

ECUACIONES TRIGONOMÉTRICAS

Son aquellas en las que la incógnita, x , aparece en el argumento de una razón trigonométrica:

Deberemos transformar la ecuación problema en una ecuación equivalente que tenga la forma:

$$\operatorname{sen} x = a, \cos x = b, \operatorname{tg} x = c$$

Observaciones:

Las soluciones de todas las ecuaciones trigonométricas son infinitas

- $\operatorname{sen} x = a, \quad x = \operatorname{arcsen} a + 360n, n \in \mathbb{Z}$
- La calculadora sólo da una solución, por lo que deberemos tener en cuenta que
$$\operatorname{sen} x = \operatorname{sen}(180^\circ - x)$$
$$\cos x = \cos(360^\circ - x)$$
$$\operatorname{tg} x = \operatorname{tg}(180^\circ + x)$$
- Se puede trabajar en grados sexagesimales (mode DEG en la calculadora) o en radianes (mode RAD). Recuerda que $360^\circ = 2\pi \text{ rad}$

CASO I.

$$1^\circ \quad 2\operatorname{sen} x = 1 \Leftrightarrow \operatorname{sen} x = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 30^\circ + 360^\circ \cdot n \\ x_2 = 180^\circ - 30^\circ + 360^\circ \cdot n, n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$2^\circ \quad 3\cos x = -2 \Leftrightarrow \cos x = \frac{-2}{3} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 131,81^\circ + 360^\circ \cdot n, n \in \mathbb{Z} \\ x_2 = 360^\circ - 131,81^\circ + 360^\circ \cdot n, n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$3^\circ \quad -4\operatorname{tg} x = 7 \Leftrightarrow \operatorname{tg} x = \frac{-7}{4} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -60,26^\circ + 360^\circ \cdot n, n \in \mathbb{Z} \\ x_2 = 180^\circ + (-60,26^\circ) + 360^\circ \cdot n, n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

La calculadora nos da como solución $-60,26^\circ$ que es igual a $360^\circ + (-60,26^\circ) = 299,74^\circ$.

CASO II.

En el argumento de la razón trigonométrica aparece una expresión del tipo $(ax+b)$, siendo a y b números reales.

4°

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(x + 135^\circ) = -0,65 &\Rightarrow \begin{cases} x_1 + 135^\circ = -40,54^\circ + 360^\circ \cdot n, n \in \mathbb{Z} \\ x_2 + 135^\circ = 180^\circ - (-40,54^\circ) + 360^\circ \cdot n, n \in \mathbb{Z} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -175,54^\circ + 360^\circ \cdot n, n \in \mathbb{Z} \\ x_2 = 355,54^\circ + 360^\circ \cdot n, n \in \mathbb{Z} \end{cases} \end{aligned}$$

5°

$$\begin{aligned} \cos(3x - 35^\circ) = 0,34 &\Leftrightarrow \begin{cases} 3x_1 - 35^\circ = 70,12^\circ + 360^\circ \cdot n, n \in \mathbb{Z} \\ 3x_2 - 35^\circ = 360^\circ - 70,12^\circ + 360^\circ \cdot n, n \in \mathbb{Z} \end{cases} \\ &\begin{cases} x_1 = \frac{35^\circ + 70,12^\circ + 360^\circ \cdot n}{3}, n \in \mathbb{Z} \\ x_2 = \frac{35^\circ + 360^\circ - 70,12^\circ + 360^\circ \cdot n}{3}, n \in \mathbb{Z} \end{cases} \\ &\begin{cases} x_1 = 35,04^\circ + 120^\circ \cdot m, m \in \mathbb{Z} \\ x_2 = 108,29^\circ + 120^\circ \cdot m, m \in \mathbb{Z} \end{cases} \end{aligned}$$

6°

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}(60^\circ - 2x) = -5 &\Rightarrow \begin{cases} 60^\circ - 2x_1 = -78,69^\circ + 360^\circ \cdot n, n \in \mathbb{Z} \\ 60^\circ - 2x_2 = 180^\circ + (-78,69^\circ) + 360^\circ \cdot n, n \in \mathbb{Z} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} -2x_1 = -138,69^\circ + 360^\circ \cdot n, n \in \mathbb{Z} \\ -2x_2 = 41,31^\circ + 360^\circ \cdot n, n \in \mathbb{Z} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 69,35^\circ + 180^\circ \cdot m, m \in \mathbb{Z} \\ x_2 = -20,67^\circ + 180^\circ \cdot m, m \in \mathbb{Z} \end{cases} \end{aligned}$$

Observa que $\frac{360n}{-2} = 180m$, $n, m \in \mathbb{Z}$, pues al recorrer n los enteros los dos conjuntos recorren los mismos valores

Observación. Las soluciones en el intervalo $[0^\circ, 360^\circ]$ de cada una de las ecuaciones serían:

- 1° 30° y 150°
- 2° $131,81^\circ$ y $228,19^\circ$
- 3° $229,74^\circ$ y $119,74^\circ$
- 4° $184,46^\circ$ y $355,54^\circ$
- 5° $35,04^\circ$, $35,04^\circ + 120^\circ$, $35,04^\circ + 240^\circ$, $108,29^\circ$, $108,29^\circ + 120^\circ$ y $108,29^\circ + 240^\circ$.
- 6° $69,35^\circ$, $69,35^\circ + 180^\circ$, $339,33^\circ$ y $339,33^\circ + 180^\circ$.

Otro tipo de ecuaciones trigonométricas es aquel en el que aparecen 2 ó más razones trigonométricas distintas, entonces deberemos transformar la ecuación problema en otra

equivalente que tenga sólo un tipo de razón trigonométrica y para ello disponemos de dos identidades:

$$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \text{ y } \operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$$

$$7^\circ \operatorname{sen} x + \cos^2 x = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \operatorname{sen} x + [1 - \operatorname{sen}^2 x] = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen} x - \frac{2}{3} = 0$$

Y esta última es una ecuación de 2º grado de incógnita $\operatorname{sen} x$.

$$\operatorname{sen} x = \frac{1 \pm \sqrt{1 + \frac{8}{3}}}{2} = \begin{cases} \operatorname{sen} x_1 \approx 1,46 \\ \operatorname{sen} x_2 \approx -0,46 \end{cases}$$

La 1ª solución no tiene sentido pues $\operatorname{sen} x > 1$ y la 2ª se reduce al caso I.