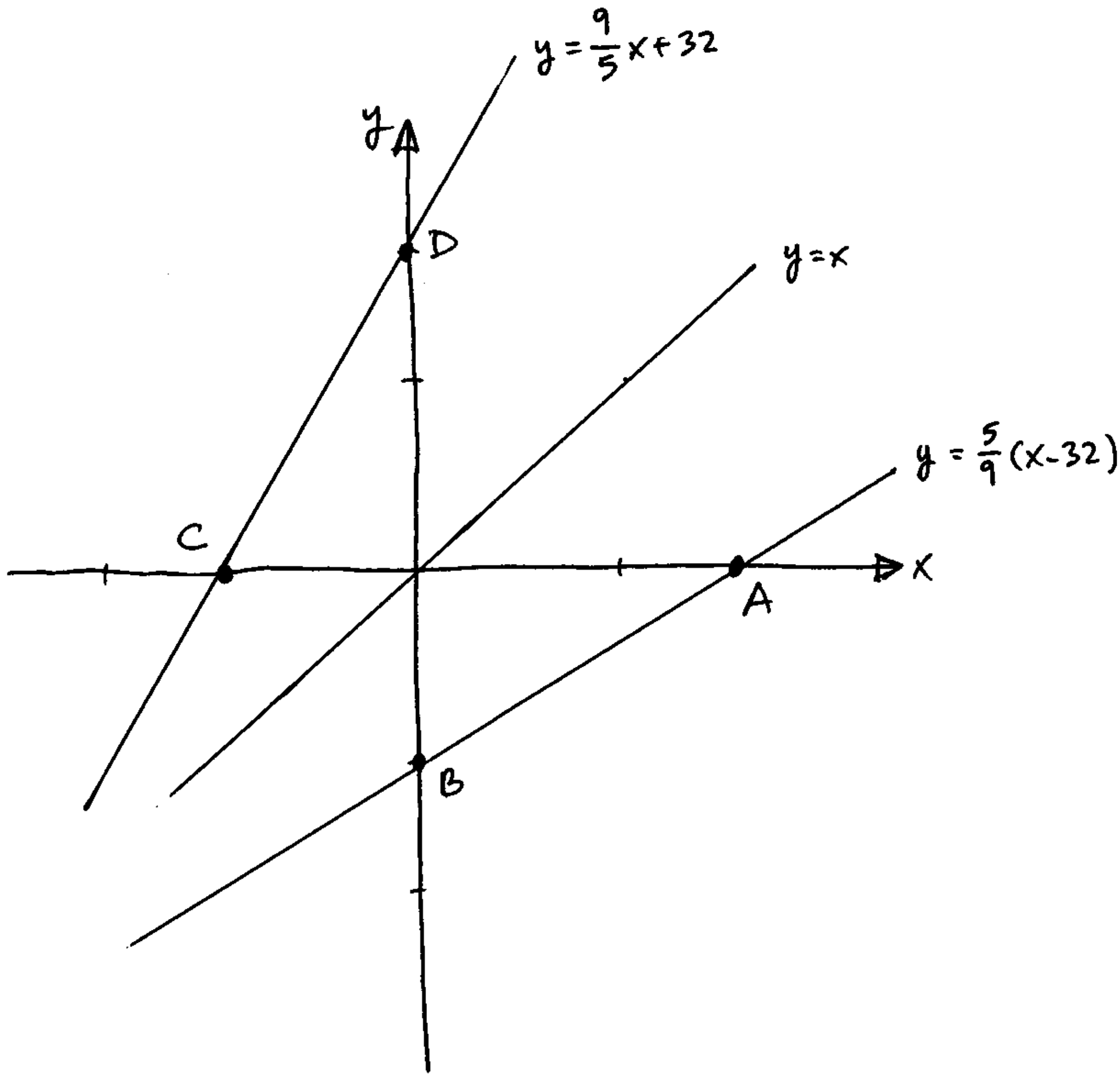
Eje X: $y = 0 \rightarrow x = 32$ $A(32,0)$

Eje Y: $x = 0 \rightarrow y \simeq -18$ $B(0,-18)$

$y = \frac{9}{5}x + 32$ de Celsius a Farenheit.

Eje X: $y = 0 \rightarrow x = -18$ $C(-18,0)$

Eje Y: $x = 0 \rightarrow y = 32$ $D(0,32)$



5º $f(x) = \sqrt{x-1}$

$\text{Dom } f(x) = \{x \in \mathbb{R} : x-1 \geq 0\} = [1, \infty)$

$x-1 \geq 0 \iff x \geq 1 \rightarrow [1, \infty)$

- $f[g(x)] = \sqrt{g(x)-1} = \sqrt{x^2-1}$

- $f[f(x)] = \sqrt{f(x)-1} = \sqrt{\sqrt{x-1}-1}$

- $g[f(x)] = \left(\sqrt{x-1}\right)^2 = x-1.$

6º Representación gráfica.

- PARÁBOLA. $y = 3x^2 - 4x + 1.$

Ramas $a = 3 > 0$ positivas $\cup$

Dos puntos:

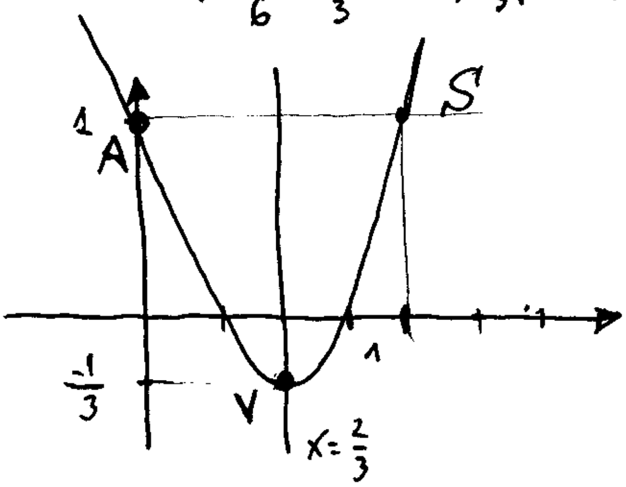
	x	y
A	0	1
S	4/3	1

$3x^2 - 4x + 1 = 1 \Rightarrow 3x^2 - 4x = 0 \rightarrow x \cdot (3x-4) = 0$

$\Rightarrow x_1 = 0 \ (A) \quad x_2 = 4/3 \ (S)$

Vértice y eje de simetría.

$x_V = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \rightarrow f\left(\frac{2}{3}\right) = 3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 - 4 \cdot \left(\frac{2}{3}\right) + 1 = -\frac{1}{3}. \quad V = \left(\frac{2}{3}, \frac{-1}{3}\right).$



• HIPÉRBOLA $y = \frac{2x+1}{3x-2}$.

Se efectúa la división

$$\begin{array}{l|l} 2x+1 & 3x-2 \\ \hline -2x+\frac{4}{3} & \frac{2}{3} \\ \hline \frac{5}{3} & \end{array} \Rightarrow \frac{2x+1}{3x-2} = \frac{2}{3} + \frac{5/3}{3x-2}.$$

asíntotas

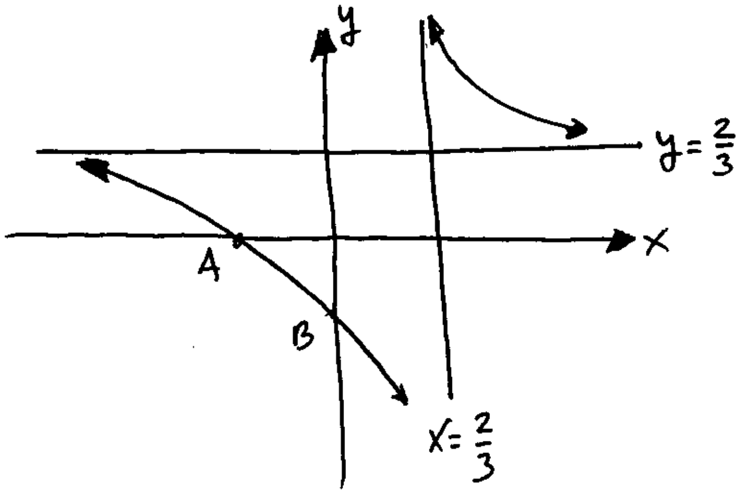
vertical $x = \frac{2}{3}$ $\quad (3x-2=0)$

horizontal $y = \frac{2}{3}$. $\quad \left(\frac{2}{3} + \frac{k}{x-a}\right)$ $\quad k = \frac{5}{3} > 0 \rightarrow 1^{er}$ y 3^{a} cuadrante.

Puntos de corte con los ejes.

Eje X: $y = 0 \rightarrow 2x+1 = 0 \rightarrow x = -1/2$ $\quad A(-1/2, 0)$

Eje Y: $x = 0 \rightarrow y = -1/2 \longrightarrow B(0, -1/2)$.



• COMPOSICIÓN.

$$f(g(x)) = 3\left(\frac{2x+1}{3x-2}\right)^2 - 4\cdot\left(\frac{2x+1}{3x-2}\right) + 1 =$$

$$= \frac{3(2x+1)^2 - 4\cdot(2x+1)\cdot(3x-2) + (3x-2)^2}{(3x-2)^2}$$

$$= \frac{-3x^2+4x+15}{9x^2-12x+4}.$$

• FUNCIÓN INVERSA

(a) $g(x)$ es inyectiva

$$g(b)=g(a) \rightarrow \frac{2b+1}{3b-2}=\frac{2a+1}{3a-2} \Leftrightarrow$$

$$(2b+1)\cdot(3a-2)=(3b-2)\cdot(2a+1) \Leftrightarrow$$

$$\underbrace{6ab}_{/} - 4b + 3a \underbrace{-2}_{//} = \underbrace{6ab}_{/} + 3b - 4a \underbrace{-2}_{//} \Leftrightarrow$$

$$7b = 7a \Rightarrow b=a \Rightarrow \text{es inyectiva} \Rightarrow \text{SI TIENE INVERSA.}$$

(b) cálculo de la función inversa.

$$y=\frac{2x+1}{3x-2} \qquad y=g(x)$$

$$x=\frac{2y+1}{3y-2} \qquad y=g^{-1}(x).$$

(se despeja y de la última igualdad)

$$(3y-2)\cdot x = 2y+1 \Leftrightarrow$$

$$3yx-2x = 2y+1 \Leftrightarrow$$

$$3yx-2y = 2x+1 \Leftrightarrow$$

$$y\cdot(3x-2)=2x+1 \Rightarrow y=\frac{2x+1}{3x-2} \Rightarrow \boxed{g^{-1}(x)=\frac{2x+1}{3x-2}}$$