Como sabemos, $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

Operando se pueden obtener las sucesivas potencias de $a + b$.

$$(a+b)^3 = (a+b)^2 \cdot (a+b) = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a+b)^4 = (a+b)^3 \cdot (a+b) = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

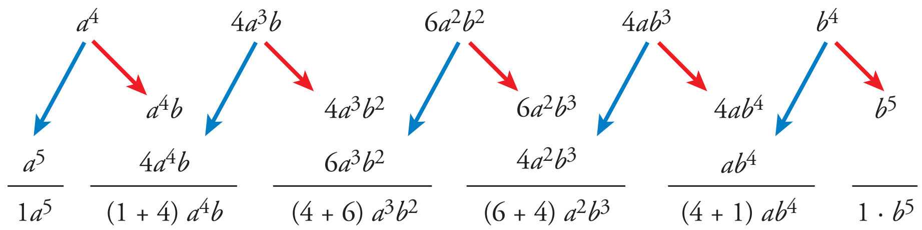
Para observar las regularidades que se producen, ordenamos los resultados:

$(a+b)^1$	$a + b$	1 1
$(a+b)^2$	$a^2 + 2ab + b^2$	1 2 1
$(a+b)^3$	$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$	1 3 3 1
$(a+b)^4$	$a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$	1 4 6 4 1

Para que se aprecie mejor el resultado, hemos aislado a la derecha los coeficientes.

Los coeficientes son las sucesivas filas del triángulo de Tartaglia.

Obtengamos razonadamente la siguiente potencia: $(a+b)^5$. Para ello, multiplicamos $(a+b)^4 \cdot (a+b)$. Lo hacemos multiplicando primero por a (flecha azul), después por b (flecha roja) y sumando los resultados.



Observamos que:

- Aparecen todos los posibles términos de 5.º grado: a^5, a^4b, a^3b^2, a^2b^3, ab^4 y b^5.
- Sus coeficientes son la suma de coeficientes de los términos que tienen encima, es decir, constituyen la fila 5 del triángulo de Tartaglia (puesto que los que tienen encima son la fila 4).

En general, se obtiene la llamada **fórmula del binomio de Newton:**

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \dots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n$$

No olvides que en la fórmula del binomio de Newton, los coeficientes de los sucesivos términos son los números de la fila n-ésima del triángulo de Tartaglia.

ACTIVIDADES

1 Desarrolla:

a) $(x + 3)^5 =$ $\boxed{x^5 + 15x^4 + 90x^3 + 270x^2 + 405x + 243}$

b) $(2x - x^2)^4 =$ $\boxed{16x^4 - 32x^5 + 24x^6 - 8x^7 + x^8}$

c) $\left(\frac{x}{2} + \frac{1}{x}\right)^6 =$ $\boxed{\frac{x^6}{64} + \frac{3x^4}{16} + \frac{15x^2}{16} + \frac{5}{2} + \frac{15}{4x^2} + \frac{3}{x^4} + \frac{1}{x^6}}$

2 Calcula el quinto término de:

a) $\left(\frac{2}{\sqrt{x}} + 1\right)^{10}$ $\boxed{\text{Quinto término} = \frac{13\,440}{x^3}}$

b) $\left(\frac{x^2}{2} - \frac{3}{x}\right)^6$ $\boxed{\text{Quinto término} = -\frac{1\,215}{4x^2}}$

3 Calcula el coeficiente de x^5 en el desarrollo del binomio $\left(\frac{x^2}{2} - \frac{3}{x}\right)^8$

Su coeficiente es cero.

4 ¿Qué signo tendrá el séptimo término del binomio del ejercicio anterior? ¿Cuál será el término de mayor grado?

El signo del término séptimo es negativo.

El término de mayor grado es el primero: $\frac{x^{16}}{256}$

5 Desarrolla:

a) $(x - 3)^5 =$ $\boxed{x^5 - 15x^4 + 90x^3 - 270x^2 + 405x - 243}$

b) $(2x - 1)^4 =$ $\boxed{16x^4 - 32x^3 + 24x^2 - 8x + 1}$

c) $(2x + 3)^3 =$ $\boxed{8x^3 + 36x^2 + 54x + 27}$

6 Calcula el cuarto término en cada caso:

a) $(2x - 5)^5$ $\boxed{\text{Cuarto término} = -5\,000x^2}$

b) $\left(\dfrac{x}{2} + 3\right)^6$ $\boxed{\text{Cuarto término} = \dfrac{135}{2}x^3}$

c) $(x^2 - 2x)^3$ $\boxed{\text{Cuarto término} = -8x^3}$

7 En el desarrollo del binomio $(x^2 - 3x)^6$ escribe el tercero y el quinto términos.

$\boxed{\text{Tercer término} = 135x^{10};\ \text{quinto término} = 1\,215x^8}$