9 LUGARES GEOMÉTRICOS. CÓNICAS

Página 213

PARA EMPEZAR, REFLEXIONA Y RESUELVE

Cónicas abiertas: parábolas e hipérbolas

■ **Completa la siguiente tabla, en la que α es el ángulo que forman las generatrices con el eje, *e*, de la cónica y β es el ángulo del plano π con *e*.**

	$\beta = 90°$	$\beta > \alpha$	$\beta = \alpha$	$\beta < \alpha$
π PASA POR EL VÉRTICE	punto	punto	recta	dos rectas que se cortan en V
π NO PASA POR EL VÉRTICE	circunferencia	elipse	parábola	hipérbola

Página 215

1. **Halla las ecuaciones de los siguientes lugares geométricos:**

a) Mediatriz del segmento de extremos $A(-5, -3)$, $B(7, 1)$. Comprueba que es una recta perpendicular al segmento en su punto medio.

b) Circunferencia de centro $C(-3, 4)$ y radio 5. Comprueba que pasa por el origen de coordenadas.

c) Bisectrices de los ángulos formados por las rectas:

$$r_1: 5x + y + 3 = 0$$

$$r_2: x - 2y + 16 = 0$$

Comprueba que las bisectrices son dos rectas perpendiculares que se cortan en el mismo punto que r_1 y r_2.

a) Los puntos $X(x, y)$ deben cumplir $dist(X, A) = dist(X, B)$:

$$\sqrt{(x+5)^2 + (y+3)^2} = \sqrt{(x-7)^2 + (y-1)^2}$$

Elevamos al cuadrado y desarrollamos:

$$x^2 + 10x + 25 + y^2 + 6y + 9 = x^2 - 14x + 49 + y^2 - 2y + 1$$

$$10x + 14x + 6y + 2y + 34 - 50 = 0 \rightarrow 24x + 8y - 16 = 0$$

$$3x + y - 2 = 0 \rightarrow y = -3x + 2$$

- El punto medio de AB es $M(1, -1)$ que, efectivamente, está en la recta (pues verifica la ecuación).

- La pendiente de la recta es $m_r = -3$, y la del segmento es:

$$m_{AB} = \frac{1-(-3)}{7-(-5)} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

Cumplen que $m_r \cdot m_{AB} = (-3)\left(\frac{1}{3}\right) = -1 \;\rightarrow\; AB \perp r$

b) Los puntos $X(x, y)$ son tales que:

$$dist\,(X, C) = 5 \rightarrow \sqrt{(x+3)^2 + (y-4)^2} = 5 \rightarrow x^2 + 6x + 9 + y^2 - 8y + 16 = 25 \rightarrow$$
$$\rightarrow x^2 + y^2 + 3x - 8y + 25 = 25 \rightarrow x^2 + y^2 + 3x - 8y = 0$$

c) Son los puntos $X(x, y)$:

$$dist\,(X, r_1) = dist\,(X, r_2) \;\rightarrow\; \frac{|5x + y + 3|}{\sqrt{26}} = \frac{|x - 2y + 16|}{\sqrt{5}}$$

Se dan dos casos: $\sqrt{5}\,(5x + y + 3) = \sqrt{26}\,(x - 2y + 16)$

$\sqrt{5}\,(5x + y + 3) = -\sqrt{26}\,(x - 2y + 16)$

Son dos rectas: $b_1: \left(5\sqrt{5} - \sqrt{26}\right)x + \left(\sqrt{5} + 2\sqrt{26}\right)y + 3\sqrt{5} - 16\sqrt{26} = 0$

$b_2: \left(5\sqrt{5} + \sqrt{26}\right)x + \left(\sqrt{5} - 2\sqrt{26}\right)y + 3\sqrt{5} + 16\sqrt{26} = 0$

- Sus pendientes son:

$$\left.\begin{aligned} m_1 &= \frac{-\left(5\sqrt{5} - \sqrt{26}\right)}{\sqrt{5} + 2\sqrt{26}} \\ m_2 &= \frac{-\left(5\sqrt{5} + \sqrt{26}\right)}{\sqrt{5} - 2\sqrt{26}} \end{aligned}\right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow m_1 \cdot m_2 = \frac{25 \cdot 5 - 26}{5 - 4 \cdot 26} = \frac{99}{-99} = -1 \;\rightarrow\; b_1 \perp b_2$$

- Calculamos el punto de corte de las rectas iniciales y comprobamos que está también en ambas bisectrices:

$$\left.\begin{aligned} &r_1: 5x + y + 3 = 0 \;\rightarrow\; y = -5x - 3 \\ &r_2: x - 2y + 16 = 0 \end{aligned}\right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow x - 2(-5x - 3) + 16 = 0 \;\rightarrow\; x + 10x + 6 + 16 = 0 \;\rightarrow$$

$$\rightarrow 11x = -22 \;\rightarrow\; x = -2$$

Luego: $y = -5(-2) - 3 = 7$

El punto de corte es $(-2, 7)$, que se puede comprobar fácilmente que está en b_1 y b_2 sustituyendo en sus ecuaciones respectivas:

$$b_1: \left(5\sqrt{5} - \sqrt{26}\right) \cdot (-2) + \left(\sqrt{5} + 2\sqrt{26}\right) \cdot 7 + 3\sqrt{5} - 16\sqrt{26} =$$
$$= -10\sqrt{5} + 2\sqrt{26} + 7\sqrt{5} + 14\sqrt{26} + 3\sqrt{5} - 16\sqrt{26} = 0$$

b_2: $\left(5\sqrt{5} + \sqrt{26}\right) \cdot (-2) + \left(\sqrt{5} - 2\sqrt{26}\right) \cdot 7 + 3\sqrt{5} + 16\sqrt{26} =$

$= -10\sqrt{5} - 2\sqrt{26} + 7\sqrt{5} - 14\sqrt{26} + 3\sqrt{5} + 16\sqrt{26} = 0$

- Por tanto, b_1 y b_2 son dos rectas perpendiculares que se cortan en el mismo punto que r_1 y r_2.

Página 217

1. Halla la ecuación de la circunferencia de centro (–5, 12) y radio 13. Comprueba que pasa por el punto (0, 0).

$$(x + 5)^2 + (y - 12)^2 = 169 \quad \to \quad x^2 + y^2 + 10x - 24y = 0$$

Si sustituimos $x = 0$, $y = 0$ en la ecuación, esta se verifica. Por tanto, la circunferencia pasa por (0, 0).

2. ¿Cuál es el lugar geométrico de los puntos del plano cuyo cociente de distancias a los puntos $M(6, 0)$ y $N(-2, 0)$ es 3 (es decir, $\overline{PM}/\overline{PN} = 3$)?

Si $P(x, y)$ es un punto del lugar geométrico, entonces:

$$\frac{\overline{PM}}{\overline{PN}} = 3 \quad \to \quad \frac{\sqrt{(x-6)^2 + y^2}}{\sqrt{(x+2)^2 + y^2}} = 3$$

$$(x - 6)^2 + y^2 = 9\,[(x + 2)^2 + y^2]$$

$$x^2 - 12x + 36 + y^2 = 9\,[x^2 + 4x + 4 + y^2]$$

$$x^2 - 12x + 36 + y^2 = 9x^2 + 36x + 36 + 9y^2$$

$$8x^2 + 8y^2 + 48x = 0$$

$$x^2 + y^2 + 6x = 0$$

Es una circunferencia de centro (–3, 0) y radio 3.

Página 219

3. En el ejercicio resuelto anterior, resuelve el sistema de ecuaciones para hallar el punto de tangencia de la recta s_1 y la circunferencia C.

$$\left.\begin{array}{r} x^2 + y^2 - 6x - 4y - 12 = 0 \\ 3x - 4y - 26 = 0 \end{array}\right\} \quad y = \frac{3x - 26}{4}$$

$$x^2 + \left(\frac{3x - 26}{4}\right)^2 - 6x - 4\left(\frac{3x - 26}{4}\right) - 12 = 0$$

$$x^2 + \frac{9x^2 - 156x + 676}{16} - 6x - 3x + 26 - 12 = 0$$

$$16x^2 + 9x^2 - 156x + 676 - 96x - 48x + 416 - 192 = 0$$

$$25x^2 - 300x + 900 = 0 \quad \to \quad x^2 - 12x + 36 = 0$$

$$(x - 6)^2 = 0 \quad \to \quad x = 6 \quad \to \quad y = -2$$

El punto de tangencia es (6, –2).

4. **¿Para qué valor de b la recta $y = x + b$ es tangente a $x^2 + y^2 = 9$?**

El centro de la circunferencia es $C(0, 0)$ y el radio es $r = 3$. La distancia de C a la recta $s: x - y + b = 0$ ha de ser igual al radio:

$$dist\,(C, s) = \frac{|b|}{\sqrt{1+1}} = \frac{|b|}{\sqrt{2}} = 3 \rightarrow |b| = 3\sqrt{2} \begin{cases} b = 3\sqrt{2} \\ b = -3\sqrt{2} \end{cases}$$

Luego las rectas $y = x + 3\sqrt{2}$ e $y = x - 3\sqrt{2}$ son tangentes a la circunferencia dada.

5. **Halla la posición relativa de la circunferencia $C: x^2 + y^2 - 6x + 8y = 0$ respecto a las rectas: $s_1: x + y = 10$, $s_2: 4x + 3y + 20 = 0$ y $s_3: 3x - 4y = 0$.**

El centro de la circunferencia es $O_c(3, -4)$ y su radio es $r = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$.

Hallamos la distancia de O_c a cada una de las rectas:

$$d_1 = dist\,(O_c, s_1) = \frac{|3 - 4 - 10|}{\sqrt{2}} = \frac{11}{\sqrt{2}} \approx 7{,}78$$

$$d_2 = dist\,(O_c, s_2) = \frac{|12 - 12 + 10|}{\sqrt{16+9}} = \frac{10}{5} = 2$$

$$d_3 = dist\,(O_c, s_3) = \frac{|9 + 16|}{\sqrt{9+16}} = \frac{25}{5} = 5$$

$d_1 > r \rightarrow$ La recta s_1 es *exterior* a la circunferencia.

$d_2 < r \rightarrow$ La recta s_2 y la circunferencia son *secantes*.

$d_3 = r \rightarrow$ La recta s_3 es *tangente* a la circunferencia.

Página 221

1. **Halla la ecuación de la elipse de focos $F_1(4, 0)$, $F_2(-4, 0)$ y cuya constante es 10.**

Una vez puesta la ecuación inicial, pasa una raíz al segundo miembro, eleva al cuadrado (¡atención con el doble producto!), simplifica, aísla la raíz, vuelve a elevar al cuadrado y simplifica hasta llegar a la ecuación $9x^2 + 25y^2 = 225$.

Si $P(x, y)$ es un punto de la elipse, entonces:

$dist(P, F_1) + dist(P, F_2) = 10$

$\sqrt{(x-4)^2 + y^2} + \sqrt{(x+4)^2 + y^2} = 10$

$\sqrt{(x-4)^2 + y^2} = 10 - \sqrt{(x+4)^2 + y^2}$

Elevamos al cuadrado: $(x-4)^2 + y^2 = 100 + (x+4)^2 + y^2 - 20\sqrt{(x+4)^2 + y^2}$

Operamos: $x^2 - 8x + 16 + y^2 = 100 + x^2 + 8x + 16 + y^2 - 20\sqrt{(x+4)^2 + y^2}$

$$20\sqrt{(x+4)^2 + y^2} = 16x + 100$$

$$5\sqrt{(x+4)^2 + y^2} = 4x + 25$$

Elevamos al cuadrado: $25(x^2 + 8x + 16 + y^2) = 16x^2 + 200x + 625$

Simplificamos:

$25x^2 + 200x + 400 + 25y^2 = 16x^2 + 200x + 625 \rightarrow 9x^2 + 25y^2 = 225$

2. **Halla la ecuación de la hipérbola de focos $F_1(5, 0)$, $F_2(-5, 0)$ y cuya constante es 6. Simplifica como en el ejercicio anterior hasta llegar a la expresión $16x^2 - 9y^2 = 144$.**

Si $P(x, y)$ es un punto de la hipérbola, entonces:

$|dist(P, F_1) - dist(P, F_2)| = 6$

$dist(P, F_1) - dist(P, F_2) = \pm 6$

$\sqrt{(x-5)^2 + y^2} - \sqrt{(x+5)^2 + y^2} = \pm 6$

$\sqrt{(x-5)^2 + y^2} = \pm 6 + \sqrt{(x+5)^2 + y^2}$

Elevamos al cuadrado:

$x^2 - 10x + 25 + y^2 = 36 + x^2 + 10x + 25 + y^2 \pm 12\sqrt{(x+5)^2 + y^2}$

$\pm 12\sqrt{(x+5)^2 + y^2} = 20x + 36$

$\pm 3\sqrt{(x+5)^2 + y^2} = 5x + 9$

Elevamos al cuadrado: $9(x^2 + 10x + 25 + y^2) = 25x^2 + 90x + 81$

$9x^2 + 90x + 225 + 9y^2 = 25x^2 + 90x + 81$

$16x^2 - 9y^2 = 144$

3. **Halla la ecuación de la parábola de foco $F(-1, 0)$ y directriz $r: x = 1$. Simplifica hasta llegar a la expresión $y^2 = -4x$.**

Si $P(x, y)$ es un punto de la parábola, entonces:

$dist(P, F) = dist(P, r)$

$\sqrt{(x+1)^2 + y^2} = |x - 1|$

Elevamos al cuadrado: $x^2 + 2x + 1 + y^2 = x^2 - 2x + 1$

Simplificamos: $y^2 = -4x$

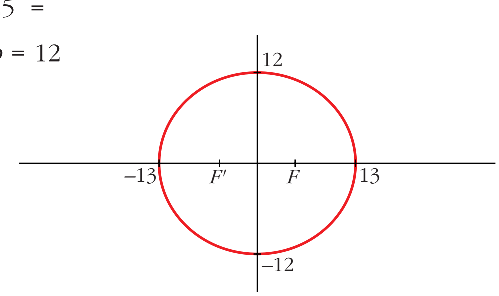
Página 223

1. **Una elipse tiene sus focos en los puntos $F(5, 0)$ y $F'(-5, 0)$ y su constante es $k = 26$. Halla sus elementos característicos y su ecuación reducida. Represéntala.**

- Semieje mayor: $k = 26 \rightarrow 2a = 26 \rightarrow a = 13$
- Semidistancia focal: $\overline{FF'} = 10 \rightarrow 2c = 10 \rightarrow c = 5$
- Semieje menor: $b^2 = a^2 - c^2 = \sqrt{169 - 25} =$

  $= \sqrt{144} = 12 \rightarrow b = 12$
- Excentricidad: $\dfrac{c}{a} = \dfrac{5}{13} \approx 0{,}38 \rightarrow$

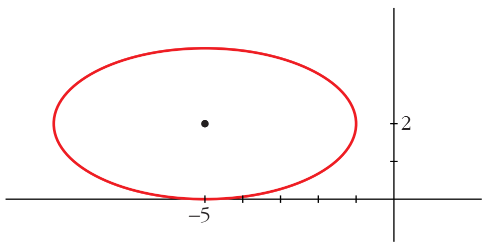
  $\rightarrow exc \approx 0{,}38$
- Ecuación reducida: $\dfrac{x^2}{169} + \dfrac{y^2}{144} = 1$



Página 224

2. **Representa y di su excentricidad:**

$$\frac{(x+5)^2}{16} + \frac{(y-2)^2}{4} = 1$$



$c = \sqrt{16-4} = \sqrt{12}$

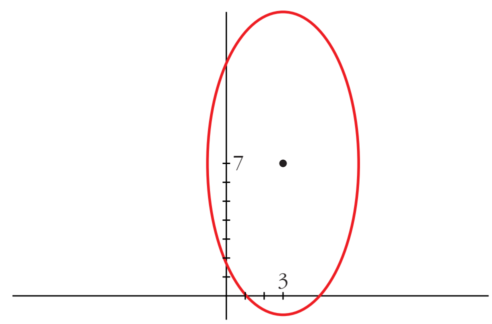
$exc = \dfrac{\sqrt{12}}{4} \approx 0{,}87$

3. **Representa y di su excentricidad:**

$$\frac{(x-3)^2}{16} + \frac{(y-7)^2}{64} = 1$$

$c = \sqrt{64-16} = \sqrt{48}$

$exc = \dfrac{\sqrt{48}}{8} \approx 0{,}87$

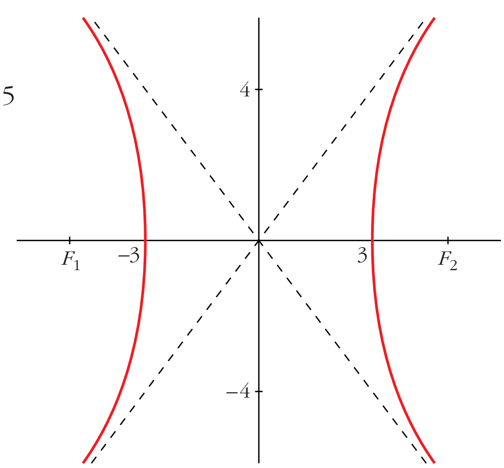


Página 226

1. **Una hipérbola tiene sus focos en los puntos $F_1(5, 0)$ y $F_2(-5, 0)$ y su constante es $k = 6$. Halla sus elementos característicos y su ecuación reducida. Represéntala.**

- Semieje: $k = 2a = 6 \;\to\; a = 3$
- Semidistancia focal: $\overline{F_1F_2} = 10 \;\to\; c = 5$
- Cálculo de b: $b^2 = c^2 - a^2 \;\to$

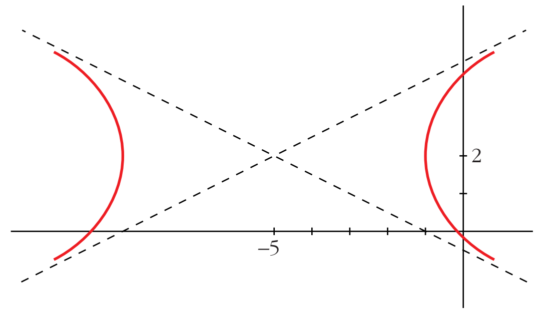
  $\to\; b = \sqrt{25-9} = \sqrt{16} = 4 \;\to\; b = 4$
- Excentricidad: $exc = \dfrac{c}{a} = \dfrac{5}{3} \approx 1{,}67$
- Asíntotas: $y = \dfrac{4}{3}x$; $y = -\dfrac{4}{3}x$
- Ecuación reducida: $\dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{16} = 1$



Página 227

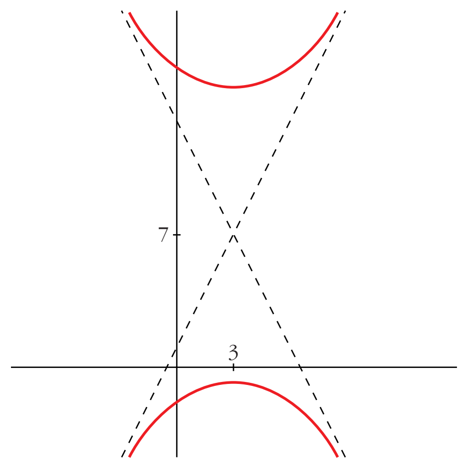
2. **Representa:**

$$\frac{(x+5)^2}{16} - \frac{(y-2)^2}{4} = 1$$



3. **Representa:**

$$\frac{(y-7)^2}{64} - \frac{(x-3)^2}{16} = 1$$



Página 228

1. **Halla la ecuación reducida de la parábola de foco $F(1{,}5;\ 0)$ y directriz $x = -1{,}5$.**

Si $P(x, y)$ es un punto de la parábola: *dist* (P, F) = *dist* (P, d), donde d es la directriz y F el foco.

$$\sqrt{(x-1{,}5)^2 + y^2} = |x + 1{,}5|$$

$$x^2 - 3x + 2{,}25 + y^2 = x^2 + 3x + 2{,}25 \;\rightarrow\; y^2 = 6x$$

- De otra forma:

  Distancia del foco a la directriz: $p = 3$

  Ecuación reducida: $y^2 = 6x$

2. **Halla la ecuación reducida de la parábola de foco $F(0, 2)$ y directriz $y = -2$.**

Si $P(x, y)$ es un punto de la parábola: *dist* (P, F) = *dist* (P, d), donde d es la directriz y F el foco.

$$\sqrt{x^2 + (y-2)^2} = |y + 2|$$

$$x^2 + y^2 - 4y + 4 = y^2 + 4y + 4 \;\rightarrow\; x^2 = 8y$$

- De otra forma:

  Distancia del foco a la directriz: $p = 4$

  Ecuación reducida: $x^2 = 8y$.

Página 233

EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

PARA PRACTICAR

Circunferencia

1 Averigua cuáles de las siguientes expresiones corresponden a circunferencias y, en ellas, halla su centro y su radio:

a) $x^2 + y^2 - 8x + 2y + 10 = 0$

b) $x^2 - y^2 + 2x + 3y - 5 = 0$

c) $x^2 + y^2 + xy - x + 4y - 8 = 0$

d) $2x^2 + 2y^2 - 16x + 24 = 0$

e) $x^2 + y^2 + 6x + 10y = -30$

a) Los coeficientes de x^2 e y^2 son 1. No hay término en xy.

$$\left(\frac{A}{2}\right)^2 + \left(\frac{B}{2}\right)^2 - C = 16 + 1 - 10 = 7 > 0.$$

Es una circunferencia de centro $(4, -1)$ y radio $\sqrt{7}$.

b) Los coeficientes de x^2 e y^2 no son iguales. No es una circunferencia.

c) Hay un término xy. No es una circunferencia.

d) Los coeficientes de x^2 e y^2 son iguales y no tiene término en xy. Dividimos entre 2 la igualdad: $x^2 + y^2 - 8x + 12 = 0$.

$$\left(\frac{A}{2}\right)^2 + \left(\frac{B}{2}\right)^2 - C = 16 + 0 - 12 = 4 > 0.$$

Es una circunferencia de centro $(4, 0)$ y radio $\sqrt{4} = 2$.

e) Los coeficientes de x^2 e y^2 son 1. No hay término en xy.

$$\left(\frac{A}{2}\right)^2 + \left(\frac{B}{2}\right)^2 - C = 9 + 25 - 30 = 4 > 0$$

Es una circunferencia de centro $(-3, -5)$ y radio 2.

2 Los puntos $A(1, 2)$ y $B(3, 6)$ son los extremos de un diámetro de una circunferencia C. Halla su ecuación.

El centro de la circunferencia es el punto medio del segmento AB:

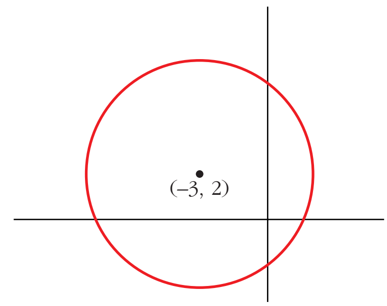
$$P = \text{Centro} = \left(\frac{1+3}{2}, \frac{2+6}{2}\right) = (2, 4)$$

El radio es la distancia del centro a uno de los puntos:

$$r = dist\,(P, A) = |\overrightarrow{PA}| = |(-1, -2)| = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$$

Por tanto, la ecuación es: $(x-2)^2 + (y-4)^2 = 5 \;\rightarrow\; x^2 + y^2 - 4x - 8y + 15 = 0$

3 **¿Cuál es el lugar geométrico de los puntos que distan 5 unidades del punto $P(-3, 2)$? Represéntalo gráficamente y halla su ecuación.**



Es una circunferencia de centro $P(-3, 2)$ y radio 5.

Ecuación: $(x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 25$

$x^2 + y^2 + 6x - 4y - 12 = 0$

4 **Escribe la ecuación de la circunferencia de centro $C(-2, 1)$ y que pasa por $P(0, -4)$.**

El radio de la circunferencia es la distancia de P a C:

$$r = |\overrightarrow{PC}| = |(-2, 5)| = \sqrt{4 + 25} = \sqrt{29}$$

La ecuación es: $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 29$, o bien, $x^2 + y^2 + 4x - 2y - 24 = 0$

5 **Estudia la posición de la recta $x + y = 0$ con relación a la circunferencia: $x^2 + y^2 + 6x + 2y + 6 = 0$.**

El centro de la circunferencia es $C(-3, -1)$ y su radio es $r = \sqrt{9 + 1 - 6} = \sqrt{4} = 2$.

Hallamos la distancia de C a la recta $s: x + y = 0$:

$$d = dist\,(C, s) = \frac{|-3 - 1|}{\sqrt{2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2} \approx 2{,}83 > 2 = r$$

La recta es *exterior* a la circunferencia.

6 **¿Para qué valor de b la recta $y = x + b$ es tangente a la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$?**

El centro de la circunferencia es $C(0, 0)$ y su radio es $r = 1$.

Hallamos la distancia de C a la recta $s: x - y + b = 0$: $d = dist\,(C, s) = \dfrac{|b|}{\sqrt{2}}$

Para que la recta sea tangente a la circunferencia, ha de ser $d = r$, es decir:

$$\frac{|b|}{\sqrt{2}} = 1 \quad \to \quad |b| = \sqrt{2} \begin{cases} b = \sqrt{2} \\ b = -\sqrt{2} \end{cases}$$

7 **Halla los puntos de intersección de cada pareja de circunferencias y di cuál es su posición relativa:**

a) $\begin{cases} x^2 + y^2 - 6x - 16 = 0 \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x^2 + y^2 - 6x - 4y + 9 = 0 \\ x^2 + y^2 - 6x + 2y + 9 = 0 \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{l} x^2 + y^2 - 6x - 16 = 0 \\ x^2 + y^2 \qquad\qquad = 4 \end{array}\right\} \begin{array}{l} 4 - 6x - 16 = 0 \ \to \ -6x = 12 \ \to \ x = -2 \\ 4 + y^2 = 4 \ \to \ y^2 = 0 \ \to \ y = 0 \end{array}$

Las circunferencias se cortan en el punto $(-2, 0)$.

La primera circunferencia tiene centro en (3, 0) y radio 5; la segunda tiene centro en (0, 0) y radio 2. La distancia entre sus centros es $d = 3$. Como la diferencia entre sus radios es $5 - 2 = 3 = d$, las circunferencias son tangentes interiores.

b) $\left.\begin{array}{l} x^2 + y^2 - 6x - 4y + 9 = 0 \\ x^2 + y^2 - 6x + 2y + 9 = 0 \end{array}\right\}$ Restando a la 2ª ecuación la 1ª: $6y = 0 \;\rightarrow\; y = 0$

$$x^2 - 6x + 9 = 0 \;\rightarrow\; (x - 3)^2 = 0 \;\rightarrow\; x = 3$$

Las circunferencias se cortan en el punto (3, 0).

La primera circunferencia tiene su centro en (3, 2) y radio 2; la segunda tiene su centro en (3, –1) y radio 1. La distancia entre sus centros es $d = 3$, igual que la suma de sus radios. Por tanto, las circunferencias son tangentes exteriores.

8 **Halla la longitud de la cuerda común a las circunferencias de ecuaciones: $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 4 = 0$ y $x^2 + y^2 - 4 = 0$.**

Hallamos los puntos de corte:

$$\left.\begin{array}{l} x^2 + y^2 - 4x + 2y - 4 = 0 \\ x^2 + y^2 \qquad\qquad\quad - 4 = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} -4x + 2y = 0 \;\rightarrow\; y = 2x \\ x^2 + 4x^2 - 4 = 0 \;\rightarrow\; 5x^2 = 4 \end{array}$$

$$x^2 = \frac{4}{5} \begin{cases} x_1 = \sqrt{\dfrac{4}{5}} = \dfrac{2}{\sqrt{5}} = \dfrac{2\sqrt{5}}{5} \;\rightarrow\; y_1 = \dfrac{4\sqrt{5}}{5} \\ x_2 = -\sqrt{\dfrac{4}{5}} = \dfrac{-2}{\sqrt{5}} = \dfrac{-2\sqrt{5}}{5} \;\rightarrow\; y_2 = \dfrac{-4\sqrt{5}}{5} \end{cases}$$

Las dos circunferencias se cortan en $P\left(\dfrac{2\sqrt{5}}{5}, \dfrac{4\sqrt{5}}{5}\right)$ y en $Q\left(\dfrac{-2\sqrt{5}}{5}, \dfrac{-4\sqrt{5}}{5}\right)$.

La longitud de la cuerda común es igual a la distancia entre P y Q:

$$dist\,(P, Q) = |\overrightarrow{QP}| = \left(\frac{4\sqrt{5}}{5}\right)^2 + \left(\frac{8\sqrt{5}}{5}\right)^2 = \left(\frac{4}{\sqrt{5}}\right)^2 + \left(\frac{8}{\sqrt{5}}\right)^2 =$$

$$= \frac{16}{5} + \frac{64}{5} = \sqrt{16} = 4$$

9 **Calcula la distancia del centro de la circunferencia $x^2 + y^2 - 2y - 1 = 0$ a la recta r: $2x - y + 3 = 0$. ¿Cuál es la posición de r respecto a la circunferencia?**

El centro de la circunferencia es $C(0, 1)$ y su radio es $R = \sqrt{2}$. La distancia de C a r es:

$$dist\,(C, r) = \frac{|-1 + 3|}{\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}} \approx 0{,}89 < \sqrt{2} \approx 1{,}41$$

Luego la circunferencia y la recta son secantes.

Elipse

10 **Halla los vértices, los focos, los puntos en los ejes, las excentricidades, y representa las elipses dadas por sus ecuaciones:**

a) $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1$i **b)** $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{100} = 1$

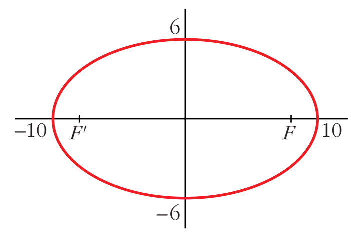
c) $9x^2 + 25y^2 = 25$ **d)** $9x^2 + 4y^2 = 1$

a) **Vértices:** (10, 0); (–10, 0); (0, 6) y (0, –6).

Focos: $c = \sqrt{100 - 36} = 8$

$F(8, 0)$ y $F'(-8, 0)$

Excentricidad: $exc = \frac{8}{10} = 0{,}8$

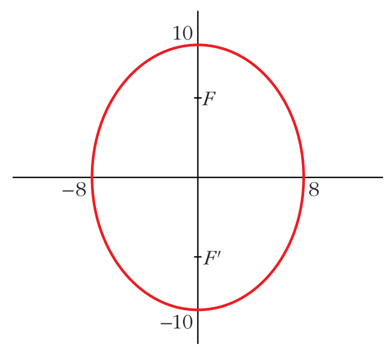


b) **Vértices:** (8, 0); (–8, 0); (0, 10) y (0, –10).

Focos: $c = \sqrt{100 - 64} = \sqrt{36} = 6$

$F(0, 6)$ y $F'(0, -6)$

Excentricidad: $exc = \frac{6}{10} = 0{,}6$



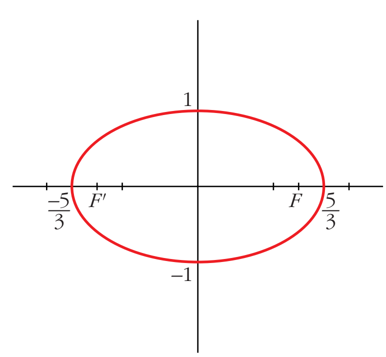
c) $9x^2 + 25y^2 = 25 \;\rightarrow\; \frac{x^2}{25/9} + \frac{y^2}{1} = 1$

Vértices: $\left(\frac{5}{3}, 0\right)$; $\left(-\frac{5}{3}, 0\right)$; (0, 1) y (0, –1).

Focos: $c = \sqrt{\frac{25}{9} - 1} = \sqrt{\frac{16}{9}} = \frac{4}{3}$

$F\left(\frac{4}{3}, 0\right)$ y $F'\left(-\frac{4}{3}, 0\right)$

Excentricidad: $exc = \frac{4/3}{5/3} = \frac{4}{5} = 0{,}8$

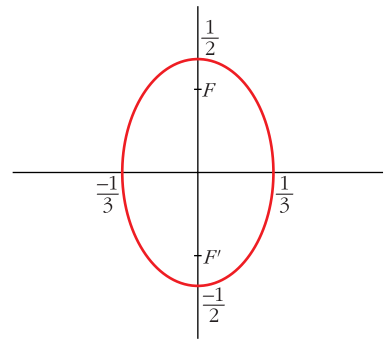


d) $9x^2 + 4y^2 = 1 \quad \rightarrow \quad \dfrac{x^2}{1/9} + \dfrac{y^2}{1/4} = 1$

Vértices: $\left(\dfrac{1}{3}, 0\right); \left(-\dfrac{1}{3}, 0\right); \left(0, \dfrac{1}{2}\right)$ y $\left(0, -\dfrac{1}{2}\right)$.

Focos: $c = \quad \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{9} = \sqrt{\dfrac{5}{36}} = \dfrac{\sqrt{5}}{6}$

$F\left(0, \dfrac{\sqrt{5}}{6}\right)$ y $F'\left(0, -\dfrac{\sqrt{5}}{6}\right)$



11 **Halla las ecuaciones de las elipses determinadas de los modos siguientes:**

a) Focos (–2, 0), (2, 0). Longitud del eje mayor, 10.

b) *F*(–3, 0) y *F'*(3, 0) y cuya excentricidad es igual a 0,5.

c) Eje mayor sobre el eje *X*, 10. Pasa por el punto (3, 3).

d) Eje mayor sobre el eje *Y*, 2. Excentricidad, 1/2.

a) $c = 2; \quad 2a = 10 \quad \rightarrow \quad a = 5; \quad b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{25 - 4} = \sqrt{21}$

Ecuación: $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{21} = 1$

b) $c = 3; \quad exc = \dfrac{c}{a} = 0{,}5 \quad \rightarrow \quad a = \dfrac{c}{0{,}5} = \dfrac{3}{0{,}5} = 6$

$b^2 = a^2 - c^2 = 36 - 9 = 27$

Ecuación: $\dfrac{x^2}{36} + \dfrac{y^2}{27} = 1$

c) $2a = 10 \quad \rightarrow \quad a = 5; \quad \dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

Como pasa por (3, 3) $\quad \rightarrow \quad \dfrac{9}{25} + \dfrac{9}{b^2} = 1 \quad \rightarrow \quad 9b^2 + 225 = 25b^2 \quad \rightarrow$

$\rightarrow \quad 16b^2 = 225 \quad \rightarrow \quad b^2 = \dfrac{225}{16}$

Ecuación: $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{225/16} = 1$, o bien, $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{16y^2}{225} = 1$

d) $exc = \dfrac{c}{1} = \dfrac{1}{2} \quad \rightarrow \quad c = \dfrac{1}{2} \quad (a = 1, \text{ pues } 2a = 2)$

$b^2 = a^2 - c^2 = 1 - \dfrac{1}{4} = \dfrac{3}{4}$

Ecuación: $\dfrac{x^2}{3/4} + \dfrac{y^2}{1} = 1$, o bien, $\dfrac{4x^2}{3} + y^2 = 1$

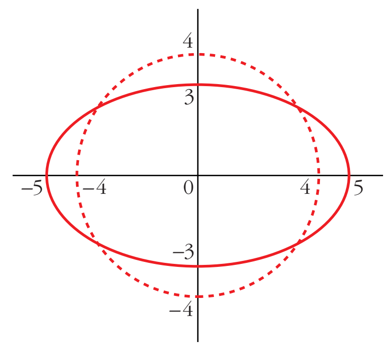
12 **Halla la ecuación del lugar geométrico de los puntos cuya suma de distancias a $P(-4, 0)$ y $Q(4, 0)$ es 10.**

Es una elipse de focos $P(-4, 0)$ y $Q(4, 0)$, y constante $k = 10$, es decir, $2a = 10$ y $c = 4$.

Así: $a = 5$; $b^2 = a^2 - c^2 = 25 - 16 = 9$

La ecuación será: $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{9} = 1$

13 **Halla los puntos de intersección de la elipse $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{9} = 1$ con la circunferencia cuyo centro es el origen y pasa por los focos.**



Los focos de la elipse son:

$c^2 = a^2 - b^2 \;\to\; c^2 = 25 - 9 = 16 \;\to\; c = 4$

$F(4, 0)$ y $F'(-4, 0)$

Luego la circunferencia tiene su centro en $(0, 0)$ y radio 4.

La ecuación de la circunferencia es: $x^2 + y^2 = 16$.

Hallamos los puntos de intersección de la circunferencia con la elipse:

$$\left.\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 16 \\ \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} &= 1 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &y^2 = 16 - x^2 \\ &9x^2 + 25y^2 = 225 \;\to\; 9x^2 + 25(16 - x^2) = 225 \end{aligned}$$

$$9x^2 + 400 - 25x^2 = 225 \;\to\; 175 = 16x^2 \;\to\; x^2 = \frac{175}{16}$$

$$x = \pm\sqrt{\frac{175}{16}} = \frac{\pm 5\sqrt{7}}{4} \begin{cases} x = \dfrac{5\sqrt{7}}{4} \;\to\; y = \pm\dfrac{9}{4} \\ x = \dfrac{-5\sqrt{7}}{4} \;\to\; y = \pm\dfrac{9}{4} \end{cases}$$

Hay cuatro puntos: $\left(\dfrac{5\sqrt{7}}{4}, \dfrac{9}{4}\right)$; $\left(\dfrac{5\sqrt{7}}{4}, -\dfrac{9}{4}\right)$; $\left(\dfrac{-5\sqrt{7}}{4}, \dfrac{9}{4}\right)$ y $\left(\dfrac{-5\sqrt{7}}{4}, -\dfrac{9}{4}\right)$

14 **Calcula la longitud de la cuerda definida por la elipse $x^2 + 3y^2 = 28$ y la recta $5x + 3y = 14$.**

Hallamos los puntos de corte de la recta y la elipse:

$$\left.\begin{aligned} 5x + 3y &= 14 \\ x^2 + 3y^2 &= 28 \end{aligned}\right\} \; x = \frac{14 - 3y}{5}$$

$$\left(\frac{14-3y}{5}\right)^2 + 3y^2 = 28 \;\rightarrow\; \frac{196-84y+9y^2}{25} + 3y^2 = 28$$

$$196 - 84y + 9y^2 + 75y^2 = 700 \;\rightarrow\; 84y^2 - 84y - 504 = 0$$

$$y^2 - y - 6 = 0 \;\rightarrow\; y = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2} \begin{cases} y = 3 & \rightarrow\; x = 1 \\ y = -2 & \rightarrow\; x = 4 \end{cases}$$

Se cortan en los puntos $P(1, 3)$ y $Q(4, -2)$.

La longitud de la cuerda es la distancia entre P y Q:

$$|\overrightarrow{PQ}| = |(3, -5)| = \sqrt{9+25} = \sqrt{34} \approx 5{,}83$$

15 Escribe la ecuación de una elipse con centro en el origen de coordenadas y focos en el eje de abscisas, sabiendo que pasa por el punto $P(8, -3)$ y que su eje mayor es igual al doble del menor.

El eje mayor es igual al doble del menor, es decir: $a = 2b$. Además, pasa por el punto $P(8, -3)$. Luego:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \;\rightarrow\; \frac{64}{4b^2} + \frac{9}{b^2} = 1 \;\rightarrow\; \frac{16}{b^2} + \frac{9}{b^2} = 1 \;\rightarrow\; \frac{25}{b^2} = 1 \;\rightarrow$$

$$\rightarrow\; 25 = b^2;\;\; a^2 = 4b^2 = 100$$

La ecuación es: $\dfrac{x^2}{100} + \dfrac{y^2}{25} = 1$

16 Escribe la ecuación de la elipse de focos $F(1, 1)$ y $F'(1, -1)$ y cuya constante es igual a 4.

Si $P(x, y)$ es un punto de la elipse, entonces:

$$dist\,(P, F) + dist\,(P, F') = 2a, \text{ es decir:}$$

$$\sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2} + \sqrt{(x-1)^2 + (y+1)^2} = 4$$

Operamos para simplificar:

$$\sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2} = 4 - \sqrt{(x-1)^2 + (y+1)^2}$$

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 = 16 + (x-1)^2 + (y+1)^2 - 8\sqrt{(x-1)^2 + (y+1)^2}$$

$$\cancel{x^2} + \cancel{1} - \cancel{2x} + \cancel{y^2} + \cancel{1} - 2y = 16 + \cancel{x^2} + \cancel{1} - \cancel{2x} + \cancel{y^2} + \cancel{1} + 2y - 8\sqrt{(x-1)^2 + (y+1)^2}$$

$$-4y - 16 = -8\sqrt{(x-1)^2 + (y+1)^2}$$

$$(4y + 16)^2 = 64\,[(x-1)^2 + (y+1)^2]$$

$$16y^2 + 256 + 128y = 64\,[x^2 + 1 - 2x + y^2 + 1 + 2y]$$

$$16y^2 + 256 + \cancel{128y} = 64x^2 + 64 - 128x + 64y^2 + 64 + \cancel{128y}$$

$$128 = 64x^2 - 128x + 48y^2$$
$$8 = 4x^2 - 8x + 3y^2$$
$$12 = 4x^2 - 8x + 4 + 3y^2$$
$$12 = (2x - 2)^2 + 3y^2$$
$$12 = 4(x - 1)^2 + 3y^2$$
$$1 = \frac{4(x - 1)^2}{12} + \frac{3y^2}{12}$$
$$\frac{(x - 1)^2}{3} + \frac{y^2}{4} = 1$$

- De otra forma:

  El centro de la elipse es el punto medio del segmento que une F con F', es decir:

  $$\left(\frac{1 + 1}{2}, \frac{1 - 1}{2}\right) = (1, 0)$$

  Por otra parte:

  $$2c = dist\,(F, F') = |\overrightarrow{F'F}| = |(0, 2)| = 2 \;\rightarrow\; c = 1$$
  $$2a = 4 \;\rightarrow\; a = 2 \;\rightarrow\; a^2 = 4$$
  $$b^2 = a^2 - c^2 = 4 - 1 = 3$$

  Por tanto, la ecuación es: $\dfrac{(x - 1)^2}{3} + \dfrac{y^2}{4} = 1$

Página 234

Hipérbola

17 **Halla los vértices, los focos, las excentricidades y las asíntotas, y dibuja las hipérbolas dadas por las ecuaciones:**

a) $\dfrac{x^2}{100} - \dfrac{y^2}{36} = 1$ **b)** $\dfrac{9x^2}{16} - y^2 = 1$

c) $x^2 - 4y^2 = 1$ **d)** $x^2 - 4y^2 = 4$

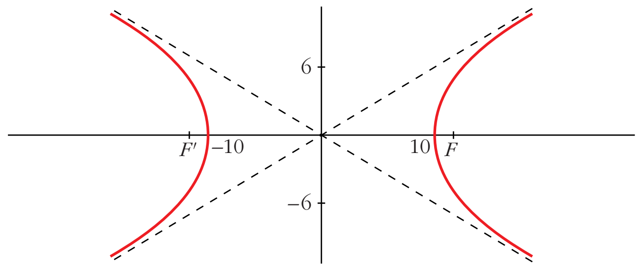
e) $\dfrac{y^2}{4} - \dfrac{x^2}{36} = 1$ **f)** $y^2 - 16x^2 = 16$

g) $9x^2 - 4y^2 = 36$ **h)** $4x^2 - y^2 + 16 = 0$

a) $a = 10$, $b = 6$, $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{136} = 2\sqrt{34}$, $exc = \dfrac{2\sqrt{34}}{10} \approx 1,17$

Vértices: $(10, 0)$ y $(-10, 0)$. **Focos:** $F\left(2\sqrt{34}, 0\right)$ y $F'\left(-2\sqrt{34}, 0\right)$

Asíntotas: $y = \dfrac{3}{5}x$; $y = -\dfrac{3}{5}x$

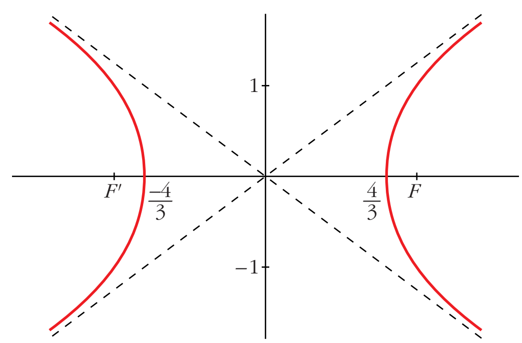


b) $\dfrac{9x^2}{16} - y^2 = 1 \quad \rightarrow \quad \dfrac{x^2}{16/9} - \dfrac{y^2}{1} = 1$

$a = \dfrac{4}{3}, \quad b = 1, \quad c = \sqrt{\dfrac{16}{9} + 1} = \dfrac{5}{3}, \quad exc = \dfrac{5/3}{4/3} = \dfrac{5}{4} = 1{,}25$

Vértices: $\left(\dfrac{4}{3}, 0\right)$ y $\left(-\dfrac{4}{3}, 0\right)$. **Focos:** $F\left(\dfrac{5}{3}, 0\right)$ y $F'\left(-\dfrac{5}{3}, 0\right)$

Asíntotas: $y = \dfrac{3}{4}x; \quad y = -\dfrac{3}{4}x$

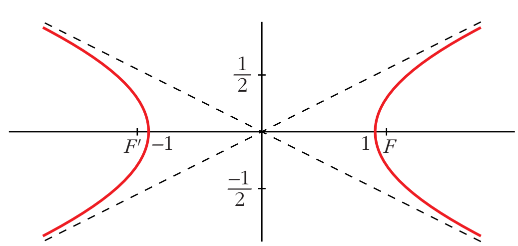


c) $x^2 - 4y^2 = 1 \quad \rightarrow \quad \dfrac{x^2}{1} - \dfrac{y^2}{1/4} = 1$

$a = 1, \quad b = \dfrac{1}{2}, \quad c = \sqrt{1 + \dfrac{1}{4}} = \dfrac{\sqrt{5}}{2}, \quad exc = \dfrac{\sqrt{5}/2}{1} = \dfrac{\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}12$

Vértices: $(1, 0)$ y $(-1, 0)$. **Focos:** $F\left(\dfrac{\sqrt{5}}{2}, 0\right)$ y $F'\left(-\dfrac{\sqrt{5}}{2}, 0\right)$

Asíntotas: $y = \dfrac{1}{2}x; \quad y = -\dfrac{1}{2}x$

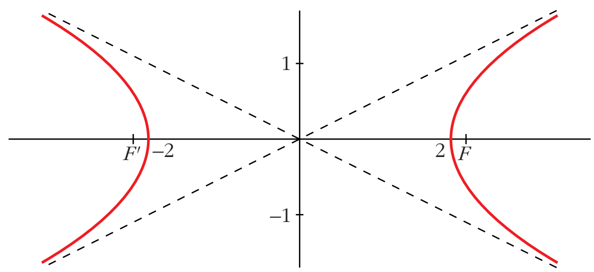


d) $x^2 - 4y^2 = 4 \quad \rightarrow \quad \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{1} = 1$

$a = 2, \quad b = 1, \quad c = \sqrt{4 + 1} = \sqrt{5}, \quad exc = \frac{\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}12$

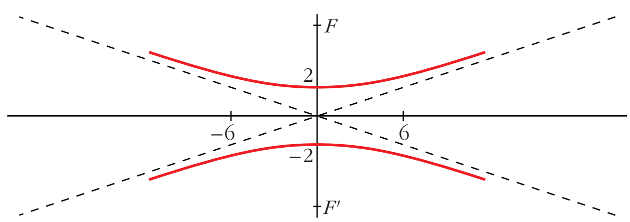
Vértices: $(2, 0)$ y $(-2, 0)$. **Focos:** $F(\sqrt{5}, 0)$ y $F'(-\sqrt{5}, 0)$

Asíntotas: $y = \frac{1}{2}x; \quad y = -\frac{1}{2}x$



e) **Vértices:** $(0, 2)$ y $(0, -2)$. **Focos:** $F(0, \sqrt{40})$ y $F'(0, -\sqrt{40})$

$exc = \frac{\sqrt{40}}{2} \approx 3{,}16$. **Asíntotas:** $y = \frac{1}{3}x; \quad y = -\frac{1}{3}x$



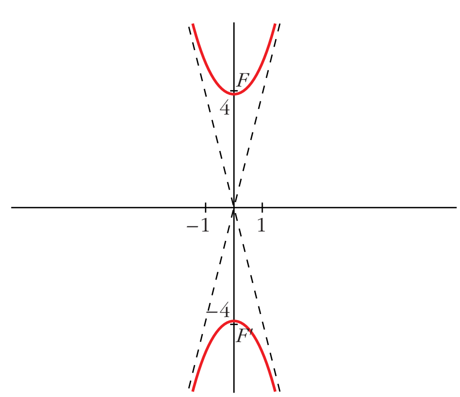
f) $y^2 - 16x^2 = 16 \quad \rightarrow \quad \frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{1} = 1$

Vértices: $(0, 4)$ y $(0, -4)$

Focos: $F(0, \sqrt{17})$ y $F'(0, -\sqrt{17})$

$exc = \frac{\sqrt{17}}{4} \approx 1{,}03$

Asíntotas: $y = 4x; \quad y = -4x$



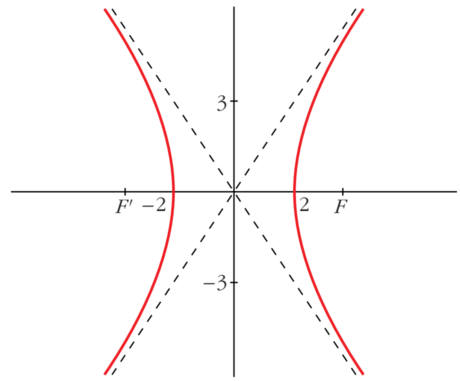
g) $9x^2 - 4y^2 = 36 \quad \rightarrow \quad \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{9} = 1$

Vértices: $(2, 0)$ y $(-2, 0)$

Focos: $F(\sqrt{13}, 0)$ y $F'(-\sqrt{13}, 0)$

$exc = \dfrac{\sqrt{13}}{2} \approx 1{,}80$

Asíntotas: $y = \dfrac{3}{2}x$; $y = -\dfrac{3}{2}x$



h) $4x^2 - y^2 + 16 = 0 \quad \rightarrow \quad y^2 - 4x^2 = 16 \quad \rightarrow$

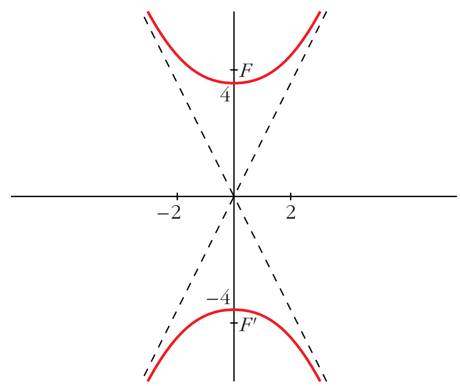
$\rightarrow \quad \dfrac{y^2}{16} - \dfrac{x^2}{4} = 1$

Vértices: $(0, 4)$ y $(0, -4)$

Focos: $F(\sqrt{20}, 0)$ y $F'(-\sqrt{20}, 0)$

$exc = \dfrac{\sqrt{20}}{4} \approx 1{,}12$

Asíntotas: $y = 2x$; $y = -2x$



18 **Halla las ecuaciones de las hipérbolas determinadas de los modos siguientes:**

a) Focos (–4, 0), (4, 0). Distancia entre los vértices, 4.

b) Asíntotas, $y = \pm \dfrac{1}{5}x$. Vértice, (2, 0).

c) Asíntotas, $y = \pm 3x$. Pasa por el punto (2, 1).

d) Focos (–3, 0), (3, 0). Excentricidad, 3.

a) $c = 4$; $2a = 4 \quad \rightarrow \quad a = 2$; $b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{16 - 4} = \sqrt{12}$

La ecuación es: $\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{12} = 1$

b) $a = 2$; $\dfrac{b}{a} = \dfrac{1}{5} \quad \rightarrow \quad \dfrac{b}{2} = \dfrac{1}{5} \quad \rightarrow \quad b = \dfrac{2}{5}$

Ecuación: $\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{4/25} = 1$, o bien, $\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{25y^2}{4} = 1$

c) $\dfrac{b}{a} = 3 \quad \rightarrow \quad b = 3a \quad \rightarrow \quad \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{9a^2} = 1$

Como pasa por $(2, 1) \quad \rightarrow \quad \dfrac{4}{a^2} - \dfrac{1}{9a^2} = 1 \quad \rightarrow \quad 36 - 1 = 9a^2$

$35 = 9a^2 \;\rightarrow\; a^2 = \dfrac{35}{9} \;\rightarrow\; b^2 = 9a^2 = 35$

Ecuación: $\dfrac{x^2}{35/9} - \dfrac{y^2}{35} = 1$, o bien, $\dfrac{9x^2}{35} - \dfrac{y^2}{35} = 1$

d) $c = 3$, $\dfrac{c}{a} = \dfrac{3}{a} = 3 \;\rightarrow\; a = 1$

$b^2 = c^2 - a^2 = 9 - 1 = 8$

Ecuación: $\dfrac{x^2}{1} - \dfrac{y^2}{8} = 1$

19 **Halla la ecuación del lugar geométrico de los puntos cuya diferencia de distancias a $F'(-4, 0)$ y $F(4, 0)$ es 6.**

Es una hipérbola de focos F y F' y constante $2a = 6$. Por tanto, $a = 3$, $c = 4$, $b^2 = c^2 - a^2 = 16 - 9 = 7$.

La ecuación es: $\dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{7} = 1$

20 **Halla la ecuación de la hipérbola que tiene el centro en el origen de coordenadas y los focos en el eje de abscisas, sabiendo que pasa por el punto $P(\sqrt{5/2}, 1)$ y que una de sus asíntotas es la recta $y = 2x$.**

La pendiente de la asíntota es $\dfrac{b}{a} = 2 \;\rightarrow\; b = 2a$

Luego $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{4a^2} = 1$ es la ecuación.

Como pasa por el punto $P(\sqrt{5/2}, 1)$, entonces:

$\dfrac{5/2}{a^2} - \dfrac{1}{4a^2} = 1 \;\rightarrow\; 10 - 1 = 4a^2 \;\rightarrow\; 9 = 4a^2 \;\rightarrow\; a^2 = \dfrac{9}{4} \;\rightarrow\; b^2 = 4a^2 = 9$

La ecuación será: $\dfrac{x^2}{9/4} - \dfrac{y^2}{9} = 1$, es decir: $\dfrac{4x^2}{9} - \dfrac{y^2}{9} = 1$

Parábola

21 **Halla los vértices, los focos y las directrices de las siguientes parábolas, y represéntalas:**

a) $y^2 = 6x$ **b)** $y^2 = -6x$

c) $y = x^2$ **d)** $y = \dfrac{x^2}{4}$

e) $y^2 = 4(x - 1)$ **f)** $(y - 2)^2 = 8x$

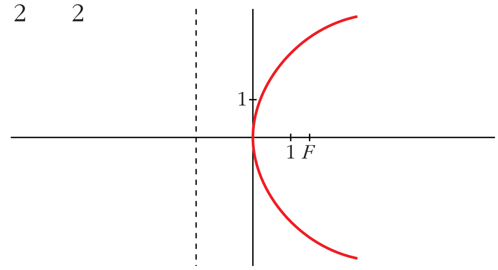
g) $x^2 = 4(y + 1)$ **h)** $(x - 2)^2 = -6y$

a) $\left.\begin{array}{l} y^2 = 2px \\ y^2 = 6x \end{array}\right\} \; 2p = 6 \;\; \rightarrow \;\; p = 3 \;\; \rightarrow \;\; \dfrac{p}{2} = \dfrac{3}{2}$

Vértice: $(0, 0)$

Foco: $\left(\dfrac{3}{2}, 0\right)$

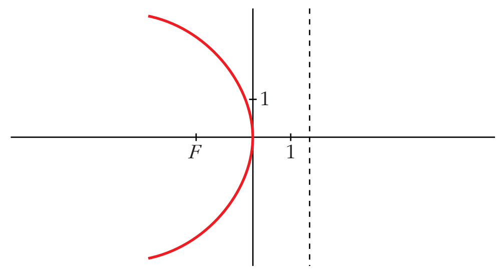
Directriz: $x = -\dfrac{3}{2}$



b) **Vértice:** $(0, 0)$

Foco: $\left(-\dfrac{3}{2}, 0\right)$

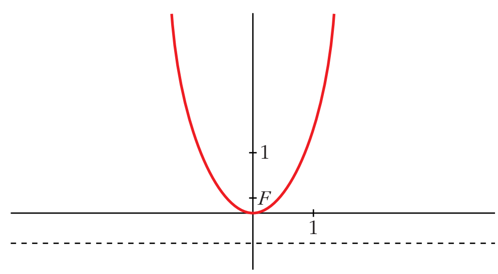
Directriz: $x = \dfrac{3}{2}$



c) **Vértice:** $(0, 0)$

Foco: $\left(0, \dfrac{1}{4}\right)$

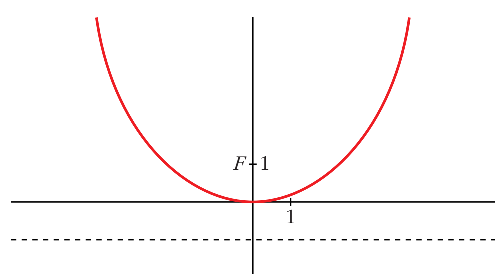
Directriz: $y = -\dfrac{1}{4}$



d) **Vértice:** $(0, 0)$

Foco: $(0, 1)$

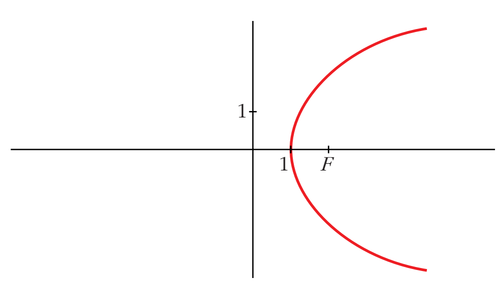
Directriz: $y = -1$



e) **Vértice:** $(1, 0)$

Foco: $(2, 0)$

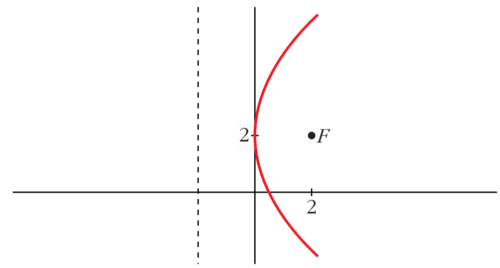
Directriz: $x = 0$



f) **Vértice:** $(0, 2)$

Foco: $(2, 2)$

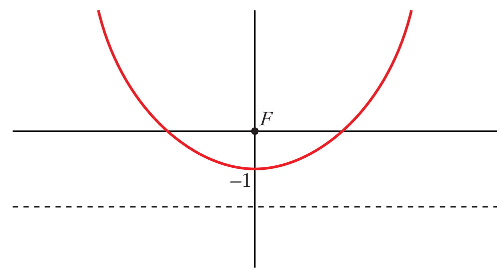
Directriz: $x = -2$



g) **Vértice:** $(0, -1)$

Foco: $(0, 0)$

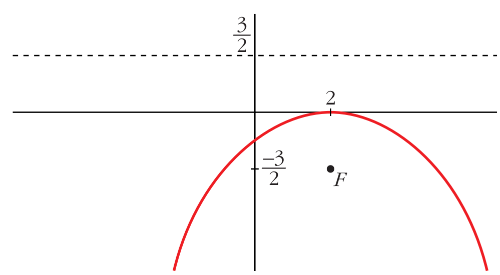
Directriz: $y = -2$



h) **Vértice:** $(2, 0)$

Foco: $\left(2, -\frac{3}{2}\right)$

Directriz: $y = \frac{3}{2}$



22 **Halla las ecuaciones de las parábolas determinadas de los siguientes modos:**

a) Directriz, $x = -5$. Foco, $(5, 0)$.

b) Directriz, $y = 3$. Vértice, $(0, 0)$.

c) Vértice $(0, 0)$ y pasa por $(2, 3)$. (2 soluciones).

a) $\frac{p}{2} = 5 \;\to\; p = 10 \;\to\; 2p = 20$. Ecuación: $y^2 = 20x$

b) El foco será $F(0, -3)$. Si $P(x, y)$ es un punto de la parábola y d: $y - 3 = 0$ es la directriz, entonces:

$$dist\,(P, F) = dist\,(P, d) \;\to\; \sqrt{x^2 + (y+3)^2} = |y - 3| \;\to$$

$$\to\; x^2 + \cancel{y^2} + 6y + \cancel{9} = \cancel{y^2} - 6y + \cancel{9} \;\to\; x^2 = -12y$$

c) Hay dos posibilidades:

I) *Eje horizontal*: $y^2 = 2px$. Como pasa por $(2, 3)$, entonces:

$$9 = 4p \;\to\; p = \frac{9}{4} \;\to\; y^2 = \frac{9}{2}x$$

II) *Eje vertical*: $x^2 = 2py$. Como pasa por $(2, 3)$, entonces:

$$4 = 6p \;\to\; p = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \;\to\; x^2 = \frac{4}{3}y$$

23 **Halla el lugar geométrico de los puntos que equidistan del punto $(3, 0)$ y de la recta $y = -3$.**

Es una parábola cuyo foco es $F(3, 0)$ y cuya directriz es d: $y + 3 = 0$. Si $P(x, y)$ es un punto de la parábola, entonces:

$$dist\,(P, F) = dist\,(P, d) \rightarrow \sqrt{(x-3)^2 + y^2} = |y+3| \rightarrow$$

$$\rightarrow x^2 - 6x + \cancel{9} + \cancel{y^2} = \cancel{y^2} + 6y + \cancel{9} \rightarrow y = \frac{x^2}{6} - x$$

O bien: $(x-3)^2 = 6\left(y + \dfrac{3}{2}\right)$

24 **Escribe la ecuación de la parábola de foco $F(2, 1)$ y directriz $y + 3 = 0$.**

Si $P(x, y)$ es un punto de la parábola, $F(2, 1)$ el foco, y d: $y + 3 = 0$ la directriz, entonces:

$$dist\,(P, F) = dist\,(P, d) \rightarrow \sqrt{(x-2)^2 + (y-1)^2} = |y+3| \rightarrow$$

$$\rightarrow (x-2)^2 + (y-1)^2 = (y+3)^2 \rightarrow$$

$$\rightarrow (x-2)^2 + \cancel{y^2} - 2y + 1 = \cancel{y^2} + 6y + 9 \rightarrow$$

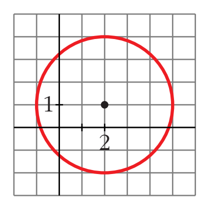
$$\rightarrow (x-2)^2 = 8y + 8 \rightarrow (x-2)^2 = 8(y+1)$$

Lugares geométricos

25 **Halla la ecuación del lugar geométrico de los puntos P tales que $|\overrightarrow{AP}| = 3$, siendo $A(2, 1)$. Represéntala.**

$$|\overrightarrow{AP}| = 3 \rightarrow \sqrt{(x-2)^2 + (y-1)^2} = 3 \rightarrow$$

$$\rightarrow (x-2)^2 + (y-1)^2 = 9$$

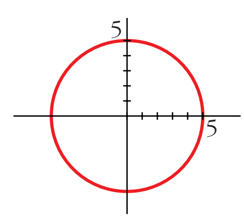


Es una circunferencia de centro $(2, 1)$ y radio 3.

26 **Halla la ecuación que cumplen todos los puntos cuya distancia al origen de coordenadas es 5. Represéntala.**

$P(x, y)$ cumple que $dist\,(P, 0) = 5 \rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = 5 \rightarrow$

$$\rightarrow x^2 + y^2 = 25$$



Es una circunferencia de centro $(0, 0)$ y radio 5.

27 **Halla el lugar geométrico de los puntos $P(x, y)$ cuya diferencia de cuadrados de distancias a los puntos $A(0, 0)$ y $B(6, 3)$ es 15. ¿Qué figura obtienes?.**

$$[dist\,(P, A)]^2 - [dist\,(P, B)]^2 = 15$$

$$x^2 + y^2 - [(x-6)^2 + (y-3)^2] = 15$$

Desarrollamos y simplificamos:

$$x^2 + y^2 - x^2 - 36 + 12x - y^2 - 9 + 6y = 15 \;\rightarrow$$
$$\rightarrow\; 12x + 6y - 60 = 0 \;\rightarrow\; r\text{: } 2x + y - 10 = 0$$

Veamos que la recta obtenida es perpendicular al segmento AB:

$\overrightarrow{AB} = (6, 3) \;\rightarrow\;$ pendiente: $m_{AB} = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$

La pendiente de r es $m_r = -2$.

$m_{AB} \cdot m_r = \dfrac{1}{2}(-2) = -1 \;\rightarrow\; \overrightarrow{AB} \perp r$

Veamos ahora en qué punto se cortan la recta obtenida, r, y el segmento AB. Para ello, escribamos primero la ecuación de la recta AB:

$$AB \begin{cases} m_{AB} = 1/2 \\ A(0, 0) \in AB \end{cases} \rightarrow\; y = \frac{1}{2}x$$

Así:

$$Q = r \cap AB \begin{cases} 2x + y - 10 = 0 \\ y = (1/2)x \end{cases} \rightarrow\; 2x + \frac{1}{2}x - 10 = 0 \;\rightarrow$$
$$\rightarrow\; 4x + x - 20 = 0 \;\rightarrow\; x = \frac{20}{5} = 4 \;\rightarrow\; y = 2$$

Luego: $Q(4, 2) = AB \cap r$

28 **Halla el lugar geométrico de los puntos cuya distancia a la recta $4x - 3y + 11 = 0$ es 6.**

☛ ***El valor absoluto dará lugar a dos rectas.***

$P(x, y)$ cumple que $dist(P, r) = 6 \rightarrow \dfrac{|4x - 3y + 11|}{\sqrt{16 + 9}} = 6 \;\rightarrow$

$$\rightarrow\; |4x - 3y + 11| = 30 \;\rightarrow \begin{cases} 4x - 3y + 11 = 30 \\ 4x - 3y + 11 = -30 \end{cases} \rightarrow$$
$$\rightarrow \begin{cases} r_1\text{: } 4x - 3y - 19 = 0 \\ r_2\text{: } 4x - 3y + 41 = 0 \end{cases}$$

Son dos rectas paralelas entre sí y paralelas, a su vez, a la recta dada.

29 **Halla el lugar geométrico de los puntos que equidistan de las rectas:**

$$\mathbf{r\text{: } 3x - 5y + 11 = 0 \quad y \quad s\text{: } 3x - 5y + 3 = 0}$$

Interpreta las líneas obtenidas.

$P(x, y)$ donde $d(P, r) = d(P, s) \;\rightarrow\; \dfrac{|3x - 5y + 11|}{\sqrt{34}} = \dfrac{|3x - 5y + 3|}{\sqrt{34}} \;\rightarrow$

$$\rightarrow \begin{cases} 3x - 5y + 11 = 3x - 5y + 3 \;\rightarrow\; 11 = 3 \;\text{¡¡Imposible!!} \\ 3x - 5y + 11 = -3x + 5y - 3 \;\rightarrow\; 6x - 10y + 14 = 0 \;\rightarrow\; r\text{: } 3x - 5y + 7 = 0 \end{cases}$$

Es una recta paralela a las dos rectas dadas que, a su vez, son paralelas entre sí, como puede verse por sus coeficientes, pues:

$$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = 1 \neq \frac{C}{C'} = \frac{11}{3}$$

30 **Halla las ecuaciones de las bisectrices de los ángulos que forman las rectas r y s:**

$$\boldsymbol{r: 4x - 3y + 8 = 0 \quad \text{y} \quad s: 12x + 5y - 7 = 0}$$

Son todos los puntos $P(x, y)$ tales que $d(P, r) = d(P, s)$:

$$\frac{|4x - 3y + 8|}{\sqrt{25}} = \frac{|12x + 5y - 7|}{\sqrt{169}} \rightarrow \frac{|4x - 3y + 8|}{5} = \frac{|12x + 5y - 7|}{13} \rightarrow$$

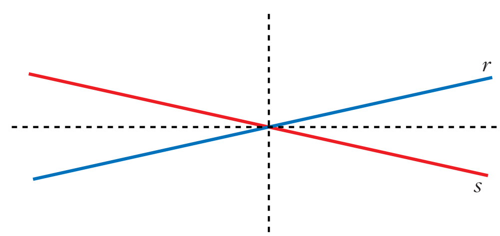
$$\rightarrow \begin{cases} 13(4x - 3y + 8) = 5(12x + 5y - 7) \\ 13(4x - 3y + 8) = -5(12x + 5y - 7) \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} 52x - 39y + 104 = 60x + 25y - 35 \\ 52x - 39y + 104 = -60x - 25y + 35 \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} 8x + 64y - 139 = 0 \\ 112x - 14y + 69 = 0 \end{cases}$$

Luego hay dos soluciones, bisectrices de los ángulos cóncavo y convexo que forman las rectas r y s.

Ambas bisectrices se cortan en el punto de corte de las rectas r y s, y son perpendiculares.



31 **Halla la ecuación del lugar geométrico de los puntos cuya distancia a la recta $y = 3$ es igual al valor absoluto de la suma de sus coordenadas.**

Buscamos los puntos $P(x, y)$ tales que $d(P, r) = |x + y|$ donde r es la recta dada, $r: y = 3$. Es decir:

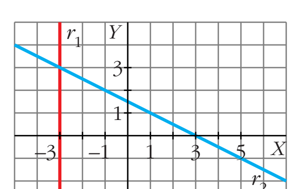
$$\frac{|0 + y - 3|}{\sqrt{1}} = |x + y| \rightarrow |y - 3| = |x + y| \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} y - 3 = x + y \rightarrow \\ y - 3 = -x - y \rightarrow \end{cases} \begin{cases} x = -3 \\ x + 2y - 3 = 0 \end{cases}$$

Luego los puntos $P(x, y)$ que verifican esa condición son los de las dos rectas:

$$r_1: x = -3 \quad \text{y} \quad r_2: x + 2y - 3 = 0$$

NOTA: Se puede comprobar resolviendo los sistemas que $r_1 \cap r_2 \cap r = Q(-3, 3)$



Página 235

PARA RESOLVER

32 **Identifica las siguientes cónicas, calcula sus elementos característicos y dibújalas:**

a) $4x^2 + 9y^2 = 36$ **b)** $16x^2 - 9y^2 = 144$

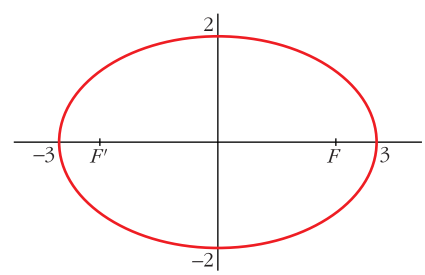
c) $9x^2 + 9y^2 = 25$ **d)** $x^2 - 4y^2 = 16$

e) $y^2 = 14x$ **f)** $25x^2 + 144y^2 = 900$

a) $4x^2 + 9y^2 = 36 \;\rightarrow\; \dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1$

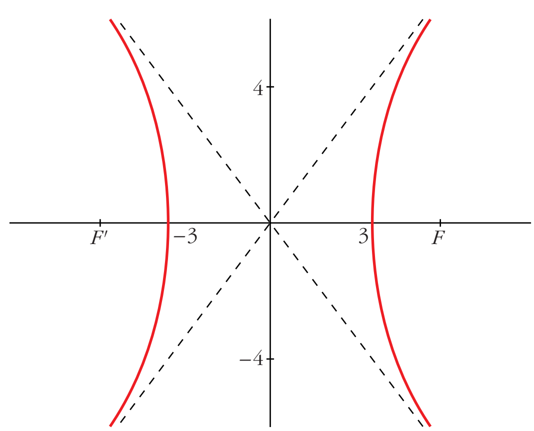
Es una elipse $\rightarrow$ $a = 3,\; b = 2,\; c = \sqrt{5}$

$exc = \dfrac{\sqrt{5}}{3} \approx 0{,}75$



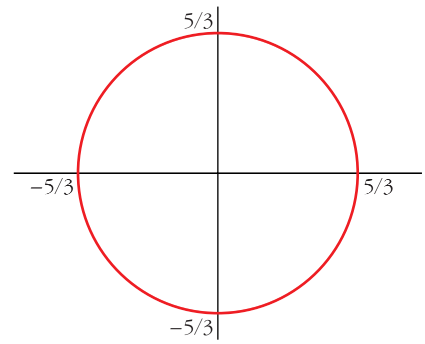
b) $16x^2 - 9y^2 = 144 \;\rightarrow\; \dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{16} = 1$

Es una hipérbola $\rightarrow$ $\begin{cases} a = 3,\; b = 4,\; c = 5;\; exc = \dfrac{5}{3} \approx 1{,}67 \\ \text{Asíntotas: } y = \dfrac{4}{3}x;\; y = -\dfrac{4}{3}x \end{cases}$



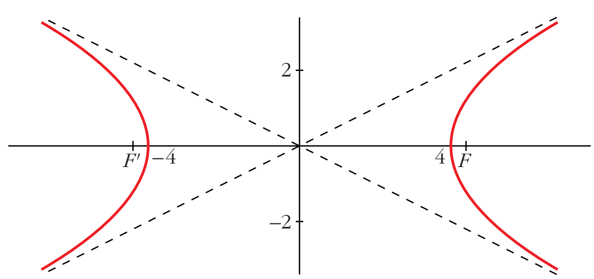
c) $9x^2 + 9y^2 = 25 \quad \rightarrow \quad x^2 + y^2 = \dfrac{25}{9}$

Es una circunferencia de centro (0, 0) y radio $\dfrac{5}{3}$.



d) $x^2 - 4y^2 = 16 \quad \rightarrow \quad \dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{4} = 1$

Es una hipérbola $\rightarrow$ $\begin{cases} a = 4, \quad b = 2, \quad c = 2\sqrt{5}; \quad exc = \dfrac{2\sqrt{5}}{4} = \dfrac{\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}12 \\ \text{Asíntotas: } \; y = \dfrac{1}{2}x; \; y = -\dfrac{1}{2}x \end{cases}$

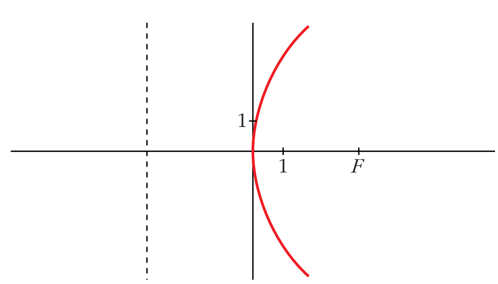


e) Es una parábola.

Vértice: (0, 0)

Foco: $\left(\dfrac{7}{2}, 0\right)$

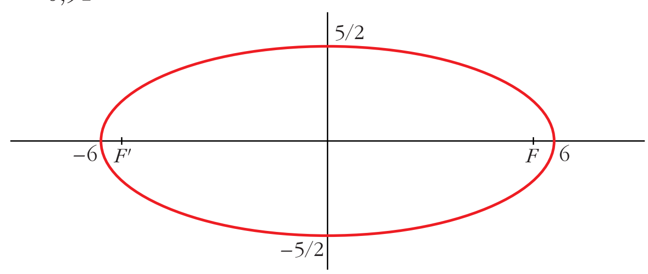
Directriz: $x = -\dfrac{7}{2}$



f) $25x^2 + 144y^2 = 900 \;\to\; \dfrac{x^2}{36} - \dfrac{y^2}{25/4} = 1$

Es una elipse $\to$ $a = 6,\; b = \dfrac{5}{2},\; c = \dfrac{\sqrt{119}}{12}$

$exc = \dfrac{\sqrt{119}}{12} \approx 0{,}91$



33 **Halla las ecuaciones de las siguientes circunferencias:**

a) Centro (3, 5) y es tangente a la recta: $4x + 3y - 2 = 0$

b) Pasa por $A(0, 1)$ y $B(-1, 0)$ y su radio es $\sqrt{5}$.

c) Pasa por el origen de coordenadas y por los puntos $A(4, 0)$ y $B(0, 3)$.

d) Tiene su centro en la recta $x - 3y = 0$ y pasa por los puntos $(-1, 4)$ y $(3, 6)$.

a) El radio de la circunferencia es la distancia del centro $C(3, 5)$ a la recta s: $4x + 3y - 2 = 0$:

$$r = dist\,(C, s) = \frac{|12 + 15 - 2|}{\sqrt{16 + 9}} = \frac{25}{5} = 5$$

La ecuación es: $(x - 3)^2 + (y - 5)^2 = 25$, o bien, $x^2 + y^2 - 6x - 10y + 9 = 0$

b) El centro pertenece a la mediatriz del segmento AB:

— Pendiente de la recta que pasa por A y B $\to$ $m = \dfrac{0 - 1}{-1 - 0} = 1$

La mediatriz tiene pendiente $\dfrac{-1}{m} = \dfrac{-1}{1} = -1$.

— El punto medio de AB es $\left(\dfrac{-1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$.

— La ecuación de la mediatriz es:

$$y = \frac{1}{2} - 1\left(x + \frac{1}{2}\right) \to y = \frac{1}{2} - x - \frac{1}{2} \to y = -x$$

— Un punto de la mediatriz es de la forma $P(x, -x)$.

Buscamos P tal que $dist\,(P, A) = dist\,(P, B) = \sqrt{5}$, es decir:

$\sqrt{x^2 + (-x - 1)^2} = \sqrt{5} \;\to\; x^2 + x^2 + 1 + 2x = 5 \;\to\; 2x^2 + 2x - 4 = 0 \;\to$

$\to\; x^2 + x - 2 = 0 \;\to\; x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1 + 8}}{2} = \dfrac{-1 \pm 3}{2}$
$x = 1 \;\to\; y = -1$
$x = -2 \;\to\; y = 2$

Hay dos soluciones:

- Centro $(1, -1) \;\rightarrow\; (x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 5 \;\rightarrow\; x^2 + y^2 - 2x + 2y - 3 = 0$
- Centro $(-2, 2) \;\rightarrow\; (x + 2)^2 + (y - 2)^2 = 5 \;\rightarrow\; x^2 + y^2 + 4x - 4y + 3 = 0$

c) El centro pertenece a la mediatriz del segmento que une $O(0, 0)$ y $A(4, 0)$, es decir, pertenece a la recta $x = 2$.

También pertenece a la mediatriz del segmento que une $O(0, 0)$ y $B(0, 3)$, es decir, pertenece a la recta $y = \frac{3}{2}$.

Por tanto, el centro de la circunferencia es $C\left(2, \frac{3}{2}\right)$.

El radio es la distancia del centro a cualquiera de los tres puntos:

$$r = dist\,(C, O) = |\overrightarrow{OC}| = \sqrt{4 + \frac{9}{4}} = \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{5}{2}$$

La ecuación es: $(x - 2)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}$, o bien, $x^2 + y^2 - 4x - 3y = 0$

d) Si el centro está sobre la recta $x - 3y = 0$, es de la forma $C(3y, y)$.

El centro está a igual distancia de $A(-1, 4)$ que de $B(3, 6)$. Además, esta distancia es el radio, r, de la circunferencia:

$$r = dist\,(A, C) = dist\,(B, C) \;\rightarrow\; |\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{BC}| \;\rightarrow$$

$$\rightarrow\; \sqrt{(3y + 1)^2 + (y - 4)^2} = \sqrt{(3y - 3)^2 + (y - 6)^2}$$

$$\cancel{9y^2} + 1 + 6y + \cancel{y^2} + 16 - 8y = \cancel{9y^2} + 9 - 18y + \cancel{y^2} + 36 - 12y$$

$$28y = 28 \;\rightarrow\; y = 1 \;\rightarrow\; x = 3y = 3$$

Por tanto, el centro de la circunferencia está en $C(3, 1)$, y su radio es:

$$r = |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5$$

La ecuación es: $(x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 25$, o bien, $x^2 + y^2 - 6x - 2y - 15 = 0$

34 **Halla la ecuación de la elipse que pasa por el punto (3, 1) y tiene sus focos en (4, 0) y (–4, 0).**

La ecuación es: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

- Como pasa por $(3, 1) \;\rightarrow\; \frac{9}{a^2} + \frac{1}{b^2} = 1$
- Como $a^2 = b^2 + c^2$ y sabemos que $c = 4 \;\rightarrow\; a^2 = b^2 + 16$

Teniendo en cuenta las dos condiciones anteriores:

$$\frac{9}{b^2+16} + \frac{1}{b^2} = 1 \quad \to \quad 9b^2 + b^2 + 16 = b^4 + 16b^2 \quad \to \quad b^4 + 6b^2 - 16 = 0$$

$$b^2 = \frac{-6 \pm \sqrt{36+64}}{2} = \frac{-6 \pm \sqrt{100}}{2} = \frac{-6 \pm 10}{2} \begin{cases} b^2 = 2 \\ \cancel{b^2 = -8} \end{cases}$$

Así: $a^2 = 2 + 16 = 18$

Por tanto, la ecuación de la elipse será: $\dfrac{x^2}{18} + \dfrac{y^2}{2} = 1$

35 **Se llama hipérbola equilátera a aquella en que $a = b$. Halla la ecuación de la hipérbola equilátera cuyos focos son (5, 0) y (–5, 0).**

La ecuación será: $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{a^2} = 1$

Como $c^2 = a^2 + b^2$, y sabemos que $c = 5$ y que $a^2 = b^2$, entonces:

$$25 = 2a^2 \quad \to \quad a^2 = \frac{25}{2}$$

Por tanto, la ecuación es: $\dfrac{x^2}{25/2} - \dfrac{y^2}{25/2} = 1$, o bien, $x^2 - y^2 = \dfrac{25}{2}$

36 **Halla la ecuación de la hipérbola cuyas asíntotas son las rectas $y = \pm\frac{3}{5}x$ y los focos (2, 0) y (–2, 0).**

- Si los focos son (2, 0) y (–2, 0), entonces $c = 2$.
- Si las asíntotas son $y = \pm\dfrac{3}{5}x$, entonces: $\dfrac{b}{a} = \dfrac{3}{5}$
- Como $c^2 = a^2 + b^2$, tenemos que $a^2 + b^2 = 4$.
- Teniendo en cuenta los dos últimos resultados:

$$\left.\begin{aligned} b &= \frac{3}{5}a \\ a^2 + b^2 &= 4 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &a^2 + \frac{9}{25}a^2 = 4 \quad \to \quad \frac{34a^2}{25} = 4 \quad \to \quad 34a^2 = 100 \\ &a^2 = \frac{100}{34} = \frac{50}{17} \quad \to \quad b^2 = 4 - a^2 = \frac{18}{17} \end{aligned}$$

- Por tanto, la ecuación será: $\dfrac{x^2}{50/17} - \dfrac{y^2}{18/17} = 1$, o bien, $\dfrac{17x^2}{50} - \dfrac{17y^2}{18} = 1$

37 **Una circunferencia del plano pasa por los puntos (1, 3) y (3, 5) y tiene el centro sobre la recta $x + 2y = 3$. Halla su centro y su radio.**

- Si el centro está sobre la recta $x + 2y = 3 \to x = 3 - 2y$; entonces es de la forma $C(3 - 2y, y)$.
- La distancia del centro a los dos puntos dados, $A(1, 3)$ y $B(3, 5)$ es la misma. Además, esta distancia es el radio, r, de la circunferencia:

$r = dist\ (C, A) = dist\ (C, B) \ \to\ |\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{BC}| \ \to$

$\to\ |(2 - 2y, y - 3)| = |(-2y, y - 5)| \ \to$

$\to\ \sqrt{(2 - 2y)^2 + (y - 3)^2} = \sqrt{(-2y)^2 + (y - 5)^2}$

$4 + \cancel{4y^2} - 8y + \cancel{y^2} + 9 - 6y = \cancel{4y^2} + \cancel{y^2} + 25 - 10y$

$-4y = 12 \ \to\ y = -3 \ \to\ x = 3 - 2y = 9$

- El *centro* de la circunferencia es $C(9, -3)$.
- El *radio* es: $r = |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{64 + 36} = \sqrt{100} = 10 = r$

38 Halla las ecuaciones de las siguientes parábolas:

a) Foco (0, 0); directriz $y = -2$.

b) Foco (2, 0); directriz $x = -1$.

c) Foco (1, 1); vértice $\left(1, \frac{1}{2}\right)$.

a) Si $P(x, y)$ es un punto de la parábola, debe cumplir: $dist\ (P, F) = dist\ (P, d)$; donde F es el foco y d la directriz.

$\sqrt{x^2 + y^2} = |y + 2| \ \to\ x^2 + \cancel{y^2} = \cancel{y^2} + 4y + 4 \ \to\ x^2 = 4(y + 1)$

b) Si $P(x, y)$ es un punto de la parábola: $dist\ (P, F) = dist\ (P, d)$; siendo F el foco y d la directriz.

$\sqrt{(x - 2)^2 + y^2} = |x + 1| \ \to\ \cancel{x^2} - 4x + 4 + y^2 = \cancel{x^2} + 2x + 1$

$y^2 = 6x - 3 \ \to\ y^2 = 6\left(x - \frac{1}{2}\right)$

c) Si el foco es $F(1, 1)$ y el vértice es $\left(1, \frac{1}{2}\right)$, la directriz tiene que ser la recta d: $y = 0$, ya que la distancia del vértice al foco ha de ser igual a la distancia del vértice a la directriz. Así, si $P(x, y)$ es un punto de la parábola:

$dist\ (P, F) = dist\ (P, d)$

$\sqrt{(x - 1)^2 + (y - 1)^2} = |y| \ \to\ (x - 1)^2 + \cancel{y^2} - 2y + 1 = \cancel{y^2}$

$(x - 1)^2 = 2y - 1 \ \to\ (x - 1)^2 = 2\left(y - \frac{1}{2}\right)$

39 a) Halla la ecuación de la circunferencia cuyo centro es $C(-1, 1)$ y es tangente a la recta $3x - 4y - 3 = 0$.

b) De todas las rectas paralelas a la bisectriz del primer cuadrante, encuentra las que sean tangentes a la circunferencia hallada en el apartado anterior.

a) El radio, r, de la circunferencia es la distancia del centro $C(-1, 1)$ a la recta s: $3x - 4y - 3 = 0$; es decir:

$$r = dist\ (C, s) = \frac{|-3-4-3|}{\sqrt{9+16}} = \frac{10}{5} = 2$$

La ecuación será: $(x+1)^2 + (y-1)^2 = 4$, o bien, $x^2 + y^2 + 2x - 2y - 2 = 0$

b) Las rectas paralelas a la bisectriz del primer cuadrante son de la forma $y = x + k$, es decir, t: $x - y + k = 0$. La recta t es tangente a la circunferencia cuando la distancia del centro de la circunferencia, $C(-1, 1)$, a la recta es igual al radio, 2. Es decir:

$$dist\ (C, t) = \frac{|-1-1+k|}{\sqrt{2}} = 2 \ \rightarrow \ \frac{|k-2|}{\sqrt{2}} = 2 \ \rightarrow$$

$$\rightarrow \ |k-2| = 2\sqrt{2} \begin{cases} k - 2 = 2\sqrt{2} \ \rightarrow \ k = 2 + 2\sqrt{2} \\ k - 2 = -2\sqrt{2} \ \rightarrow \ k = 2 - 2\sqrt{2} \end{cases}$$

Hay dos rectas: $\begin{cases} y = x + 2 + 2\sqrt{2} \\ y = x + 2 - 2\sqrt{2} \end{cases}$

40 Halla la ecuación de la circunferencia cuyo centro es el punto $C(3, 2)$ y una de cuyas rectas tangentes tiene por ecuación: $4x - 3y - 5 = 0$

Determina si el punto $X(3, 3)$ es interior, es exterior o está en la circunferencia.

- El radio, r, de la circunferencia es igual a la distancia del centro, $C(3, 2)$, a la recta s: $4x - 3y - 5 = 0$; es decir:

$$r = dist\ (C, s) = \frac{|12-6-5|}{\sqrt{16+9}} = \frac{1}{5}$$

La ecuación es: $(x-3)^2 + (y-2)^2 = \frac{1}{25}$, o bien, $x^2 + y^2 - 6x - 4y - \frac{324}{25} = 0 \ \rightarrow$

$$\rightarrow \ 25x^2 + 25y^2 - 150x - 100y - 324 = 0$$

- Veamos si $X(3, 3)$ es interior, exterior o está en la circunferencia:

$$dist\ (C, X) = |\overrightarrow{CX}| = |(0, 1)| = 1 > \text{radio} = \frac{1}{5}$$

Luego el punto es *exterior* a la circunferencia.

41 a) Determina la ecuación que define el lugar geométrico de los puntos del plano que son centro de las circunferencias que pasan por los puntos $P(2, 0)$ y $Q(0, 1)$.

b) Una circunferencia de longitud 3π, que contiene al origen de coordenadas, está centrada en uno de los puntos del lugar definido en a). Halla su centro.

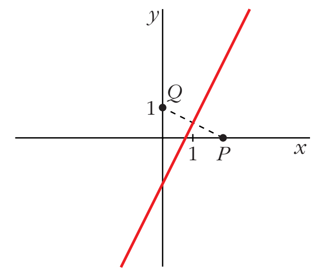
a) Si $C(x, y)$ es el centro de la circunferencia, la distancia de C a P y a Q ha de ser la misma, es decir:

$dist\ (C, P) = dist\ (C, Q) \ \rightarrow \ |\overrightarrow{PC}| = |\overrightarrow{QC}|$

$\sqrt{(x-2)^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + (y-1)^2}$

$\cancel{x^2} - 4x + 4 + \cancel{y^2} = \cancel{x^2} + \cancel{y^2} - 2y + 1 \ \rightarrow \ 4x - 2y - 3 = 0$

Obtenemos una recta, que es la *mediatriz del segmento PQ*.



b) Longitud $= 2\pi r = 3\pi \ \rightarrow \ \text{radio} = r = \frac{3}{2}$

Su centro está en un punto de la recta $4x - 2y - 3 = 0$ y pasa por el punto $P(0, 0)$.

El centro es de la forma $C\left(x, \frac{4x-3}{2}\right)$:

$$r = dist\ (P, C) = |\overrightarrow{PC}| = \quad x^2 + \left(\frac{4x-3}{2}\right)^2 = \frac{3}{2}$$

$$x^2 + \frac{16x^2 - 24x + 9}{4} = \frac{9}{4} \ \rightarrow \ 4x^2 + 16x^2 + 9 - 24x = 9 \ \rightarrow$$

$$\rightarrow \ 20x^2 - 24x = 0 \ \rightarrow \ x(20x - 24) = 0 \begin{cases} x = 0 \ \rightarrow \ y = -\frac{3}{2} \\ x = \frac{6}{5} \ \rightarrow \ y = \frac{9}{10} \end{cases}$$

Hay dos soluciones: $C_1\left(0, -\frac{3}{2}\right)$ y $C_2\left(\frac{6}{5}, \frac{9}{10}\right)$

42 **Halla la ecuación de la hipérbola que tiene por focos los puntos $F(-3, 0)$ y $F'(3, 0)$ y que pasa por el punto $P(8, 5\sqrt{3})$.**

- Hallamos la constante de la hipérbola: $|dist\ (P, F) - dist\ (P, F')| = 2a$

$$\left| |\overrightarrow{FP}| - |\overrightarrow{F'P}| \right| = 2a \ \rightarrow \ \left| |(11, 5\sqrt{3})| - |(5, 5\sqrt{3})| \right| = 2a$$

$$\sqrt{121 + 75} - \sqrt{25 + 75} = 2a \ \rightarrow \ 14 - 10 = 2a \ \rightarrow \ 4 = 2a \ \rightarrow \ a = 2$$

- Como $a = 2$ y $c = 3$, entonces $b^2 = c^2 - a^2 = 9 - 4 = 5$.

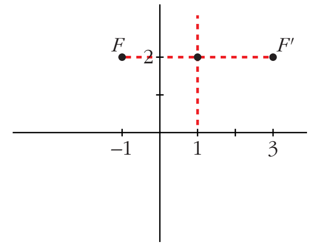
- La ecuación es: $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$

43 **Calcula la ecuación de la elipse cuyo focos son los puntos $F(-1, 2)$ y $F'(3, 2)$ y cuya excentricidad es igual a 1/3.**

- El centro de la elipse es el punto medio entre los focos:

$$\left(\frac{-1+3}{2}, \frac{2+2}{2}\right) = (1, 2)$$

- La semidistancia focal es $c = 2$.
- La excentricidad es $exc = \frac{c}{a} = \frac{2}{a} = \frac{1}{3} \rightarrow a = 6$
- Obtenemos $b^2 \rightarrow b^2 = a^2 - c^2 = 36 - 4 = 32$
- La ecuación es: $\frac{(x-1)^2}{36} + \frac{(y-2)^2}{32} = 1$



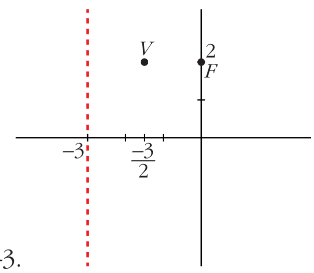
44 **La parábola $y^2 - 4y - 6x - 5 = 0$ tiene por foco el punto (0, 2). Encuentra su directriz.**

$y^2 - 4y = 6x + 5 \rightarrow y^2 - 4y + 4 = 6x + 9 \rightarrow$

$\rightarrow (y-2)^2 = 6\left(x + \frac{3}{2}\right)$

El vértice de la parábola es $V\left(-\frac{3}{2}, 2\right)$.

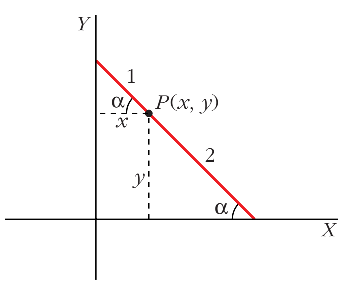
Como el foco es $F(0, 2)$, entonces la directriz es $x = -3$.



45 **Un segmento de longitud 3 apoya sus extremos sobre los ejes de coordenadas tomando todas las posiciones posibles.**

a) Determina la ecuación del lugar geométrico del punto del segmento que está situado a distancia 1 del extremo que se apoya sobre el eje OY.

b) Identifica la cónica resultante.



a) Llamamos α al ángulo que forma el segmento con el eje X, como indica la figura. Así, tenemos que:

$$\left.\begin{array}{l} x = 1\cos\alpha \\ y = 2sen\,\alpha \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} x^2 = cos^2\,\alpha \\ y^2 = 4sen^2\,\alpha \end{array}\right\}$$

$$x^2 + \frac{y^2}{4} = cos^2\alpha + sen^2\alpha = 1 \rightarrow x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$$

b) Es una elipse con centro en el origen y focos en el eje OY. Sus elementos son $a = 2$, $b = 1$, $c = \sqrt{4-1} = \sqrt{3}$.

Focos $(0, \sqrt{3})$ y $(0, -\sqrt{3})$. Excentricidad: $exc = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0{,}87$

46 **Halla la ecuación del lugar geométrico de los puntos del plano tales que su distancia al punto (4, 0) es el doble de su distancia a la recta $x = 1$. Comprueba que dicho lugar geométrico es una cónica y halla sus focos.**

Sea $P(x, y)$ uno de los puntos del lugar geométrico. La distancia de P al punto $Q(4, 0)$ ha de ser el doble que la distancia de P a la recta $s: x - 1 = 0$; es decir:

$$dist(P, Q) = 2dist(P, s) \rightarrow \sqrt{(x-4)^2 + y^2} = 2|x - 1|$$

$$(x-4)^2 + y^2 = 4(x-1)^2 \;\;\to\;\; x^2 - 8x + 16 + y^2 = 4(x^2 - 2x + 1)$$

$$x^2 - \cancel{8x} + 16 + y^2 = 4x^2 - \cancel{8x} + 4 \;\;\to\;\; 3x^2 - y^2 = 12 \;\;\to\;\; \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$$

Es una hipérbola, centrada en (0, 0).

$$a^2 = 4; \;\; b^2 = 12 \;\;\to\;\; c^2 = a^2 + b^2 = 16 \;\;\to\;\; c = 4$$

Por tanto, los focos son $F(4, 0)$ y $F(-4, 0)$.

Página 236

47 Aplica dos métodos diferentes que permitan decidir si la recta $4x + 3y - 8 = 0$ es exterior, tangente o secante a la circunferencia $(x-6)^2 + (y-3)^2 = 25$. Razona tu respuesta.

- Primer método:
  - Hallamos la distancia del centro de la circunferencia $C(6, 3)$ a la recta dada s: $4x + 3y - 8 = 0$:

$$d = dist\,(C, s) = \frac{|24 + 9 - 8|}{\sqrt{16+9}} = \frac{25}{5} = 5$$

  - Como esta distancia es igual al radio de la circunferencia, $d = r = 5$, entonces, *la recta es tangente a la circunferencia*.

- Segundo método:
  - Obtenemos los puntos de intersección de la recta y la circunferencia, resolviendo el sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} 4x + 3y - 8 = 0 \\ (x-6)^2 + (y-3)^2 = 25 \end{array}\right\} \begin{array}{l} y = \dfrac{8-4x}{3} \\ x^2 - 12x + 36 + y^2 - 6y + 9 = 25 \end{array}$$

$$x^2 - 12x + 36 + \left(\frac{8-4x}{3}\right)^2 - 6\left(\frac{8-4x}{3}\right) + 9 = 25$$

$$x^2 - 12x + 36 + \frac{64 - 64x + 16x^2}{9} - 16 + 8x + 9 = 25$$

$$9x^2 - 108x + 324 + 64 - 64x + 16x^2 - 144 + 72x + 81 = 225$$

$$25x^2 - 100x + 100 = 0 \;\;\to\;\; x^2 - 4x + 4 = 0 \;\;\to\;\; (x-2)^2 = 0$$

$$x = 2 \;\;\to\;\; y = \frac{8-4x}{3} = 0 \;\;\to\;\; \text{Se cortan en } (2, 0).$$

Como solo se cortan en un punto, *la recta es tangente a la circunferencia*.

48 Halla la ecuación del lugar geométrico de los puntos cuya distancia al punto (4, 0) es igual a la mitad de la distancia a la recta: $x - 16 = 0$. Representa la curva que obtienes.

Sea $P(x, y)$ uno de los puntos del lugar geométrico. La distancia de P a (4, 0) ha de ser igual a la mitad de la distancia de P a la recta $x - 16 = 0$; es decir:

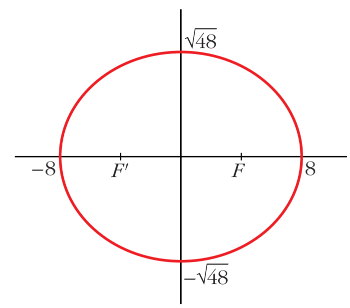
$$\sqrt{(x-4)^2+y^2}=\frac{1}{2}\,|x-16|$$

$$(x-4)^2+y^2=\frac{1}{4}(x-16)^2$$

$$x^2-8x+16+y^2=\frac{1}{4}(x^2-32x+256)$$

$$4x^2-\cancel{32x}+64+4y^2=x^2-\cancel{32x}+256$$

$$3x^2+4y^2=192 \;\rightarrow\; \frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{48}=1$$



Es una elipse, en la que $a = 8$ y $b = \sqrt{48} \approx 6{,}93$.

La representamos:

Los focos están en $F(4, 0)$ y $F'(-4, 0)$.

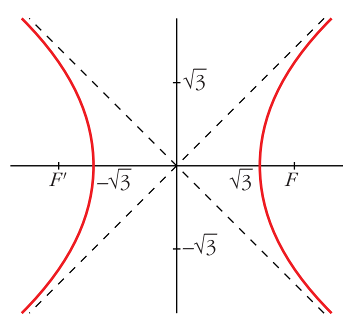
La excentricidad es: $exc = \dfrac{c}{a} = \dfrac{4}{8} = \dfrac{1}{2} = 0{,}5$

49 **Halla el lugar geométrico de los puntos $P(x, y)$ tales que el producto de las pendientes de las rectas trazadas desde P a los puntos: $A(-2, 1)$ y $B(2, -1)$ sea igual a 1. ¿Qué figura obtienes? Represéntala.**

- La pendiente de la recta que une P con A es: $\dfrac{y-1}{x+2}$
- La pendiente de la recta que une P con B es: $\dfrac{y+1}{x-2}$
- El producto de las pendientes ha de ser igual a 1, es decir:

$$\left(\frac{y-1}{x+2}\right)\cdot\left(\frac{y+1}{x-2}\right)=1 \;\rightarrow\; \frac{y^2-1}{x^2-4}=1 \;\rightarrow\; y^2-1=x^2-4$$

$$x^2-y^2=3 \;\rightarrow\; \frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{3}=1$$



Es una hipérbola, en la que $a = b = \sqrt{3}$ y $c = \sqrt{6}$.

Los focos son $F(\sqrt{6}, 0)$ y $F(-\sqrt{6}, 0)$.

Las asíntotas son: $y = x$ e $y = -x$

La excentricidad es: $exc = \dfrac{c}{a} = \dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}} = \sqrt{2} \approx 1{,}41$

50 **Describe las siguientes cónicas. Obtén sus elementos y dibújalas.**

a) $\dfrac{(x-3)^2}{25}+\dfrac{(y+2)^2}{9}=1$ **b)** $\dfrac{(x-3)^2}{9}+\dfrac{(y+2)^2}{25}=1$

c) $\dfrac{(x-3)^2}{16}-\dfrac{(y+2)^2}{4}=1$ **d)** $\dfrac{(y+2)^2}{4}-\dfrac{(x-3)^2}{16}=1$

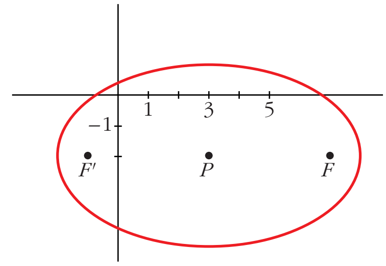
a) Es una elipse de centro $P(3, -2)$.

$a = 5, \quad b = 3,$

$c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{25 - 9} = \sqrt{16} = 4.$

Los focos son $F(7, -2)$ y $F'(-1, -2)$.

La excentricidad es: $exc = \dfrac{4}{5} = 0{,}8$

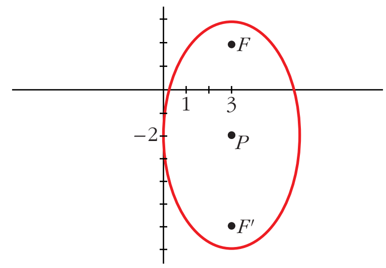


b) Es una elipse de centro $P(3, -2)$.

$a = 5, \quad b = 3, \quad c = 4.$

Los focos son $F(3, 2)$ y $F'(3, -6)$.

La excentricidad es: $exc = \dfrac{4}{5} = 0{,}8$



c) Es una hipérbola de centro $P(3, -2)$.

$a = 4, \quad b = 2, \quad c = \sqrt{16 + 4} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}.$

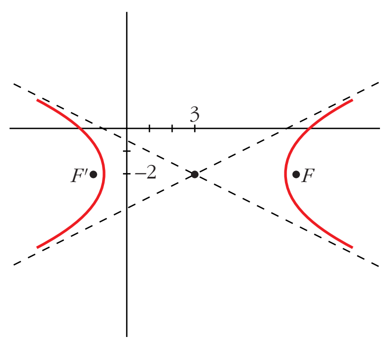
Los focos son:

$F(3 + 2\sqrt{5}, -2)$ y $F'(3 - 2\sqrt{5}, -2)$

La excentricidad es: $exc = \dfrac{2\sqrt{5}}{4} = \dfrac{\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}12$

Las asíntotas son:

$y + 2 = \dfrac{1}{2}(x - 3); \quad y + 2 = -\dfrac{1}{2}(x - 3)$



d) Es una hipérbola de centro $P(3, -2)$.

$b = 2, \quad a = 4, \quad c = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}.$

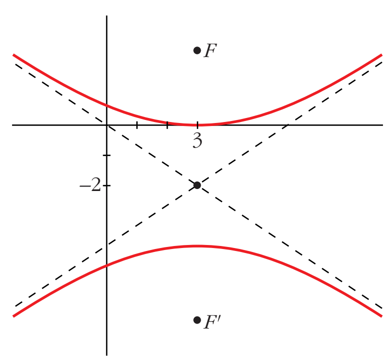
Los focos son:

$F(3, -2 + 2\sqrt{5})$ y $F'(3, -2 - 2\sqrt{5})$

La excentricidad es: $exc = \dfrac{2\sqrt{5}}{2} = \sqrt{5}$

Las asíntotas son:

$y + 2 = \dfrac{1}{2}(x - 3); \quad y + 2 = -\dfrac{1}{2}(x - 3)$

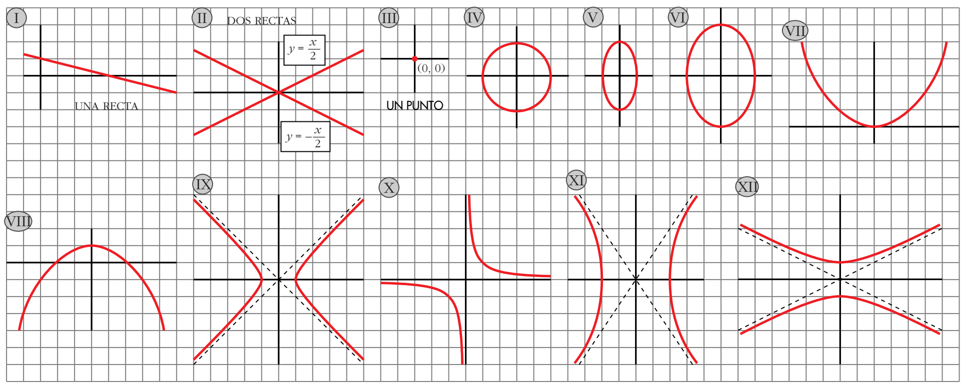


51 **Asocia cada una de las siguientes ecuaciones a una de las gráficas que se dan a continuación:**

a) $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = 1$ **b)** $x^2 + \dfrac{y^2}{4} = 1$ **c)** $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{4} = 1$ **d)** $\dfrac{x}{4} + y = 1$

e) $\dfrac{x^2}{4} + y = 1$ f) $\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{9} = 1$ g) $y^2 - \dfrac{x^2}{4} = 1$ h) $\dfrac{x^2}{4} + y^2 = 0$

i) $\dfrac{x^2}{4} - y^2 = 0$ j) $\dfrac{x^2}{4} - y = 0$ k) $x^2 - y^2 = 1$ l) $xy = 1$



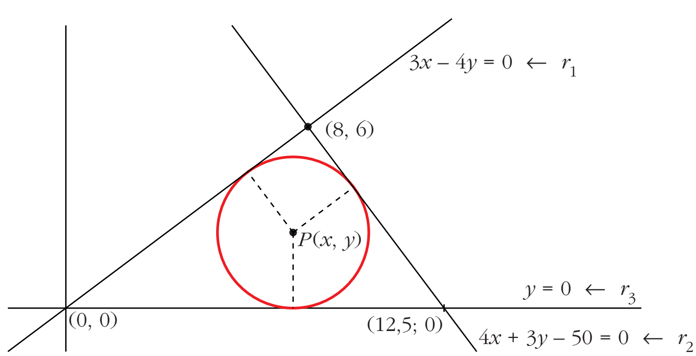
a) VI   b) V   c) IV   d) I   e) VIII   f) XI

g) XII   h) III   i) II   j) VII   k) IX   l) X

PARA PROFUNDIZAR

52 **Halla la ecuación de la circunferencia inscrita en el triángulo de lados:**

$$y = 0 \qquad 3x - 4y = 0 \qquad 4x + 3y - 50 = 0$$



Si $P(x, y)$ es el centro de la circunferencia, entonces:

- $dist\,(P, r_1) = dist\,(P, r_3) \;\rightarrow\; \dfrac{|3x - 4y|}{5} = |y| \;\rightarrow\; 5|y| = |3x - 4y|$

$5y = 3x - 4y \;\rightarrow\; 9y = 3x \;\rightarrow\; x = 3y$

$5y = -3x + 4y \;\rightarrow\; \cancel{y = -3x} \;\leftarrow$ No vale; la bisectriz que buscamos es la otra.

• $dist\,(P, r_2) = dist\,(P, r_3) \;\rightarrow\; \dfrac{|4x + 3y - 50|}{5} = |y| \;\rightarrow\; 5|y| = |4x + 3y - 50|$

$$\begin{cases} 5y = 4x + 3y - 50 \;\rightarrow\; \cancel{y = 2x - 25} \;\leftarrow\; \text{No vale; es la otra bisectriz.} \\ 5y = -4x - 3y + 50 \;\rightarrow\; 2x + 4y = 25 \end{cases}$$

El punto de corte de las dos bisectrices es el incentro, es decir, el centro de la circunferencia inscrita en el triángulo.

$$\left.\begin{array}{l} x = 3y \\ 2x + 4y = 25 \end{array}\right\} \begin{array}{l} 6y + 4y = 25 \;\rightarrow\; 10y = 25 \;\rightarrow\; y = \dfrac{25}{10} = \dfrac{5}{2} \\ x = 3y = \dfrac{15}{2} \end{array}$$

El centro es $P\left(\dfrac{15}{2}, \dfrac{5}{2}\right)$.

El radio es $dist\,(P, r_3) = y = \dfrac{5}{2} = \text{radio}$

La ecuación es: $\left(x - \dfrac{15}{2}\right)^2 + \left(y - \dfrac{5}{2}\right)^2 = \dfrac{25}{4}$; o bien:

$$x^2 - 15x + \frac{225}{4} + y^2 - 5y + \frac{25}{4} = \frac{25}{4}$$

$$x^2 + y^2 - 15x - 5y + \frac{225}{4} = 0 \;\rightarrow\; 4x^2 + 4y^2 - 60x - 20y + 225 = 0$$

53 Halla la ecuación de la circunferencia que pasa por (–3, 2) y (4, 1) y es tangente al eje *OX*.

Si $P(x, y)$ es el centro de la circunferencia, y llamamos a los puntos $A(-3, 2)$ y $B(4, 1)$; la distancia de P a los dos puntos y al eje OX ha de ser la misma. Además, esta distancia es igual al radio de la circunferencia.

$$\left.\begin{array}{l} dist\,[P, \text{eje } OX] = |y| \\ dist\,(P, A) = \sqrt{(x + 3)^2 + (y - 2)^2} \\ dist\,(P, B) = \sqrt{(x - 4)^2 + (y - 1)^2} \end{array}\right\} \text{han de ser iguales.}$$

$$\sqrt{(x + 3)^2 + (y - 2)^2} = \sqrt{(x - 4)^2 + (y - 1)^2}$$

$$\cancel{x^2} + 6x + 9 + \cancel{y^2} - 4y + 4 = \cancel{x^2} - 8x + 16 + \cancel{y^2} - 2y + 1$$

$$14x - 2y - 4 = 0 \;\rightarrow\; 7x - y - 2 = 0 \;\rightarrow\; y = 7x - 2$$

$$\sqrt{(x + 3)^2 + (y - 2)^2} = |y|$$

$$x^2 + 6x + 9 + \cancel{y^2} - 4y + 4 = \cancel{y^2}$$

$$x^2 + 6x - 4(7x - 2) + 13 = 0$$

$$x^2 + 6x - 28x + 8 + 13 = 0 \;\rightarrow\; x^2 - 22x + 21 = 0$$

$$x = \frac{22 \pm \sqrt{484 - 84}}{2} = \frac{22 \pm \sqrt{400}}{2} = \frac{22 \pm 20}{2} \begin{cases} x = 21 \;\to\; y = 145 \\ x = 1 \;\to\; y = 5 \end{cases}$$

Hay dos soluciones:

1ª) Centro (21, 145) y radio 145:

$(x - 21)^2 + (y - 145)^2 = 21\,025$; o bien: $x^2 + y^2 - 42x - 290y + 441 = 0$

2ª) Centro (1, 5) y radio 5:

$(x - 1)^2 + (y - 5)^2 = 25$; o bien: $x^2 + y^2 - 2x - 10y + 1 = 0$

54 **Determina la ecuación de la circunferencia de radio 10 que, en el punto (7, 2), es tangente a la recta $3x - 4y - 13 = 0$.**

El centro pertenece a la recta perpendicular a la dada que pasa por (7, 2).

— Una recta perpendicular a $3x - 4y - 13 = 0$ es de la forma $4x + 3y + k = 0$. Como (7, 2) pertenece a la recta: $28 + 6 + k = 0 \;\to\; k = -34$. El centro pertenece a la recta:

$$4x + 3y - 34 = 0 \;\to\; y = \frac{-4x + 34}{3}$$

— El centro es $C\left(x, \frac{-4x + 34}{3}\right)$. La distancia de C al punto (7, 2) es igual al radio, que es 10, es decir:

$$\sqrt{(x - 7)^2 + \left(\frac{-4x + 34}{3} - 2\right)^2} = 10$$

$$(x - 7)^2 + \left(\frac{-4x + 34}{3}\right)^2 = 100$$

$$x^2 - 14x + 49 + \frac{16x^2 - 224x + 784}{9} = 100$$

$$9x^2 - 126x + 441 + 16x^2 - 224x + 784 = 900$$

$$25x^2 - 350x + 325 = 0 \;\to\; x^2 - 14x + 13 = 0$$

$$x = \frac{14 \pm \sqrt{196 - 52}}{2} = \frac{14 \pm \sqrt{144}}{2} = \frac{14 \pm 12}{2} \begin{cases} x = 13 \;\to\; y = -6 \\ x = 1 \;\to\; y = 10 \end{cases}$$

Hay dos soluciones:

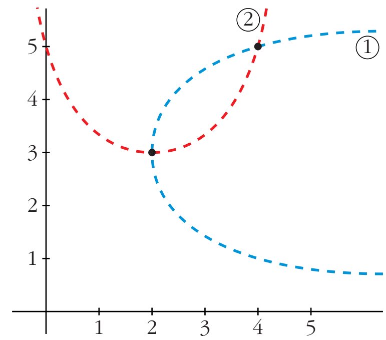
1ª) Centro (13, –6) y radio 10:

$(x - 13)^2 + (y + 6)^2 = 100 \;\to\; x^2 + y^2 - 26x + 12y + 105 = 0$

2ª) Centro (1, 10) y radio 10:

$(x - 1)^2 + (y - 10)^2 = 100 \;\to\; x^2 + y^2 - 2x - 20y + 1 = 0$

55 **Halla la ecuación de la parábola de vértice en el punto (2, 3) y que pasa por el punto (4, 5).**



Hay dos posibilidades:

1) $(y-3)^2 = 2p(x-2)$

Como pasa por (4, 5) $\to$ $4 = 4p$ $\to$ $p = 1$

$(y-3)^2 = 2(x-2)$

2) $(x-2)^2 = 2p'(y-3)$

Como pasa por (4, 5) $\to$ $4 = 4p'$ $\to$ $p' = 1$

$(x-2)^2 = 2(y-3)$

56 **Halla los vértices, los focos y la excentricidad de las cónicas siguientes:**

a) $\mathbf{9x^2 + 16y^2 - 36x + 96y + 36 = 0}$

b) $\mathbf{x^2 - 4y^2 - 2x - 3 = 0}$

c) $\mathbf{x^2 + 9y^2 - 36y + 27 = 0}$

a) $9x^2 + 16y^2 - 36x + 96y + 36 = 0$

$9x^2 - 36x + 36 + 16y^2 + 96y + 144 - 36 - 144 + 36 = 0$

$(3x-6)^2 + (4y+12)^2 - 144 = 0$

$[3(x-2)]^2 + [4(y+3)]^2 = 144$

$9(x-2)^2 + 16(y+3)^2 = 144$

$$\frac{(x-2)^2}{16} + \frac{(y+3)^2}{9} = 1$$

Es una **elipse** de **centro** (2, –3).

$a = 4, \quad b = 3, \quad c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{7}$

Vértices: (6, –3); (–2, –3); (2, 0) y (2, –6)

Focos: $(2 + \sqrt{7}, -3)$ y $(2 - \sqrt{7}, -3)$

Excentricidad: $exc = \dfrac{c}{a} = \dfrac{\sqrt{7}}{4} \approx 0,66$

b) $x^2 - 4y^2 - 2x - 3 = 0$

$x^2 - 2x + 1 - 4y^2 - 1 - 3 = 0$

$(x-1)^2 - 4y^2 = 4$

$$\frac{(x-1)^2}{4} - y^2 = 1$$

Es una **hipérbola** de **centro** (1, 0).

$a = 2, \quad b = 1, \quad c = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$

Vértices: (3, 0) y (–1, 0)

Focos: $(\sqrt{5} + 1, 0)$ y $(-\sqrt{5} + 1, 0)$

Excentricidad: $exc = \dfrac{\sqrt{5}}{2} \approx 1,12$

c) $x^2 + 9y^2 + 36x + 27 = 0$

$x^2 + 9(y^2 + 4y) + 27 = 0$

$x^2 + 9(y + 2)^2 - 36 + 27 = 0$

$x^2 + 9(y + 2)^2 = 9$

$$\frac{x^2}{9} + \frac{(y + 2)^2}{1} = 1$$

Es una **elipse** con $a = 3$, $b = 1$, $c = \sqrt{8}$.

Vértices: (–3, 0), (3, 0), (0, –1), (0, 1)

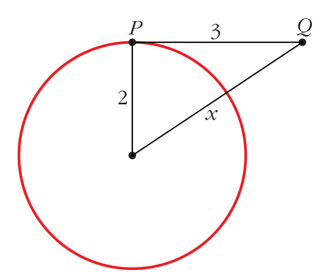
Focos: $(-\sqrt{10}, 0)$, $(\sqrt{10}, 0)$

Excentricidad: $exc = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{8}}{3} \approx 0{,}94$

57 **Un segmento PQ de 3 cm de longitud se mueve apoyándose tangencialmente sobre la circunferencia $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 9 = 0$.**

Si el extremo P es el punto de tangencia, ¿cuál es el lugar geométrico que describe el otro extremo Q?

La circunferencia dada tiene su centro en (2, –3) y su radio es $\sqrt{4 + 9 - 9} = 2$.



Como la tangente es perpendicular al radio, la distancia de Q al centro será siempre la misma:

$$x = \sqrt{9 + 4} = \sqrt{13}$$

Por tanto, Q describe una circunferencia con el mismo centro que la dada y radio $\sqrt{13}$.

Su ecuación será: $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 13$; o bien

$$x^2 + y^2 - 4x + 6y = 0$$

58 **Pon la ecuación del lugar geométrico de los puntos $P(x, y)$ que equidistan del punto $F(6, -1)$ y de la recta r: $3x - 4y - 2 = 0$.**

(Encontrarás una ecuación complicada. No te molestes en simplificarla). ¿De qué figura se trata? Para responder a esta pregunta, fíjate en cómo se ha definido y no en cuál es su ecuación.

Representa r y F. ¿Cómo habrá que situar unos nuevos ejes coordenados para que la ecuación de esa curva sea $y^2 = kx$?

¿Cuánto vale k?

Ecuación: $\sqrt{(x - 6)^2 + (y + 1)^2} = \frac{|3x - 4y - 2|}{5}$

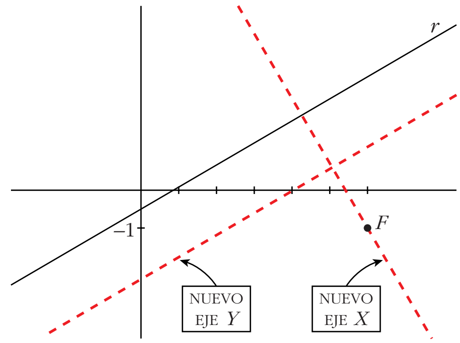
El lugar geométrico de los puntos que equidistan de un punto (foco) y de una recta (directriz) *es una parábola.*

La ecuación de la parábola respecto a los nuevos ejes es $y^2 = 2px$, donde p es la distancia del foco a la directriz:

$$dist\ (F, r) = \frac{|18 + 4 - 2|}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{20}{5} = 4$$

Si $p = 4$, entonces $k = 8$.

La ecuación es $y^2 = 8x$ respecto a los nuevos ejes.



59 **Demuestra que el lugar geométrico de los puntos P, cuyo cociente de distancias a un punto fijo F y a una recta fija d es igual a k, es una cónica de excentricidad k.**

Toma como foco $(c, 0)$, como recta $x = \frac{a^2}{c}$ y como constante $k = \frac{c}{a}$, y estudia los casos $k < 1$, $k > 1$ y $k = 1$. ¿Qué cónica se obtiene en cada caso?

$$\left.\begin{array}{l} F(c, 0) \\ d\text{: } x - \frac{a^2}{c} = 0 \\ P(x, y) \\ k = \frac{c}{a} \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} \frac{dist\ (P, F)}{dist\ (P, d)} = \frac{c}{a} \rightarrow dist\ (P, F) = \frac{c}{a} \cdot dist\ (P, d) \\ \sqrt{(x - c)^2 + y^2} = \frac{c}{a} \cdot \left| x - \frac{a^2}{c} \right| \end{array}$$

$$(x - c)^2 + y^2 = \frac{c^2}{a^2}\left(x - \frac{a^2}{c}\right)^2$$

$$x^2 - 2cx + c^2 + y^2 = \frac{c^2}{a^2}\left(x^2 - \frac{2a^2}{c}x + \frac{a^4}{c^2}\right)$$

$$x^2 - \cancel{2cx} + c^2 + y^2 = \frac{c^2}{a^2}x^2 - \cancel{2cx} + a^2$$

$$a^2x^2 + a^2c^2 + a^2y^2 = c^2x^2 + a^4$$

$$(a^2 - c^2)\, x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{(a^2 - c^2)} = 1$$

- Si $k < 1$, es decir, si $\frac{c}{a} < 1 \rightarrow c < a \rightarrow c^2 < a^2 \rightarrow a^2 - c^2 > 0$

  (c y a son positivos, pues k era un cociente de distancias).

  En este caso, la ecuación corresponde a una *elipse*.

  La excentricidad es $\frac{c}{a}$, es decir, k.

- Si $k > 1$, es decir, si $\dfrac{c}{a} > 1 \;\to\; c > a \;\to\; c^2 > a^2 \;\to\; a^2 - c^2 < 0$

  En este caso, la ecuación corresponde a una *hipérbola*.

  La excentricidad es $\dfrac{c}{a}$, es decir, k.

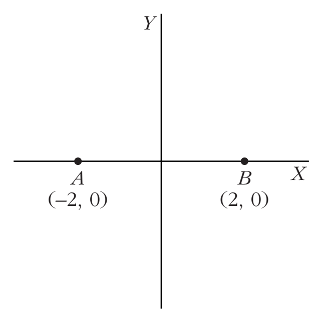
- Si $k = 1$, la distancia al punto es igual a la distancia a la recta, es decir, obtenemos una *parábola*.

60 **Dado un segmento AB de longitud 4, halla la ecuación del lugar geométrico de los puntos P del plano que verifican: $2\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2 = 18$**

☛ ***Toma como eje X la recta que contiene al segmento y como eje Y la mediatriz de AB.***

Tomamos como eje X la recta que contiene al segmento AB, y como eje Y, la mediatriz de AB.

Así, las coordenadas de A y B serían: $A(-2, 0)$ y $B(2, 0)$.



Si $P(x, y)$ es un punto del lugar geométrico, debe cumplir: $2\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2 = 18$; es decir:

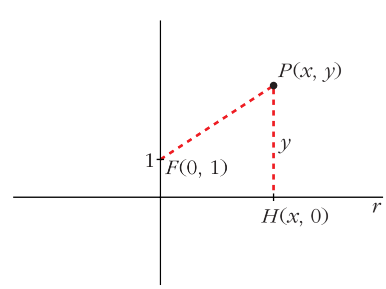
$$2[(x+2)^2 + y^2] + [(x-2)^2 + y^2] = 18$$
$$2[x^2 + 4x + 4 + y^2] + [x^2 - 4x + 4 + y^2] = 18$$
$$2x^2 + 8x + 8 + 2y^2 + x^2 - 4x + 4 + y^2 = 18$$
$$3x^2 + 3y^2 + 4x - 6 = 0$$

Esta ecuación corresponde a una circunferencia de centro $\left(-\dfrac{2}{3}, 0\right)$ y radio $\dfrac{\sqrt{22}}{3}$.

61 **Sea r una recta y F un punto cuya distancia a r es 1. Llamemos H a la proyección de un punto cualquiera, P, sobre r. Halla el L. G. de los puntos que verifican: $\overline{PH} + \overline{PF} = 3$**

☛ ***Toma los ejes de modo que las coordenadas de F sean (0, 1).***

Tomamos los ejes de forma que el eje X coincida con la recta r, y el eje Y pase por F. Así, la recta r es $y = 0$ y $F(0, 1)$:



Si $P(x, y)$, entonces $H(x, 0)$.

Así, $\overline{PH} + \overline{PF} = 3$ queda:

$$|y| + \sqrt{x^2 + (y-1)^2} = 3$$

Operamos: $\sqrt{x^2 + (y-1)^2} = 3 - |y|$

$$x^2 + (y-1)^2 = 9 + y^2 - 6|y|$$
$$x^2 + \cancel{y^2} - 2y + 1 = 9 + \cancel{y^2} - 6|y|$$
$$x^2 - 2y + 1 - 9 = -6|y|$$

$$6|y| = 2y + 8 - x^2 \begin{cases} 6y = 2y + 8 - x^2 \;\rightarrow\; 4y = 8 - x^2 \;\rightarrow\; y = 2 - \dfrac{x^2}{4} \\ -6y = 2y + 8 - x^2 \;\rightarrow\; -8y = 8 - x^2 \;\rightarrow\; y = \dfrac{x^2}{8} - 1 \end{cases}$$

Obtenemos dos *parábolas.*

62 **a) Halla el lugar geométrico de todos los puntos $P(x, y)$ del plano cuya suma de cuadrados de distancias a los puntos $A(-3, 0)$ y $B(3, 0)$ es 68. Puedes comprobar que se trata de una circunferencia de centro $O(0, 0)$. ¿Cuál es su radio?**

b) Generaliza: Halla el lugar geométrico de los puntos del plano cuya suma de cuadrados de distancias a $A(-a, 0)$ y $B(a, 0)$ es k (constante), y comprueba que se trata de una circunferencia de centro $O(0, 0)$. Di el valor de su radio en función de a y de k. ¿Qué relación deben cumplir a y k para que realmente sea una circunferencia?

a) $[dist(A, P)]^2 + [dist(B, P)]^2 = 68 \;\rightarrow\; (x + 3)^2 + y^2 + (x - 3)^2 + y^2 = 68 \;\rightarrow$

$\rightarrow\; x^2 + 6x + 9 + y^2 + x^2 - 6x + 9 + y^2 = 68 \;\rightarrow$

$\rightarrow\; 2x^2 + 2y^2 = 68 - 18 \;\rightarrow\; 2x^2 + 2y^2 = 50 \;\rightarrow$

$\rightarrow\; x^2 + y^2 = 25$, que es la ecuación de una circunferencia de centro $P(0, 0)$ y radio $r = 5$.

Comprobemos que, efectivamente, se trata de esa circunferencia.

Despejamos $y \;\rightarrow\; y = \sqrt{25 - x^2} \;\rightarrow\; P(x, y) = (x, \sqrt{25 - x^2})$

Debe verificarse que:

$$dist(O, P) = r$$

Es decir, que:

$$\sqrt{x^2 + y^2} = 5 \;\rightarrow\; \sqrt{x^2 + (25 - x^2)} = 5 \;\rightarrow\; \sqrt{25} = 5$$

Por tanto, como se cumple la condición, podemos asegurar que se trata de esa circunferencia.

b) $[dist(A, P)]^2 + [dist(B, P)]^2 = k \;\rightarrow\; (x + a)^2 + y^2 + (x - a)^2 + y^2 = k \;\rightarrow$

$\rightarrow\; x^2 + 2ax + a^2 + y^2 + x^2 - 2ax + a^2 + y^2 = k \;\rightarrow$

$\rightarrow\; 2x^2 + 2y^2 = k - 2a^2 \;\rightarrow\; x^2 + y^2 = \dfrac{k}{2} - a^2$

que es la ecuación de una circunferencia de centro (0, 0) y radio:

$$r = \sqrt{\frac{k}{2} - a^2}$$

Para que realmente sea una circunferencia, debe ocurrir que $r > 0$. Por tanto, debe verificarse:

$$\frac{k}{2} - a^2 > 0 \;\rightarrow\; k > 2a$$

PARA PENSAR UN POCO MÁS

63 Sean las rectas: r: $y = \frac{1}{2}x$, s: $y = -\frac{1}{2}x$. Tomamos un segmento de longitud 4, uno de cuyos extremos esté en r y el otro en s. Queremos hallar el lugar geométrico de los puntos medios de dichos segmentos. Para ello:

a) Expresa r y s en coordenadas paramétricas, usa un parámetro distinto para cada una.

b) Expresa un punto R de r y un punto S de s.

c) Obtén, mediante dos parámetros, la expresión del punto medio del segmento RS.

d) Expresa analíticamente $dist(R, S) = 4$.

e) Relacionando las expresiones obtenidas en c) y en d), obtendrás la ecuación implícita del L. G. buscado: $x^2 + 16y^2 = 16$

f) Identifica el tipo de curva de que se trata.

a) r: $\begin{cases} x = 2\lambda \\ y = \lambda \end{cases}$ $\quad$ s: $\begin{cases} x = -2\mu \\ y = \mu \end{cases}$

b) $R(2\lambda, \lambda) \in r$; $S(-2\mu, \mu) \in s$

c) Punto medio del segmento RS:

$$M = \left(\frac{2\lambda - 2\mu}{2}, \frac{\lambda + \mu}{2}\right) = \left(\lambda - \mu, \frac{\lambda + \mu}{2}\right), \text{ es decir:}$$

$$\begin{cases} x = \lambda - \mu \;\rightarrow\; \lambda = x + \mu \\ y = \dfrac{\lambda + \mu}{2} \;\rightarrow\; 2y = x + \mu + \mu \;\rightarrow\; 2y = x + 2\mu \;\rightarrow\; \mu = \dfrac{2y - x}{2} = y - \dfrac{x}{2} \end{cases}$$

$$\lambda = x + y - \frac{x}{2} = y + \frac{x}{2} \;\rightarrow\; \lambda = y + \frac{x}{2};\;\; \mu = y - \frac{x}{2}$$

d) $dist\ (R, S) = 4 \;\rightarrow\; |\overrightarrow{SR}| = 4$

$\overrightarrow{SR}(2\lambda + 2\mu, \mu - \lambda)$

$\sqrt{(2\lambda + 2\mu)^2 + (\mu - \lambda)^2} = 4$

$4\lambda^2 + 4\mu^2 + 8\lambda\mu + \mu^2 + \lambda^2 - 2\lambda\mu = 16$

$5\lambda^2 + 5\mu^2 + 6\lambda\mu = 16$

e) Utilizando lo obtenido en c) y d), tenemos que:

$$5\left(y + \frac{x}{2}\right)^2 + 5\left(y - \frac{x}{2}\right)^2 + 6\left(y + \frac{x}{2}\right)\left(y - \frac{x}{2}\right) = 16$$

$$5\left(y^2 + \frac{x^2}{4} + xy\right) + 5\left(y^2 + \frac{x^2}{4} - xy\right) + 6\left(y^2 - \frac{x^2}{4}\right) = 16$$

$$5y^2 + \frac{5x^2}{4} + \cancel{5xy} + 5y^2 + \frac{5x^2}{4} - \cancel{5xy} + 6y^2 - \frac{3x^2}{2} = 16$$

$$x^2 + 16y^2 = 16$$

f) $x^2 + 16y^2 = 16 \;\rightarrow\; \dfrac{x^2}{16} + y^2 = 1.$

Es una elipse, en la que $a = 4$, $b = 1$ y $c = \sqrt{15}$.

Focos: $(\sqrt{15}, 0)$ y $(-\sqrt{15}, 0)$. Excentricidad $= \dfrac{\sqrt{15}}{4} \approx 0{,}97$

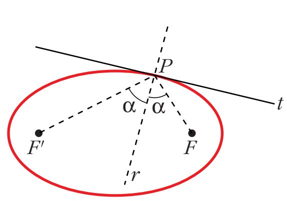
Página 240

RESUELVE TÚ

1. A veces, en el andén del metro se produce el siguiente fenómeno: una persona oye hablar a otra con absoluta nitidez, pero no la encuentra cerca. Mirando a su alrededor, llega a descubrir que la voz procede de alguien que está en el andén de enfrente y que no está hablando más fuerte que los demás. Explica a qué se debe este hecho, partiendo de que la bóveda del andén es semielíptica.

La persona que habla está situada sobre uno de los focos de la elipse y la persona que escucha está en el otro lado.

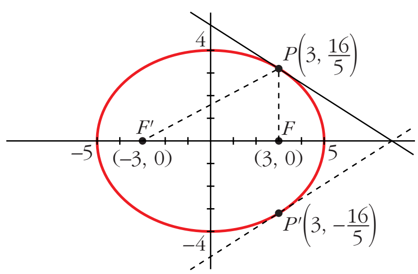
2. Lewis Caroll, el matemático autor de Alicia en el País de las Maravillas, se construyó una mesa de billar de forma elíptica. En ella, si una bola pasa por un foco, sin efecto, pasará necesariamente por el otro foco después de rebotar. Y así, sucesivamente, hasta que se pare. Explica por qué.



Llamamos P al punto en el que rebota la bola que ha pasado por F. Hemos visto que si t es tangente a la elipse en P, entonces t es la bisectriz exterior de los radios rectores PF y PF'. Llamamos r a la otra bisectriz. Tenemos que el ángulo formado por r y PF' coincide con el ángulo formado por r y PF'. Por tanto, la bola que pase por F, necesariamente pasará por el otro foco, F', al rebotar.

3. **Halla la ecuación de la tangente a la elipse $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ en los puntos de abscisa 3.**

☛ ***Utiliza el hecho de que la recta tangente es la bisectriz del ángulo que forman los radios vectores. De las dos bisectrices, tendrás que elegir la adecuada.***



Los focos de la elipse son $F(3, 0)$ y $F'(-3, 0)$.
Hallamos los puntos de abscisa $x = 3$:

$$\frac{9}{25} + \frac{y^2}{16} = 1 \quad \to \quad y = \pm\frac{16}{5}$$

Hay dos puntos: $P\left(3, \frac{16}{5}\right)$ y $P'\left(3, -\frac{16}{5}\right)$.

• Para $P\left(3, \frac{16}{5}\right)$: Obtenemos las bisectrices de los ángulos formados por las rectas que pasan por PF y por PF':

— recta, r_1, que pasa por $PF \;\to\; x = 3 \;\to\; x - 3 = 0$

— recta, r_2, que pasa por $PF' \;\to\; m = \frac{8}{15} \;\to\; y = \frac{8}{15}(x + 3) \;\to\; 8x - 15y + 24 = 0$

Bisectrices: $dist\big((x, y), r_1\big) = dist\big((x, y), r_2\big)$

$$|x - 3| = \frac{|8x - 15y + 24|}{17}$$

$$\begin{cases} 17x - 51 = 8x - 15y + 24 \;\to\; 3x + 5y - 25 = 0 \\ 17x - 51 = -8x + 15y - 24 \;\to\; 25x - 15y - 27 = 0 \end{cases}$$

La tangente que buscamos es la que tiene pendiente negativa; es decir: $3x + 5y - 25 = 0$

• Para $P'\left(3, -\frac{16}{5}\right)$, tendríamos:

— recta, r_3, que pasa por $P'F \;\to\; x = 3 \;\to\; x - 3 = 0$

— recta, r_4, que pasa por $P'F' \;\to\; m' = -\frac{8}{15} \;\to\; y = -\frac{8}{15}(x + 3) \;\to$

$\to\; 8x + 15y + 24 = 0$

Bisectrices: $dist\big((x, y), r_3\big) = dist\big((x, y), r_4\big)$

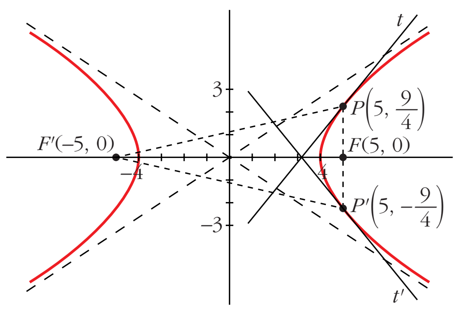
$$|x - 3| = \frac{|8x + 15y + 24|}{17}$$

$$\begin{cases} 17x - 51 = 8x + 15y + 24 \;\to\; 3x - 5y - 25 = 0 \\ 17x - 51 = -8x - 15y - 24 \;\to\; 25x + 15y - 27 = 0 \end{cases}$$

La tangente en este caso es la que tiene pendiente positiva; es decir: $3x - 5y - 25 = 0$

4. **Halla la tangente a la hipérbola $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ en el punto de abscisa 5.**

☛ ***Utiliza el hecho de que la tangente es la bisectriz de los radios vectores y elige la adecuada.***



Hallamos los puntos de abscisa $x = 5$:

$$\frac{25}{16} - \frac{y^2}{9} = 1 \;\rightarrow\; y^2 = \frac{81}{16} \;\rightarrow\; y = \pm\frac{9}{4}$$

Hay dos puntos: $P\left(5, \frac{9}{4}\right)$ y $P'\left(5, -\frac{9}{4}\right)$.

- Para $P\left(5, \frac{9}{4}\right)$

— recta, r_1, que pasa por PF $\rightarrow$ $x - 5 = 0$

— recta, r_2, que pasa por PF':

$$m = \frac{9/4}{10} = \frac{9}{40} \;\rightarrow\; y = \frac{9}{40}(x + 5) \;\rightarrow\; 9x - 40y + 45 = 0$$

Bisectrices: $dist\left((x, y), r_1\right) = dist\left((x, y), r_2\right)$

$$|x - 5| = \frac{|9x - 40y + 45|}{41}$$

$$41x - 205 = 9x - 40y + 45 \;\rightarrow\; 16x + 20y - 125 = 0$$
$$41x - 205 = -9x + 40y - 45 \;\rightarrow\; 5x - 4y - 16 = 0$$

La recta que buscamos tiene pendiente positiva; por tanto, es $5x - 4y - 16 = 0$.

- Para $P'\left(5, \frac{-9}{4}\right)$

— recta, r_3, que pasa por $P'F$ $\rightarrow$ $x - 5 = 0$

— recta, r_4, que pasa por $P'F'$:

$$m' = \frac{-9/4}{10} = \frac{-9}{40} \;\rightarrow\; y = \frac{-9}{40}(x + 5) \;\rightarrow\; 9x + 40y + 45 = 0$$

Bisectrices: $dist\left((x, y), r_3\right) = dist\left((x, y), r_4\right)$

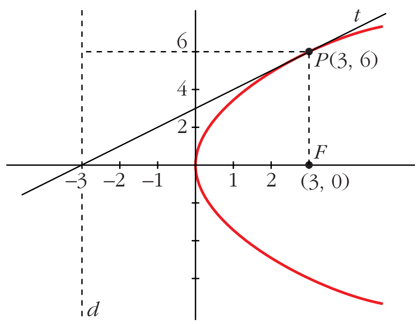
$$|x - 5| = \frac{|9x + 40y + 45|}{41}$$

$$41x - 205 = 9x + 40y + 45 \;\rightarrow\; 16x - 20y - 125 = 0$$
$$41x - 205 = -9x - 40y - 45 \;\rightarrow\; 5x + 4y - 16 = 0$$

La recta que buscamos tiene pendiente negativa; por tanto, es $5x + 4y - 16 = 0$.

5. **Halla la tangente a la parábola $y^2 = 12x$ en el punto de $P(3, 6)$.**

☛ ***Utiliza el hecho de que la tangente es la bisectriz del ángulo formado por el radio vector PF y la recta perpendicular por P a la directriz.***



- Hallamos el foco y la directriz de la parábola:

  $F(3, 0)$; d: $x = -3$

  — recta, r_1, que pasa por P y por F:

  $x = 3 \;\rightarrow\; x - 3 = 0$

  — recta, r_2, que pasa por P y es perpendicular a d:

  $y = 6 \;\rightarrow\; y - 6 = 0$

Bisectriz del ángulo formado por r_1 y r_2: $dist\big((x, y), r_1\big) = dist\big((x, y), r_2\big)$

$$|x - 3| = |y - 6| \begin{cases} x - 3 = y - 6 \;\rightarrow\; x - y + 3 = 0 \\ x - 3 = -y + 6 \;\rightarrow\; x + y - 9 = 0 \end{cases}$$

La tangente que buscamos es la que tiene pendiente positiva, es decir, $x - y + 3 = 0$.