

1. Contesta a los siguientes apartados utilizando la teoría del Binomio de Newton:

a) Desarrollar la potencia $\left(x - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^4$ y simplificar en lo posible el resultado. **(1 punto)**

b) Escribe, simplificado, el término de grado 4 en el desarrollo de $\left(2x + \frac{1}{x}\right)^6$. **(0,5 puntos)**

2. Contesta a las siguientes cuestiones relacionadas con los radicales:

a) Simplifica la siguiente expresión: $\frac{\sqrt{8} - \sqrt{32} - 3\sqrt{72}}{\sqrt{2}}$ **(0,6 puntos)**

b) Simplifica reduciendo a común índice y extrayendo factores: $\frac{\sqrt[6]{ab}\sqrt[3]{a^2b^4}\sqrt{b^5}}{\sqrt[4]{a^2b^3}}$ **(0,6 puntos)**

c) Racionaliza y simplifica el resultado: $\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2} + 3}$ **(0,8 puntos)**

3. Disponer la siguiente operación en notación científica y, posteriormente, dar el resultado en notación científica con tres cifras significativas (utilícese la calculadora): $\frac{0,00016(25 \cdot 10^3 + 2000)}{0,0025}$ **(0,8 puntos)**
Determinar una cota del error absoluto. **(0,2 puntos)**

4. Hallar, en forma de intervalo, los números reales que verifican la siguiente desigualdad: $|x - 4| > 3$. **(0,5 puntos)**

5. Factorizar el siguiente polinomio: $x^5 - 5x^4 - x^3 + 19x^2 - 14x$. **(0,6 puntos)**
Escribir todas sus raíces. **(0,4 puntos)**

6. Realiza la siguiente operación con fracciones algebraicas y simplifica el resultado: **(1 punto)**

$$\frac{x^2 + 1}{x} - \frac{x^2 - 2x + 1}{(x - 1)^2}$$

7. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $(x - 2)x - \frac{x + 2}{3} - \frac{x^2 - 4}{2} = (x - 2)^2 - 4$ **(1 punto)**

b) $\sqrt{2x - 1} + \sqrt{x + 4} = 6$ **(1 punto)**

c) $\frac{x - 1}{x + 1} - \frac{3 + x}{x - 1} = 2$ **(1 punto)**

Soluciones

$$\begin{aligned}
 1. \quad a) \quad \left(x - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^4 &= x^4 - 4x^3 \frac{1}{\sqrt{x}} + 6x^2 \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 - 4x \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^3 + \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^4 = \\
 &= x^4 - 4x^3 \frac{\sqrt{x}}{x} + 6x^2 \frac{1}{x} - 4x \frac{1}{x\sqrt{x}} + \frac{1}{x^2} = x^4 - 4x^2\sqrt{x} + 6x - \frac{4\sqrt{x}}{x} + \frac{1}{x^2} \\
 b) \quad \left(2x + \frac{1}{x}\right)^6 &= (2x)^6 + 6(2x)^5 \frac{1}{x} + 15(2x)^4 \left(\frac{1}{x}\right)^2 + 20(2x)^3 \left(\frac{1}{x}\right)^3 + 15(2x)^2 \left(\frac{1}{x}\right)^4 + 6(2x) \left(\frac{1}{x}\right)^5 + \\
 &\quad \left(\frac{1}{x}\right)^6 = 64x^6 + 192x^4 + 240x^2 + 160 + \frac{60}{x^2} + \frac{12}{x^4} + \frac{1}{x^6}
 \end{aligned}$$

Por tanto el término de grado cuatro es $192x^4$.

$$\begin{aligned}
 2. \quad a) \quad \frac{\sqrt{8} - \sqrt{32} - 3\sqrt{72}}{\sqrt{2}} &= \frac{2\sqrt{2} - 4\sqrt{2} - 3 \cdot 6\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{(2 - 4 - 18)\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = -20 \\
 b) \quad \frac{\sqrt[6]{ab} \sqrt[3]{a^2b^4} \sqrt{b^5}}{\sqrt[4]{a^2b^3}} &= \frac{\sqrt[12]{a^2b^2} \sqrt[12]{a^8b^{16}} \sqrt[12]{b^{30}}}{\sqrt[12]{a^6b^9}} = \frac{\sqrt[12]{a^{10}b^{48}}}{\sqrt[12]{a^6b^9}} = \sqrt[12]{\frac{a^{10}b^{48}}{a^6b^9}} = \sqrt[12]{a^4b^{39}} = b^3 \sqrt[12]{a^4b^3} \\
 c) \quad \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2} + 3} &= \frac{\sqrt{2}(2\sqrt{2} - 3)}{(2\sqrt{2} + 3)(2\sqrt{2} - 3)} = \frac{4 - 3\sqrt{2}}{(2\sqrt{2})^2 - 3^2} = \frac{4 - 3\sqrt{2}}{8 - 9} = \frac{4 - 3\sqrt{2}}{-1} = 3\sqrt{2} - 4
 \end{aligned}$$

$$3. \quad \frac{0,00016(25 \cdot 10^3 + 2000)}{0,0025} = \frac{1,6 \cdot 10^{-4}(2,5 \cdot 10^4 + 2 \cdot 10^3)}{2,50 \cdot 10^{-3}} = 1,73 \cdot 10^3$$

Con tres cifras significativas, la cota del error absoluto es $0,005 \cdot 10^3 = 5$. El resultado exacto es $1728 = 1,728 \cdot 10^3$ que, si se redondea a dos cifras significativas es $1,73 \cdot 10^3 = 1730$. Obsérvese como no se comete un error mayor que 5 al tomar 1730 como aproximación de 1728.

4. Resolvamos la desigualdad contraria: $|x - 4| \leq 3 \Leftrightarrow -3 \leq x - 4 \leq 3 \Leftrightarrow 1 \leq x \leq 7 \Leftrightarrow x \in [1, 7]$. Por tanto el intervalo de números que verifican la desigualdad $|x - 4| > 3$ es $(-\infty, 1) \cup (7, +\infty)$.

5. Extraemos x factor común: $x^5 - 5x^4 - x^3 + 19x^2 - 14x = x(x^4 - 5x^3 - x^2 + 19x - 14)$. Aplicando la regla de Ruffini se obtienen dos raíces de $x^4 - 5x^3 - x^2 + 19x - 14$: 1 y -2, con lo que $x^5 - 5x^4 - x^3 + 19x^2 - 14x = x(x - 1)(x + 2)(x^2 - 6x + 7)$.

Finalmente, para obtener las raíces de $x^2 - 6x + 7$ resolvemos la ecuación $x^2 - 6x + 7 = 0$:

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 28}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{8}}{2} = \frac{6 \pm 2\sqrt{2}}{2} = 3 \pm \sqrt{2}$$

De este modo la factorización queda:

$$\begin{aligned}
 x^5 - 5x^4 - x^3 + 19x^2 - 14x &= x(x - 1)(x + 2) \left(x - (3 + \sqrt{2})\right) \left(x - (3 - \sqrt{2})\right) = \\
 &= x(x - 1)(x + 2) (x - 3 - \sqrt{2})(x - 3 + \sqrt{2})
 \end{aligned}$$

Las raíces son: 0, 1, -2, $3 + \sqrt{2}$ y $3 - \sqrt{2}$.

$$6. \frac{x^2+1}{x} - \frac{x^2-2x+1}{(x-1)^2} = \frac{(x-1)^2(x^2+1)}{x(x-1)^2} - \frac{x(x^2-2x+1)}{x(x-1)^2} = \frac{(x^2-2x+1)(x^2+1)}{x(x-1)^2} - \frac{x^3-2x^2+x}{x(x-1)^2} =$$

$$\frac{(x^4-2x^3+2x^2-2x+1)-(x^3-2x^2+x)}{x(x-1)^2} = \frac{x^4-3x^3+4x^2-3x+1}{x(x-1)^2} = \frac{(x-1)^2(x^2-x+1)}{x(x-1)^2} =$$

$$\frac{x^2-x+1}{x}$$

Hay una forma más sencilla de hacerlo si tenemos en cuenta que $x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2$. Entonces:

$$\frac{x^2+1}{x} - \frac{x^2-2x+1}{(x-1)^2} = \frac{x^2+1}{x} - \frac{(x-1)^2}{(x-1)^2} = \frac{x^2+1}{x} - 1 = \frac{x^2+1}{x} - \frac{x}{x} = \frac{x^2-x+1}{x}$$

$$7. \quad a) \quad (x-2)x - \frac{x+2}{3} - \frac{x^2-4}{2} = (x-2)^2 - 4 \Leftrightarrow 6x(x-2) - 2(x+2) - 3(x^2-4) = 6(x^2-4x+4) - 24 \Leftrightarrow$$

$$6x^2 - 12x - 2x - 4 - 3x^2 + 12 = 6x^2 - 24x + 24 - 24 \Leftrightarrow 3x^2 - 14x + 8 = 6x^2 - 24x \Leftrightarrow$$

$$3x^2 - 10x - 8 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{10 \pm \sqrt{100+96}}{6} = \frac{10 \pm 14}{6} = \begin{cases} x_1 = \frac{24}{6} = 4 \\ x_2 = -\frac{4}{6} = -\frac{2}{3} \end{cases}$$

$$b) \quad \sqrt{2x-1} + \sqrt{x+4} = 6 \Leftrightarrow \sqrt{2x-1} = 6 - \sqrt{x+4} = 6 \Leftrightarrow 2x-1 = 36 - 12\sqrt{x+4} + x + 4 \Leftrightarrow$$

$$12\sqrt{x+4} = 41 - x \Leftrightarrow 144(x+4) = 1681 - 82x + x^2 \Leftrightarrow x^2 - 226x + 1105 = 0$$

El discriminante es $\Delta = (-226)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1105 = 51076 - 4420 = 46656$.

$$\text{Entonces: } x = \frac{226 \pm 216}{2} = \begin{cases} x_1 = 221 \\ x_2 = 5 \end{cases}$$

La solución $x_1 = 221$ no es válida pues $\sqrt{2 \cdot 221 - 1} + \sqrt{221 + 4} = \sqrt{441} + \sqrt{225} = 21 + 15 = 36 \neq 6$.

$$c) \quad \frac{x-1}{x+1} - \frac{3+x}{x-1} = 2 \Leftrightarrow (x-1)^2 - (3+x)(x+1) = 2(x+1)(x-1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 - (3x + 3 + x^2 + x) = 2x^2 - 2 \Leftrightarrow -6x - 2 = 2x^2 - 2 \Leftrightarrow 2x^2 + 6x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x(x+3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = -3 \end{cases}$$