

1° Determina m para que el ángulo entre las rectas $r: -mx + y - 10 = 0$ y $s: x + 2y - 3 = 0$ sea de 60° . Hazlo de dos formas: 1. el producto escalar y 2. La tangente del ángulo que forman.

2° Calcula m para que el vector $\vec{u} = (1/3, m)$ sea unitario.

3° Determina la posición relativa de las rectas $r: -x + my - 3 = 0$ y $s: mx - y + 2 = 0$ según los valores de m . Calcula la distancia de r a s en cada caso.

4° Calcula el área del triángulo de vértices $A = (2,1)$, $B = (6,2)$ y $C = (3,5)$.

5° Calcula k para que la distancia entre las rectas $r: -3x + 2y = 0$ y $s: -3x + 2y + k = 0$ sea 2.

6° Averigua cuál es el valor de m para que los puntos $A = (1,0)$, $B = (4,-1)$ y $C = (m,2)$ estén alineados.

7° Por el punto $A = (1,6)$ trazamos la perpendicular a la recta $r: 2x + y - 2 = 0$. Halla un punto de esa perpendicular que equidiste de A y de r .

8° Encuentra las coordenadas de los puntos situados en la recta $r: x + 2y - 3 = 0$ que distan 2 unidades de la recta $s: 4x - 3y + 9 = 0$.

9° Halla la ecuación de la mediatriz de AB , siendo $A = (3,1)$ y $B = (5,2)$

10° Dado el triángulo de vértices $A = (1,3)$, $B = (-2,5)$ y $C = (0,-3)$. Calcula:

- a) las ecuaciones de sus alturas y ortocentro,
- b) las ecuaciones de sus medianas y baricentro,
- c) las ecuaciones de sus mediatrices y circuncentro,

11° De todas las rectas que pasan por el punto $P = (2,1)$, halla las que distan 1 unidad del origen.

12° Halla las coordenadas del punto simétrico de $A = (-2,4)$ respecto de la recta $r: 2x + 3y = 0$.

13° Encuentra el baricentro y el ortocentro del triángulo de vértices $A = (0,0)$, $B = (4,0)$ y $C = (6,8)$.

14° Halla el punto simétrico de $P = (-3,0)$ respecto de la recta $r: 4x + y - 2 = 0$.

15° El punto $A = (4,-3)$ dista 5 unidades de dos puntos de la recta $r: 7x - y - 6 = 0$, calcula las coordenadas de los dos puntos.

16° Halla las coordenadas del punto simétrico del origen respecto de la recta $2x - 3y = 6$. Halla la distancia de dicho punto respecto de la recta.

17° Dado el vector $\vec{u} = (a, -3)$ y $\vec{w} = (-2, 1)$. Calcula:

- a) el valor de a para que sea perpendicular a $\vec{v} = (2, 5)$,
- b) el valor de a para que $\vec{v} = (2, 5)$ tenga módulo 5.
- c) Un vector unitario a $\vec{w}$,
- d) el ángulo que forman $\vec{u}$ y $\vec{w}$ si a es 3. Exprésalo en radianes y grados

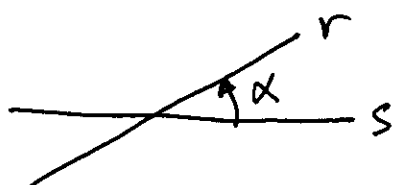


10

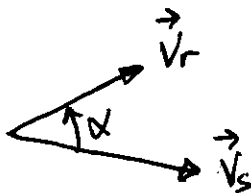
Método 1. El producto escalar

PRELIMINARES

El ángulo entre 2 rectas es el ángulo de sus vectores directores.



$$\alpha = \text{áng}(r, s)$$



$$\alpha = \text{áng}(\vec{v}_r, \vec{v}_s)$$

$$\boxed{\vec{v}_r \cdot \vec{v}_s = |\vec{v}_r| \cdot |\vec{v}_s| \cdot \cos \alpha}$$

$$r: -mx + y - 10 = 0$$

$$\vec{n}_r = (-m, 1) \rightarrow \vec{v}_r = (1, m)$$

$$s: x + 2y - 3 = 0$$

$$\vec{n}_s = (1, 2) \rightarrow \vec{v}_s = (2, -1)$$

Imponemos la condición para determinar m:

$$\vec{v}_r \cdot \vec{v}_s = |\vec{v}_r| \cdot |\vec{v}_s| \cdot \cos 60^\circ$$

Cálculos:

$$\vec{v}_r \cdot \vec{v}_s = (1, m) \cdot (2, -1) = 2 - m$$

$$|\vec{v}_r| = \sqrt{1+m^2} \quad |\vec{v}_s| = \sqrt{2^2+(-1)^2} = \sqrt{5} \quad \cos 60^\circ = \frac{1}{2} \quad \left. \vphantom{\frac{1}{2}} \right\} \Rightarrow$$

$$\boxed{2 - m = \sqrt{1+m^2} \cdot \sqrt{5} \cdot \frac{1}{2}}$$

$\Leftrightarrow$

$$\boxed{4 - 2m = \sqrt{5+5m^2}}$$

Ecuación inercial.

M

Departamento de Matemáticas

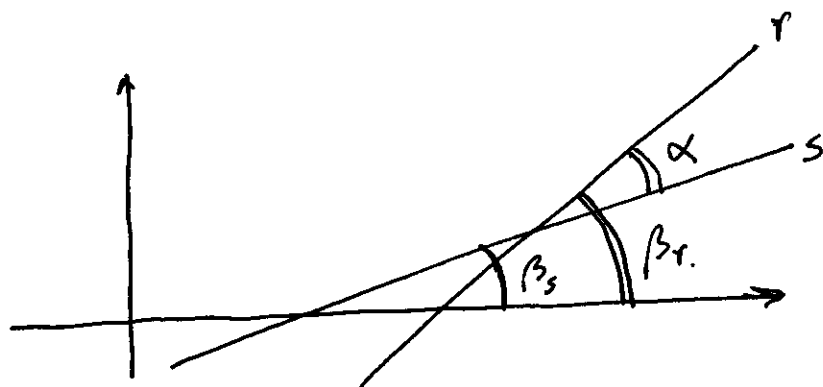
$$(4-2m)^2 = (\sqrt{5+5m^2})^2 \Leftrightarrow 16-16m+4m^2 = 5+5m^2 \Leftrightarrow$$

$$m^2 + 16m - 11 = 0$$

$$m = \frac{-16 \pm \sqrt{16^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-11)}}{2} = \frac{-16 \pm \sqrt{300}}{2} = -8 \pm \sqrt{75}$$

$$\text{Extrañendo factores de } \sqrt{75} = \sqrt{25 \cdot 3} = 5\sqrt{3} \Rightarrow m = -8 \pm 5\sqrt{3}$$

Método 2. La tangente.



$$\alpha = \beta_r - \beta_s$$

$$\begin{aligned} \beta_r &= \text{ángulo que forma } r \text{ con el eje de abscisas} \Rightarrow \operatorname{tg} \beta_r = m_r \\ \beta_s &= \text{ " " " s " " } \Rightarrow \operatorname{tg} \beta_s = m_s. \end{aligned}$$

$$\text{Recuerda } \operatorname{tg}(B-A) = \frac{\operatorname{tg} B - \operatorname{tg} A}{1 + \operatorname{tg} B \cdot \operatorname{tg} A}$$

$$\Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg}(\beta_r - \beta_s) = \frac{\operatorname{tg} \beta_r - \operatorname{tg} \beta_s}{1 + \operatorname{tg} \beta_r \cdot \operatorname{tg} \beta_s} \Leftrightarrow \boxed{\operatorname{tg} \alpha = \frac{m_r - m_s}{1 + m_r \cdot m_s}}$$

$$\left. \begin{aligned} r: -mx + y - 10 &= 0 \rightarrow \vec{v}_r = (1, m) \rightarrow m_r = \frac{m}{1} = m \\ s: x + 2y - 3 &= 0 \rightarrow \vec{v}_s = (2, -1) \rightarrow m_s = -\frac{1}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

M

Departamento de Matemáticas

$$\operatorname{tg} 60^\circ = \frac{m_r - m_s}{1 + m_r \cdot m_s} \Leftrightarrow \sqrt{3} = \frac{m - (-\frac{1}{2})}{1 + m \cdot \frac{-1}{2}} \Leftrightarrow \boxed{\sqrt{3} \cdot (1 - \frac{m}{2}) = m + \frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow \sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}m = m + \frac{1}{2} \Rightarrow m \cdot (1 + \frac{\sqrt{3}}{2}) = \sqrt{3} - \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$m = \frac{\sqrt{3} - \frac{1}{2}}{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\frac{2\sqrt{3}-1}{2}}{\frac{2+\sqrt{3}}{2}} = \frac{2\sqrt{3}-1}{2+\sqrt{3}} \quad (\text{racionalizando})$$

$$\boxed{m = \frac{2\sqrt{3}-1}{2+\sqrt{3}} \cdot \frac{2-\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}-6-2+\sqrt{3}}{4-3} = \frac{-8+5\sqrt{3}}{-1} = \boxed{+8-5\sqrt{3}}}$$

Otra opción sería

$$\operatorname{tg} 60^\circ = \frac{m_s - m_r}{1 + m_s \cdot m_r} \rightarrow \dots \boxed{m = -8 + 5\sqrt{3}}.$$

OBSERVACIONES

con la tangente la ecuación sería $\operatorname{tg} 60^\circ = \frac{|m_r - m_s|}{1 + m_r \cdot m_s}$

con el coseno la ecuación sería $|\vec{v}_r \cdot \vec{v}_s| = |\vec{v}_r| \cdot |\vec{v}_s| \cdot \cos 60^\circ$.

donde $|\vec{v}_r \cdot \vec{v}_s|$ indica el VALOR ABSOLUTO.



② Un vector unitario es aquel vector de módulo 1.

$$\vec{u} = \left(\frac{1}{3}, m\right)$$

$$\text{Condición: } |\vec{u}| = 1 \Leftrightarrow \boxed{\sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2 + m^2} = 1}$$

$$\sqrt{\frac{1}{9} + m^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{9} + m^2 = 1 \Rightarrow m^2 = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}.$$

$$\Rightarrow \boxed{m = \pm \sqrt{\frac{8}{9}} = \pm \frac{2\sqrt{2}}{3}}$$



③° PRELIMINARES.

Para estudiar la posición relativa de 2 rectas conviene expresarlas en forma general.

$$r: Ax + By + C = 0$$

$$s: A'x + B'y + C' = 0$$

$$\frac{A}{A'} \neq \frac{B}{B'} \rightarrow \text{SECANTES} \rightarrow \text{dis}(r, s) \neq 0$$

$$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} \neq \frac{C}{C'} \rightarrow \text{PARALELAS}$$

$$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'} \rightarrow \text{COINCIDENTES} \rightarrow \text{dis}(r, s) = 0$$

Para el caso de rectas paralelas su distancia se puede calcular de 2 formas.

• Fórmula.

$$\begin{aligned} r: Ax + By + C &= 0 \\ s: Ax + By + C' &= 0 \end{aligned} \rightarrow \text{dis}(r, s) = \frac{|C - C'|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Hay que tener la precaución de expresar r y s con los mismos valores de A y B .

• Aplicando la fórmula de un punto a una recta.

$$\text{dis}(r, s) = \text{dis}(P_r, s) = \text{dis}(P_s, r)$$

es la distancia de CUALQUIER punto de r a s ó
la distancia de CUALQUIER punto de s a r .



Resolución:

$$\frac{-1}{m} = \frac{m}{-1} \Leftrightarrow m^2 = 1 \rightarrow m = \pm 1.$$

• si $m \neq \pm 1 \rightarrow$ rectas secantes $\Rightarrow \text{dis}(r,s) = 0$.

• si $m = 1$.

$$\frac{-1}{1} = \frac{1}{1} \neq \frac{-3}{2} \rightarrow \text{rectas paralelas.}$$

FÓRMULA

$$\begin{aligned} r: -x + y - 3 &= 0 \\ s: x - y + 2 &= 0 \end{aligned} \left\{ \begin{array}{l} \text{¿misma A y B?} \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned} r: x - y + 3 &= 0 \\ s: x - y + 2 &= 0 \end{aligned} \left\{ \Rightarrow \text{dis}(r,s) = \frac{|3-2|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \right.$$

Buscamos un punto de r : $x=0 \rightarrow y=3 \Rightarrow P=(0,3)$

$$\text{dis}(r,s) = \text{dis}(P,s) = \frac{|0-3+2|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

• si $m = -1$.

$$\frac{-1}{-1} = \frac{-1}{-1} \neq \frac{-3}{2} \rightarrow \text{rectas paralelas.}$$

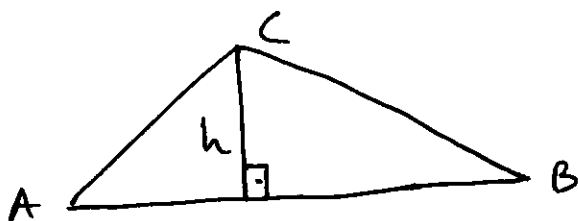
FÓRMULA.

$$\begin{aligned} r: -x - y - 3 &= 0 \\ s: -x - y + 2 &= 0 \end{aligned} \left\{ \Rightarrow \text{dis}(r,s) = \frac{|-3-2|}{\sqrt{(-1)^2 + (-1)^2}} = \frac{5}{\sqrt{2}} \right.$$



PRELIMINARES.

El área de un triángulo es $\frac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2}$.



$$\text{base } |AB| = b$$

$$\text{altura } h = \text{dis}(C, r_{AB})$$

$$S = \frac{b \cdot h}{2}$$

la altura del lado AB es la distancia del vértice C a la recta que pasa por A y B.

Paso 1

$$b = |AB|$$

$$AB = B - A = (6, 2) - (2, 1) = (4, 1) \quad \left\{ \begin{array}{l} |AB| = \sqrt{4^2 + 1^2} = \sqrt{17} \end{array} \right.$$

Paso 2.

Recta que pasa por A y B. Se conoce 1 punto (A) y un vector (AB)

$$r \begin{cases} A = (2, 1) \\ AB = (4, 1) \end{cases}$$

En forma continua: $\frac{x-2}{4} = \frac{y-1}{1}$. la expresamos en forma general pues hemos de calcular una distancia.

$$\frac{x-2}{4} = \frac{y-1}{1} \Leftrightarrow x-2 = 4(y-1) \Leftrightarrow \boxed{x - 4y + 2 = 0}$$

Paso 3.

$$h = \text{dis}(C, r) = \frac{|3 - 4 \cdot 5 + 2|}{\sqrt{1^2 + (-4)^2}} = \frac{15}{\sqrt{17}}$$

Paso 4

$$S = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{17} \cdot \frac{15}{\sqrt{17}} = \frac{15}{2} u^2$$



⑤ PRELIMINARES

Si $r: Ax + By + C = 0$ y $s: Ax + By + C' = 0$, son 2 rectas paralelas.

$$\text{dis}(r, s) = \frac{|C - C'|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

En nuestro caso:

$$r: -3x + 2y = 0$$

$$s: -3x + 2y + k = 0$$

$$\text{Condición: } \text{dis}(r, s) = 2 \Leftrightarrow$$

$$\frac{|k - 0|}{\sqrt{(-3)^2 + 2^2}} = 2 \Leftrightarrow \frac{|k|}{\sqrt{13}} = 2 \Rightarrow$$

$$|k| = 2\sqrt{13} \Rightarrow \boxed{k = \pm 2\sqrt{13}}$$



6°

PRELIMINARES.

Tres puntos están alineados si están en la misma recta.

PROCEDIMIENTO.Paso 1.

Se calcula la recta que pasa por $A=(1,0)$ y $B=(4,-1)$.

• vector director: $\vec{v} = \overrightarrow{AB} = B - A = (4,-1) - (1,0) = (3,-1)$

• forma continua:

$$r = \left\{ \begin{array}{l} \vec{v} \\ A \end{array} \right. \Rightarrow \frac{x-1}{3} = \frac{y}{-1}$$

la expresaremos en forma general $-x+1=3y \Rightarrow \boxed{x+3y-1=0}$

Paso 2

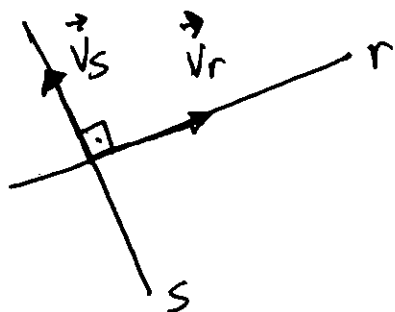
$C \in r \Rightarrow C$ cumple su ecuación

$$C=(m,2) \in r: x+3y-1=0 \Rightarrow \boxed{m+3 \cdot 2 - 1 = 0}$$

$$\Rightarrow \boxed{m = -5}$$



7. Si r y s son rectas perpendiculares, se cumple que
 $\vec{v}_r = \vec{n}_s \Leftrightarrow \vec{v}_s = \vec{n}_r$



$$\begin{aligned} r: Ax + By + C &= 0 \\ \vec{n}_r &= (A, B) \end{aligned}$$

Resolución del problema.

- a) Sea s la recta solución. Necesitamos averiguar

a) un vector director

$$s \perp r \rightarrow \vec{v}_s = \vec{n}_r = (2, 1) \quad r: 2x + y - 2 = 0$$

b) un punto: $A = (1, 6)$

En forma continua

$$s: \frac{x-1}{2} = \frac{y-6}{1} \Leftrightarrow x-1 = 2y-12 \Leftrightarrow \boxed{s: x - 2y + 11 = 0}$$

- b) $P = (a, b)$

condiciones

$$P \in s \Rightarrow a - 2b + 11 = 0$$

$$\text{dis}(A, P) = \text{dis}(P, r) \Rightarrow \sqrt{(a-1)^2 + (b-6)^2} = \frac{|2a+b-2|}{\sqrt{2^2+1^2}}$$

Sistema.

$$\left\{ \begin{aligned} a - 2b + 11 &= 0 \\ \sqrt{(a-1)^2 + (b-6)^2} &= \frac{|2a+b-2|}{\sqrt{5}} \end{aligned} \right.$$



Vamos a trabajar la 2ª ecuación. Elevando al cuadrado ambos miembros:

$$(a-1)^2 + (b-6)^2 = \frac{(2a+b-2)^2}{5} \Leftrightarrow$$

$$5a^2 - 10a + 5 + 5b^2 - 60b + 180 = 4a^2 + b^2 + 4 + 4ab - 8a - 4b.$$

$$\therefore \begin{cases} a^2 + 4b^2 - 2a - 56b - 4ab + 181 = 0 \\ a - 2b + 11 = 0 \end{cases} \left\{ \begin{array}{l} \leftarrow \\ a = 2b - 11 \end{array} \right.$$

$$(2b-11)^2 + 4b^2 - 2(2b-11) - 56b - 4(2b-11) \cdot b + 181 = 0.$$

$$\underline{4b^2} - \underline{44b} + 121 + \underline{4b^2} - 4b + 22 - 56b - \underline{8b^2} + \underline{44b} + 181 = 0$$

$$-60b + 346 = 0 \rightarrow \underline{b} = \frac{346}{66} = \underline{\frac{173}{33}}$$

$$\Rightarrow a = 2 \cdot \frac{173}{33} - 11 = \frac{-17}{33}$$

$$\Rightarrow \boxed{P = \left(-\frac{17}{33}, \frac{173}{33} \right)}$$



82) Sea P el punto pedido, en coordenadas $P = (a, b)$

Condiciones:

• $P \in r \rightarrow P$ cumple la ecuación de $r. \Rightarrow \boxed{a + 2b - 3 = 0}$

• $\text{dist}(P, s) = 2 \Rightarrow \frac{|4a - 3b + 9|}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}} = 2 \Leftrightarrow$

$\frac{|4a - 3b + 9|}{5} = 2 \Leftrightarrow \boxed{|4a - 3b + 9| = 10} \Leftrightarrow 4a - 3b + 9 = \pm 10$

Tendremos 2 sistemas (debido al VALOR ABSOLUTO)

Signo $\oplus$

$$\begin{cases} a + 2b - 3 = 0 \\ 4a - 3b + 9 = +10 \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} a + 2b = 3 \\ 4a - 3b = 1 \end{cases}} \quad \begin{matrix} a = 3 - 2b \\ \leftarrow \end{matrix}$$

$4 \cdot (3 - 2b) - 3b = 1 \Leftrightarrow 12 - 8b - 3b = 1 \rightarrow -11b = -11 \Rightarrow \boxed{b = 1}$

$\Rightarrow a = 3 - 2 \cdot 1 = 1 \rightarrow \text{Solución: } \boxed{P = (1, 1)}$

Signo $\ominus$

$$\begin{cases} a + 2b - 3 = 0 \\ 4a - 3b + 9 = -10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + 2b = 3 \\ 4a - 3b = -19 \end{cases} \quad \begin{matrix} a = 3 - 2b \\ \leftarrow \end{matrix}$$

$4 \cdot (3 - 2b) - 3b = -19 \Leftrightarrow 12 - 8b - 3b = -19 \Rightarrow -11b = -31 \Rightarrow \boxed{b = \frac{31}{11}}$

$\Rightarrow a = 3 - 2 \cdot \frac{31}{11} = -\frac{29}{11} \rightarrow \text{Solución: } \boxed{P' = \left(-\frac{29}{11}, \frac{31}{11}\right)}$

M

Departamento de Matemáticas

90

la mediatriz es la recta perpendicular a la recta que contiene a A y B y pasa por su punto medio.

Sea m el nombre de dicha recta.

$$m \begin{cases} \text{vector } \vec{v} \perp AB \\ M = \frac{A+B}{2} \end{cases}$$

Cálculos:

$$\bullet AB = B - A = (5, 2) - (3, 1) = (2, 1)$$

un vector perpendicular a AB sería $\vec{v} = (-1, 2)$.

$$\bullet M = \frac{A+B}{2} = \frac{(3, 1) + (5, 2)}{2} = (4, \frac{3}{2})$$

la recta m en forma continua sería:

$$m: \frac{x-4}{-1} = \frac{y-\frac{3}{2}}{2}$$

Operando para expresarla en forma general:

$$2(x-4) = -1 \cdot (y-\frac{3}{2}) \Leftrightarrow 2x-8 = -y+\frac{3}{2} \Leftrightarrow$$

$$2x+y-8-\frac{3}{2} = 0 \Leftrightarrow 2x+y-\frac{19}{2} = 0 \quad (\cdot 2) \Rightarrow$$

$$m: 4x+2y-19=0$$

OTRO MÉTODO.

$$m: Ax + By + C = 0$$

(A, B) es un vector normal a m $\Rightarrow (2, 1) \perp m$

$$m: 2x + y + C = 0.$$



$M \in m \rightarrow M$ cumple su expresión:

$$M = (4, \frac{3}{2}) \in 2x + y + C = 0 \Rightarrow 2 \cdot 4 + \frac{3}{2} + C = 0 \rightarrow C = -\frac{19}{2}$$

$$\Rightarrow 2x + y - \frac{19}{2} = 0 \Leftrightarrow \boxed{4x + 2y - 19 = 0}$$

OTRO MÉTODO MÁS:

la mediatriz de AB es el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de A y de B.

$$P = (x, y)$$

$$P \in \text{mediatriz} \Rightarrow \text{dis}(A, P) = \text{dis}(B, P) \Leftrightarrow |AP| = |BP|$$

En coordenadas

$$\sqrt{(x-3)^2 + (y-1)^2} = \sqrt{(x-5)^2 + (y-2)^2} \quad (\text{elevando al cuadrado})$$

$$(x-3)^2 + (y-1)^2 = (x-5)^2 + (y-2)^2 \Leftrightarrow$$

$$x^2 - 6x + 9 + y^2 - 2y + 1 = x^2 - 10x + 25 + y^2 - 4y + 4 \Leftrightarrow$$

$$-6x + 9 - 2y + 1 + 10x - 25 + 4y - 4 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\boxed{4x + 2y - 19 = 0}$$

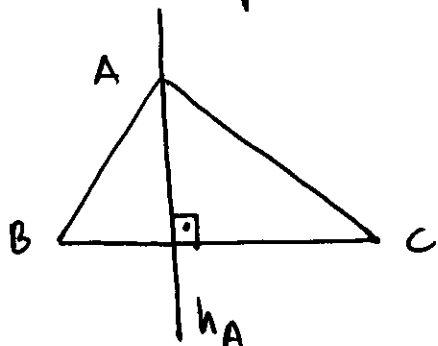


103

a)

Altura: recta perpendicular a un lado que pasa por el vértice opuesto.

Ortocentro: punto de corte de las alturas.



notación: $h_A \equiv$ altura del vértice A ó del lado BC.

$P \equiv$ ortocentro de $\triangle ABC$.

$$\bullet) h_A = \begin{cases} \text{punto } A = (1, 3) \\ \perp BC = C - B = (0, -3) - (-2, 5) = (2, -8) \equiv (1, -4) \end{cases}$$

en forma general

$$1 \cdot x + (-4)y + G' = 0.$$

$$A \in h_A \rightarrow 1 \cdot 1 + (-4) \cdot 3 + G' = 0 \rightarrow G' = 11$$

$$\boxed{h_A: x - 4y + 11 = 0}$$

$$\bullet) h_B = \begin{cases} \text{punto } B = (-2, 5) \\ \perp AC = C - A = (0, -3) - (1, 3) = (-1, -6) \equiv (1, 6) \end{cases}$$

en forma general

$$1 \cdot x + 6 \cdot y + G' = 0$$

$$B \in h_B \rightarrow 1 \cdot (-2) + 6 \cdot 5 + G' = 0 \rightarrow G' = -28$$

$$\boxed{h_B: x + 6y - 28 = 0}$$

$$\bullet) h_C = \begin{cases} \text{punto } C' = (0, -3) \\ \perp AB = B - A = (-2, 5) - (1, 3) = (-3, 2) \end{cases}$$

en forma general

$$-3x + 2y + G' = 0$$

$$C \in h_C: -3 \cdot 0 + 2 \cdot (-3) + G' = 0 \rightarrow G' = 6$$

$$\boxed{h_C: -3x + 2y + 6 = 0}$$



ORTOCENTRO: punto de corte de las alturas.

$$P = h_A \cap h_B$$

$$\begin{cases} x - 4y + 11 = 0 \\ x + 6y - 28 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 4y - 11$$

$$4y - 11 + 6y - 28 = 0 \Leftrightarrow 10y = 39 \rightarrow y = \frac{39}{10} \Rightarrow x = 4 \cdot \frac{39}{10} - 11 = \frac{23}{5}$$

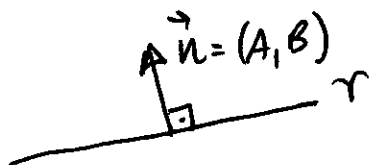
$$\Rightarrow P = \left(\frac{23}{5}, \frac{39}{10} \right)$$

$$\text{¿} P \in h_c \text{? } \text{¿} -3 \cdot \frac{23}{5} + 2 \cdot \frac{39}{10} + 6 = 0 \text{?}$$

$$-\frac{69}{5} + \frac{78}{10} + 6 = -\frac{69}{5} + \frac{39}{5} + 6 = -\frac{30}{5} + 6 = 0.$$

Recuerde: en una recta en forma general $r: Ax + By + C = 0$

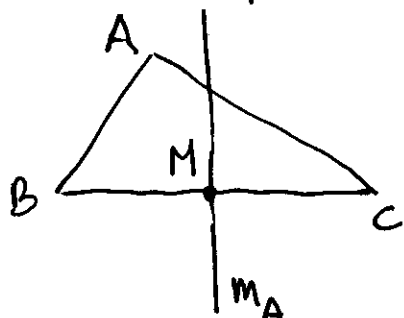
(A, B) es un vector NORMAL a r .



M

Departamento de Matemáticas

- c) Mediatriz: recta perpendicular a un lado que pasa por su punto medio.



$$M = \frac{B+C}{2}$$

$$m_A = \begin{cases} \text{punto } M \\ \text{perpendicular a } BC. \end{cases}$$

Circuncentro: punto de corte de las mediatrices.

I = circuncentro de $\widehat{ABC}$.

$$m_A = \begin{cases} M \\ \perp BC \end{cases}$$

$$M = \frac{B+C}{2} = \frac{(-2,5) + (0,-3)}{2} = (-1,1)$$

$$BC = C - B = (2,-8) \equiv (1,-4)$$

en forma general

$$1 \cdot x + (-4) \cdot y + G = 0$$

$$M \in m_A \rightarrow 1 \cdot (-1) + (-4) \cdot 1 + G = 0 \rightarrow G = 5 \quad \left\{ \begin{array}{l} m_A: x - 4y + 5 = 0 \end{array} \right.$$

- d) m_B es una recta paralela a la altura del lado AC y pasa por el punto medio de A y C.

$$m_B = \begin{cases} N = \frac{A+C}{2} = \frac{(1,3) + (0,-3)}{2} = (1/2, 0) \\ \parallel h_B \rightarrow x + 6y + G = 0 \end{cases}$$

$$(1/2, 0) \in x + 6y + G = 0 \rightarrow \frac{1}{2} + G = 0 \rightarrow G = -\frac{1}{2} \quad \left\{ \begin{array}{l} m_B: x + 6y - \frac{1}{2} = 0 \end{array} \right.$$

OBSERVACIÓN:

No confundir el coeficiente G en la forma general con el punto G del triángulo.

M

Departamento de Matemáticas

$$1) m_c = \begin{cases} R = \frac{A+B}{2} = \frac{(1,3)+(-2,5)}{2} = (-\frac{1}{2}, 4) \\ \perp AB = (-3, 2) \end{cases}$$

en forma general:

$$-3x + 2y + G = 0.$$

$$R \in -3x + 2y + G = 0 \rightarrow -3 \cdot (-\frac{1}{2}) + 2 \cdot 4 + G = 0 \rightarrow G = -\frac{19}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{m_c: -3x + 2y - \frac{19}{2} = 0}$$

CIRCUNCENTRO: $P = m_A \cap m_B$, y comprobaremos que es de m_c .

$$\begin{cases} x - 4y + 5 = 0 \\ x + 6y - \frac{1}{2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 4y + 5 = 0 \\ -x - 6y + \frac{1}{2} = 0 \end{cases} \rightarrow \boxed{y = \frac{11}{20}}$$

$$x = 4y - 5 = 4 \cdot \frac{11}{20} - 5 = -\frac{14}{5} \Rightarrow \boxed{P = (-\frac{14}{5}, \frac{11}{20})}$$

$$\text{¿} P \in m_c \text{? } -3 \cdot (-\frac{14}{5}) + 2 \cdot \frac{11}{20} - \frac{19}{2} = \frac{42}{5} + \frac{22}{20} - \frac{19}{2} = 0. \quad \underline{\underline{SI}}$$

P es el centro de la circunferencia circunscrita $\Rightarrow |PA| = |PB| = |PC|$

$$|PA| = \sqrt{\left(1 + \frac{14}{5}\right)^2 + \left(3 - \frac{11}{20}\right)^2} = \sqrt{\frac{361}{25} + \frac{2401}{400}} = \sqrt{\frac{8177}{400}}$$

$$|PB| = \sqrt{\left(-2 + \frac{14}{5}\right)^2 + \left(5 - \frac{11}{20}\right)^2} = \sqrt{\frac{16}{25} + \frac{7921}{400}} = \sqrt{\frac{8177}{400}}$$

$$|PC| = \sqrt{\left(0 + \frac{14}{5}\right)^2 + \left(-3 - \frac{11}{20}\right)^2} = \sqrt{\frac{196}{25} + \frac{5401}{400}} = \sqrt{\frac{8177}{400}}$$



112

Sea r la recta solución. Será una recta del haz de rectas que pasan por $P = (2, 1)$: en forma punto-pendiente.

$$r: y - 1 = m \cdot (x - 2)$$

Deberemos determinar m .

$$\text{Condición: } \text{dist}(r, O) = 1 \quad \text{siendo } O = (0, 0)$$

Para poder aplicar la fórmula deberemos expresar r en forma general.

$$y - 1 = mx - 2m \Rightarrow \boxed{mx - y + 1 - 2m = 0}$$

Impongamos la condición: (*)

$$\frac{|m \cdot 0 - 0 + 1 - 2m|}{\sqrt{m^2 + (-1)^2}} = 1 \Leftrightarrow \frac{|1 - 2m|}{\sqrt{m^2 + 1}} = 1 \Leftrightarrow$$

$$\boxed{|1 - 2m| = \sqrt{m^2 + 1}}$$

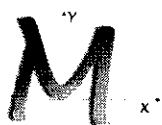
Como aparece el valor absoluto tendremos 2 ecuaciones:

caso $\oplus$

$$\sqrt{m^2 + 1} = +(1 - 2m) .$$

$$(*) \text{ Recuerda } \text{dis}(P, r) = \frac{|Ax_0 + By_0 + G|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

$$\text{siendo } r: Ax + By + G = 0 \quad \text{y } P = (x_0, y_0)$$



$$\left(\sqrt{m^2+1}\right)^2 = (1-2m)^2 \Leftrightarrow m^2+1 = 1-4m+4m^2 \Leftrightarrow$$

$$\boxed{3m^2-4m=0} \Rightarrow m=0 \text{ y } m'=\frac{4}{3}.$$

$$m(3m-4)=0$$

signo $\ominus$ $\sqrt{m^2+1} = -(1-2m)$

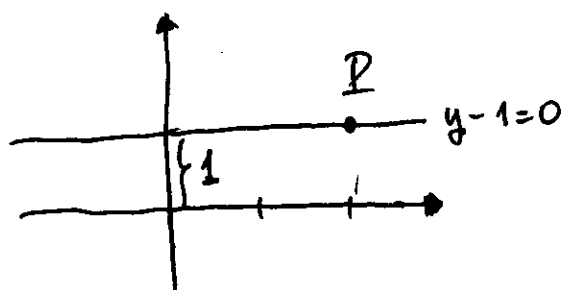
Al elevar al cuadrado se obtiene la misma ecuación que la correspondiente al signo $\oplus$.

SOLUCIÓN:

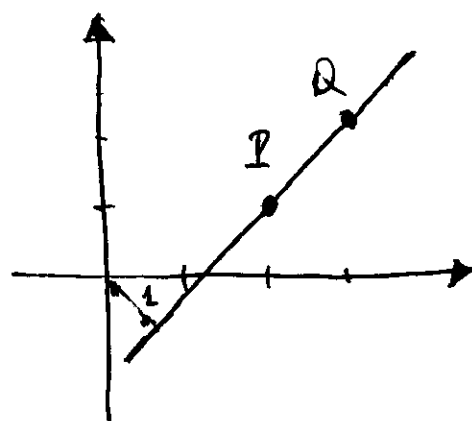
$$m=0 \rightarrow \boxed{y-1=0}$$

$$m=\frac{4}{3} \rightarrow \boxed{y-1=\frac{4}{3}(x-2)}$$

Un dibujo.



$$m=0: y-1=0$$



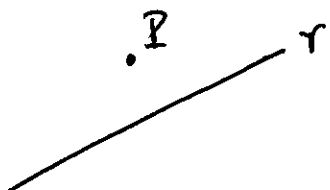
$$m=\frac{4}{3}: y-1=\frac{4}{3}(x-2)$$

$$\text{si } x=3 \rightarrow y=\frac{7}{3} \quad Q=(3, \frac{7}{3})$$

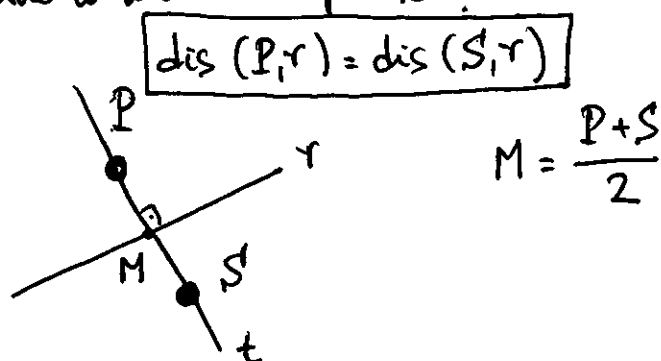


(12°)

Punto simétrico respecto de una recta.
Sea P el punto y r la recta



El punto simétrico de P respecto de r o el simétrico de P es S
¿Qué condición cumple S ?



Argumento

- M es el punto medio del segmento de extremos P y S .
- si se averigua $M \Rightarrow$ se conoce S .
- ¿cómo se obtiene M ?

M es un punto de la recta r . y es un punto de t

$\Rightarrow M = r \cap t$.

- ¿cómo se obtiene t ?

la recta t es

perpendicular a $r \Rightarrow \vec{v}_t = \vec{n}_r$
para por el punto P .

Paso 1: ¿ t ? Paso 2: ¿ M ? Paso 3: ¿ S ?



Paso 1:

$$t: \begin{cases} P = (-2, 4) \\ \vec{v}_t = \vec{n}_r \end{cases}$$

$$r: 2x + 3y = 0 \rightarrow \vec{n}_r = (2, 3)$$

$$\Rightarrow t: \begin{cases} P = (-2, 4) \\ \vec{v}_t = (2, 3) \end{cases}$$

En forma continua:

$$t: \frac{x+2}{2} = \frac{y-4}{3}$$

la expresamos en forma general

$$3 \cdot (x+2) = 2 \cdot (y-4) \Leftrightarrow 3x + 6 = 2y - 8 \Leftrightarrow 3x - 2y + 14 = 0$$

Paso 2

$$M = r \cap t.$$

M es la solución del sistema:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 0 & (+3) \\ 3x - 2y + 14 = 0 & (-2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{array}{r} 6x + 9y = 0 \\ -6x + 4y - 28 = 0 \\ \hline 13y - 28 = 0 \end{array} \Rightarrow y = \frac{28}{13}$$

$$2x + 3 \cdot \frac{28}{13} = 0 \rightarrow x = -\frac{42}{13} \Rightarrow M = \left(-\frac{42}{13}, \frac{28}{13} \right)$$

Paso 3:

$$M = \frac{P+S}{2} \Leftrightarrow 2M = P+S \Rightarrow S = 2M - P.$$

$$S = 2 \cdot \left(-\frac{42}{13}, \frac{28}{13} \right) - (-2, 4) \Rightarrow S = \left(-\frac{56}{13}, \frac{4}{13} \right)$$