9 LUGARES GEOMÉTRICOS. CÓNICAS

Página 213

REFLEXIONA Y RESUELVE

Cónicas abiertas: parábolas e hipérbolas

■ **Completa la siguiente tabla, en la que α es el ángulo que forman las generatrices con el eje, e, de la cónica y β el ángulo del plano π con e.**

	$\beta = 90°$	$\beta > \alpha$	$\beta = \alpha$	$\beta < \alpha$
π PASA POR EL VÉRTICE	**punto**		**recta**	
π NO PASA POR EL VÉRTICE	**circunferencia**			

	$\beta = 90°$	$\beta > \alpha$	$\beta = \alpha$	$\beta < \alpha$
π PASA POR EL VÉRTICE	punto	punto	recta	V dos rectas que se cortan en V
π NO PASA POR EL VÉRTICE	circunferencia	elipse	parábola	hipérbola

Página 215

1. **Halla las ecuaciones de los siguientes lugares geométricos:**

a) **Mediatriz del segmento de extremos $A(-5, -3)$, $B(7, 1)$. Comprueba que es una recta perpendicular al segmento en su punto medio.**

b) **Circunferencia de centro $O(-3, 4)$ y radio 5. Comprueba que pasa por el origen de coordenadas.**

c) **Bisectrices de los ángulos formados por las rectas:**

$$r_1: 5x + y + 3 = 0 \qquad r_2: x - 2y + 16 = 0$$

Comprueba que las bisectrices son dos rectas perpendiculares que se cortan en el mismo punto que r_1 y r_2.

a) Los puntos $X(x, y)$ deben cumplir $dist(X, A) = dist(X, B)$:

$$\sqrt{(x+5)^2+(y+3)^2} = \sqrt{(x-7)^2+(y-1)^2}$$

Elevamos al cuadrado y desarrollamos:

$$x^2 + 10x + 25 + y^2 + 6y + 9 = x^2 - 14x + 49 + y^2 - 2y + 1$$

$$10x + 14x + 6y + 2y + 34 - 50 = 0 \rightarrow 24x + 8y - 16 = 0$$

$$3x + y - 2 = 0 \rightarrow y = -3x + 2$$

- El punto medio de AB es $M(1, -1)$ que, efectivamente, está en la recta (pues verifica la ecuación).

- La pendiente de la recta es $m_r = -3$, y la del segmento es:

$$m_{AB} = \frac{1-(-3)}{7-(-5)} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

Cumplen que $m_r \cdot m_{AB} = (-3)\left(\frac{1}{3}\right) = -1 \rightarrow AB \perp r$

b) Los puntos $X(x, y)$ son tales que:

$$dist(X, O) = 5 \rightarrow \sqrt{(x+3)^2+(y-4)^2} = 5 \rightarrow x^2 + 6x + 9 + y^2 - 8y + 16 = 25 \rightarrow$$

$$\rightarrow x^2 + y^2 + 3x - 8y + 25 = 25 \rightarrow x^2 + y^2 + 3x - 8y = 0$$

c) Son los puntos $X(x, y)$:

$$dist(X, r_1) = dist(X, r_2) \rightarrow \frac{|5x+y+3|}{\sqrt{26}} = \frac{|x-2y+16|}{\sqrt{5}}$$

Se dan dos casos: $\sqrt{5}\,(5x + y + 3) = \sqrt{26}\,(x - 2y + 16)$

$\sqrt{5}\,(5x + y + 3) = -\sqrt{26}\,(x - 2y + 16)$

Son dos rectas: $b_1: \left(5\sqrt{5} - \sqrt{26}\right)x + \left(\sqrt{5} + 2\sqrt{26}\right)y + 3\sqrt{5} - 16\sqrt{26} = 0$

$b_2: \left(5\sqrt{5} + \sqrt{26}\right)x + \left(\sqrt{5} - 2\sqrt{26}\right)y + 3\sqrt{5} + 16\sqrt{26} = 0$

- Sus pendientes son: $\left.\begin{array}{l} m_1 = \dfrac{-\left(5\sqrt{5}-\sqrt{26}\right)}{\sqrt{5}+2\sqrt{26}} \\ m_2 = \dfrac{-\left(5\sqrt{5}+\sqrt{26}\right)}{\sqrt{5}-2\sqrt{26}} \end{array}\right\} \rightarrow$

$$\rightarrow m_1 \cdot m_2 = \frac{25 \cdot 5 - 26}{5 - 4 \cdot 26} = \frac{99}{-99} = -1 \rightarrow b_1 \perp b_2$$

- Calculamos el punto de corte de las rectas iniciales y comprobamos que está también en ambas bisectrices:

$$\left.\begin{array}{l} r_1: 5x + y + 3 = 0 \rightarrow y = -5x - 3 \\ r_2: x - 2y + 16 = 0 \end{array}\right\} \rightarrow x - 2(-5x - 3) + 16 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow x + 10x + 6 + 16 = 0 \rightarrow 11x = -22 \rightarrow x = -2$$

Luego: $y = -5(-2) - 3 = 7$

El punto de corte es (–2, 7), que se puede comprobar fácilmente que está en b_1 y b_2 sustituyendo en sus ecuaciones respectivas:

b_1: $\left(5\sqrt{5} - \sqrt{26}\right) \cdot (-2) + \left(\sqrt{5} + 2\sqrt{26}\right) \cdot 7 + 3\sqrt{5} - 16\sqrt{26} =$

$= -10\sqrt{5} + 2\sqrt{26} + 7\sqrt{5} + 14\sqrt{26} + 3\sqrt{5} - 16\sqrt{26} = 0$

b_2: $\left(5\sqrt{5} + \sqrt{26}\right) \cdot (-2) + \left(\sqrt{5} - 2\sqrt{26}\right) \cdot 7 + 3\sqrt{5} + 16\sqrt{26} =$

$= -10\sqrt{5} - 2\sqrt{26} + 7\sqrt{5} - 14\sqrt{26} + 3\sqrt{5} + 16\sqrt{26} = 0$

- Por tanto, b_1 y b_2 son dos rectas perpendiculares que se cortan en el mismo punto que r_1 y r_2.

Página 217

1. Halla la ecuación de la circunferencia de centro (–5, 12) y radio 13. Comprueba que pasa por el punto (0, 0).

$$(x + 5)^2 + (y - 12)^2 = 169 \quad \rightarrow \quad x^2 + y^2 + 10x - 24y = 0$$

Si sustituimos $x = 0$, $y = 0$ en la ecuación, esta se verifica. Por tanto, la circunferencia pasa por (0, 0).

2. ¿Cuál es el lugar geométrico de los puntos del plano cuyo cociente de distancias a los puntos $M(6, 0)$ y $N(-2, 0)$ es 3 (es decir, $\overline{PM}/\overline{PN} = 3$)?

Si $P(x, y)$ es un punto del lugar geométrico, entonces:

$$\frac{\overline{PM}}{\overline{PN}} = 3 \quad \rightarrow \quad \frac{\sqrt{(x-6)^2 + y^2}}{\sqrt{(x+2)^2 + y^2}} = 3$$

$$(x - 6)^2 + y^2 = 9\,[(x + 2)^2 + y^2]$$

$$x^2 - 12x + 36 + y^2 = 9\,[x^2 + 4x + 4 + y^2]$$

$$x^2 - 12x + 36 + y^2 = 9x^2 + 36x + 36 + 9y^2$$

$$8x^2 + 8y^2 + 48x = 0$$

$$x^2 + y^2 + 6x = 0$$

Es la circunferencia de centro (–3, 0) y radio 3.

Página 218

3. Estudia la posición relativa de la circunferencia C: $x^2 + y^2 - 6x - 4y - 12 = 0$ respecto a las rectas:

s_1: $3x - 4y - 26 = 0$ $\qquad$ s_2: $5x - 8y + 60 = 0$ $\qquad$ s_3: $3x - 4y - 1 = 0$ $\qquad$ s_4: $x = 5$

Halla los puntos de corte y de tangencia, si los hubiera.

• $\left.\begin{array}{l} C: x^2 + y^2 - 6x - 4y - 12 = 0 \\ s_1: 3x - 4y - 26 = 0 \end{array}\right\} \rightarrow 3x = 4y + 26 \rightarrow x = \dfrac{4}{3}y + \dfrac{26}{3}$

$$\left(\frac{4}{3}y + \frac{26}{3}\right)^2 + y^2 - 6\left(\frac{4}{3}y + \frac{26}{3}\right) - 4y - 12 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{16}{9}y^2 + \frac{676}{9} + \frac{208}{9}y + y^2 - 8y - 52 - 4y - 12 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow 16y^2 + 676 + 208y + 9y^2 - 72y - 468 - 36y - 108 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow 25y^2 + 100y + 100 = 0 \rightarrow y^2 + 4y + 4 = 0 \rightarrow (y + 2)^2 = 0 \rightarrow$$

$\rightarrow y = -2$ (solución única)

$$x = \frac{4}{3}(-2) + \frac{26}{3} \rightarrow x = 6$$

C y s_1 son tangentes en el punto $(6, -2)$.

• $\left.\begin{array}{l} C: x^2 + y^2 - 6x - 4y - 12 = 0 \\ s_2: 5x - 8y + 60 = 0 \end{array}\right\} \rightarrow 5x = 8y - 60 \rightarrow x = \dfrac{8}{5}y - 12$

$$\left(\frac{8}{5}y - 12\right)^2 + y^2 - 6\left(\frac{8}{5}y - 12\right) - 4y - 12 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{64}{25}y^2 + 144 - \frac{192}{5}y + y^2 - \frac{48}{5} + 72 - 4y - 12 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow 64y^2 + 3\,600 - 960y + 25y^2 - 240 + 1\,800 - 100y - 300 = 0 \rightarrow$$

$\rightarrow 89y^2 - 1\,060y + 4\,860 = 0 \rightarrow$ No tiene solución.

s_2 es exterior a la circunferencia C.

• $\left.\begin{array}{l} C: x^2 + y^2 - 6x - 4y - 12 = 0 \\ s_3: 3x - 4y - 1 = 0 \end{array}\right\} \rightarrow 3x = 4y + 1 \rightarrow x = \dfrac{4}{3}y + \dfrac{1}{3}$

$$\left(\frac{4}{3}y + \frac{1}{3}\right)^2 + y^2 - 6\left(\frac{4}{3}y + \frac{1}{3}\right) - 4y - 12 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{16}{9}y^2 + \frac{1}{9} + \frac{8}{9}y + y^2 - 8y - 2 - 4y - 12 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow 16y^2 + 1 + 8y + 9y^2 - 72y - 18 - 36y - 108 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow 25y^2 - 100y - 125 = 0 \rightarrow y^2 - 4y - 5 = 0 \left\langle \begin{array}{l} y_1 = 5 \rightarrow x_1 = 7 \\ y_2 = -1 \rightarrow x_2 = -1 \end{array}\right.$$

C y s_2 son secantes en los puntos $(7, 5)$ y $(-1, -1)$.

• $\left.\begin{array}{l} C: x^2 + y^2 - 6x - 4y - 12 = 0 \\ s_4: x = 5 \end{array}\right\} \rightarrow 25 + y^2 - 30 - 4y - 12 = 0 \rightarrow y^2 - 4y - 17 = 0$

$$y = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot (-17)}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{84}}{2} = \frac{4 \pm 2\sqrt{21}}{2} = 2 \pm \sqrt{21} \left\langle \begin{array}{l} y_1 = 2 + \sqrt{21} \\ y_2 = 2 - \sqrt{21} \end{array}\right.$$

C y s_4 se cortan en los puntos $(5, 2 + \sqrt{21})$ y $(5, 2 - \sqrt{21})$.

4. **¿Para qué valores de b la recta $y = x + b$ es tangente a la circunferencia $x^2 + y^2 = 9$?**

La recta será tangente a la circunferencia si la distancia del centro de la circunferencia a la recta es igual al radio de la circunferencia.

$C: x^2 + y^2 = 9 \rightarrow O = (0, 0),\ R = 3$

$r: y = x + b \rightarrow x - y + b = 0$

$$dist(O, r) = \frac{|0 - 0 + b|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{|b|}{\sqrt{2}} = 3 \rightarrow b = \pm 3\sqrt{2}$$

5. **Halla la posición relativa de $C: x^2 + y^2 - 6x + 8y = 0$ respecto a las rectas:**

$r_1: x + y = 10$ $\quad$ $r_2: 4x + 3y + 20 = 0$ $\quad$ $r_3: 3x - 4y = 0$ $\quad$ $r_4: y = -2$

$C: x^2 + y^2 - 6x + 8y = 0 \rightarrow O = (3, -4),\ r = 5$

- $dist(O, r_1) = \dfrac{|3 - 4 - 10|}{\sqrt{1 + 1}} = \dfrac{11}{\sqrt{2}} \approx 7{,}78 > 5 \rightarrow r_1$ es exterior a C.
- $dist(O, r_2) = \dfrac{|4 \cdot 3 + 3(-4) + 20|}{\sqrt{16 + 9}} = \dfrac{20}{5} = 4 < 5 \rightarrow r_2$ y C se cortan en dos puntos.
- $dist(O, r_3) = \dfrac{|3 \cdot 3 - 4(-4)|}{\sqrt{9 + 16}} = \dfrac{25}{5} = 5 \rightarrow r_3$ y C son tangentes.
- $dist(O, r_4) = \dfrac{|-4 + 2|}{\sqrt{0 + 1}} = \dfrac{2}{1} = 2 < 5 \rightarrow r_4$ y C se cortan en dos puntos.

Página 219

1. **Halla la potencia de $P(-3, 8)$ a las circunferencias:**

$C_1: x^2 + y^2 - 14x + 20 = 0$

$C_2: O(4, -3),\ r = 20$

Di si P es interior o exterior a C_1 y a C_2.

$C_1: x^2 + y^2 - 14x + 20 = 0 \rightarrow O_1 = (7, 0),\ r_1 = \sqrt{49 - 20} = \sqrt{29}$

$C_2: O(4, -3),\ r = 20$

$P(-3, 8)$

$\mathcal{P}(P \text{ a } C_1) = (7 + 3)^2 + (0 - 8)^2 - (\sqrt{29})^2 = 100 + 64 - 29 = 135 > 0 \rightarrow$

$\rightarrow P$ es exterior a C_1.

$\mathcal{P}(P \text{ a } C_2) = (4 + 3)^2 + (-3 - 8)^2 - (20)^2 = 49 + 121 - 400 = -230 < 0 \rightarrow$

$\rightarrow P$ es interior a C_2.

2. **Halla el eje radical de estas circunferencias:**

C_1: $x^2 + y^2 - 4x + 12y - 11 = 0$

C_2: $x^2 + y^2 - 6y = 0$

Comprueba que es una recta perpendicular a la línea de sus centros.

Calculamos las potencias de un punto genérico $P(x, y)$ a C_1 y a C_2:

$$\left.\begin{array}{l} \mathcal{P}(P \text{ a } C_1) = x^2 + y^2 - 4x + 12y - 11 = 0 \\ \mathcal{P}(P \text{ a } C_2) = x^2 + y^2 - 6y = 0 \end{array}\right\} \text{ Igualamos ambas expresiones:}$$

$$x^2 + y^2 - 4x + 12y - 11 = x^2 + y^2 - 6y \;\rightarrow\; -4x + 18y - 11 = 0$$

Ecuación del eje radical: $4x - 18y + 11 = 0 \;\rightarrow\; m = \dfrac{4}{18} = \dfrac{2}{9}$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Centro de } C_1 \;\rightarrow\; O_1 = (2, -6) \\ \text{Centro de } C_2 \;\rightarrow\; O_2 = (0, 3) \end{array}\right\} \overrightarrow{O_1O_2} = (-2, 9) \;\rightarrow$$

$\rightarrow$ La pendiente de la recta que une O_1 y O_2 es $m' = -\dfrac{9}{2}$.

Como $m \cdot m' = \left(\dfrac{2}{9}\right) \cdot \left(-\dfrac{9}{2}\right) = -1$, el eje radical y la recta que une O_1 y O_2 son perpendiculares.

Página 221

1. **Halla la ecuación de la elipse de focos $F_1(4, 0)$, $F_2(-4, 0)$ y cuya constante es 10. Una vez puesta la ecuación inicial, pasa una raíz al segundo miembro, eleva al cuadrado (¡atención con el doble producto!), simplifica, aísla la raíz, vuelve a elevar al cuadrado y simplifica hasta llegar a la ecuación $9x^2 + 25y^2 = 225$.**

Si $P(x, y)$ es un punto de la elipse, entonces:

$$dist(P, F_1) + dist(P, F_2) = 10$$

$$\sqrt{(x-4)^2 + y^2} + \sqrt{(x+4)^2 + y^2} = 10$$

$$\sqrt{(x-4)^2 + y^2} = 10 - \sqrt{(x+4)^2 + y^2}$$

Elevamos al cuadrado: $(x-4)^2 + y^2 = 100 + (x+4)^2 + y^2 - 20\sqrt{(x+4)^2 + y^2}$

Operamos: $x^2 - 8x + 16 + y^2 = 100 + x^2 + 8x + 16 + y^2 - 20\sqrt{(x+4)^2 + y^2}$

$$20\sqrt{(x+4)^2 + y^2} = 16x + 100$$

$$5\sqrt{(x+4)^2 + y^2} = 4x + 25$$

Elevamos al cuadrado: $25(x^2 + 8x + 16 + y^2) = 16x^2 + 200x + 625$

Simplificamos:

$$25x^2 + 200x + 400 + 25y^2 = 16x^2 + 200x + 625 \;\rightarrow\; 9x^2 + 25y^2 = 225$$

2. **Halla la ecuación de la hipérbola de focos $F_1(5, 0)$, $F_2(-5, 0)$ y cuya constante es 6. Simplifica como en el ejercicio anterior hasta llegar a la expresión $16x^2 - 9y^2 = 144$.**

Si $P(x, y)$ es un punto de la hipérbola, entonces:

$|dist(P, F_1) - dist(P, F_2)| = 6$

$dist(P, F_1) - dist(P, F_2) = \pm 6$

$\sqrt{(x-5)^2 + y^2} - \sqrt{(x+5)^2 + y^2} = \pm 6$

$\sqrt{(x+5)^2 + y^2} = \pm 6 + \sqrt{(x+5)^2 + y^2}$

Elevamos al cuadrado:

$x^2 - 10x + 25 + y^2 = 36 + x^2 + 10x + 25 + y^2 \pm 12\sqrt{(x+5)^2 + y^2}$

$\pm 12\sqrt{(x+5)^2 + y^2} = 20x + 36$

$\pm 3\sqrt{(x+5)^2 + y^2} = 5x + 9$

Elevamos al cuadrado: $9(x^2 + 10x + 25 + y^2) = 25x^2 + 90x + 81$

$9x^2 + 90x + 225 + 9y^2 = 25x^2 + 90x + 81$

$16x^2 - 9y^2 = 144$

3. **Halla la ecuación de la parábola de foco $F(-1, 0)$ y directriz r: $x = 1$. Simplifica hasta llegar a la expresión $y^2 = -4x$.**

Si $P(x, y)$ es un punto de la parábola, entonces:

$dist(P, F) = dist(P, r)$

$\sqrt{(x+1)^2 + y^2} = |x - 1|$

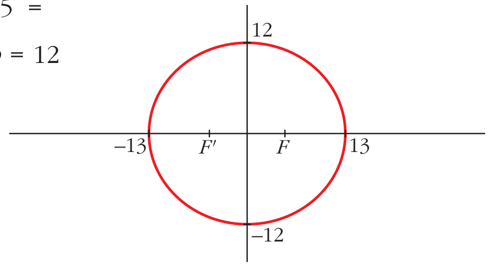
Elevamos al cuadrado: $x^2 + 2x + 1 + y^2 = x^2 - 2x + 1$

Simplificamos: $y^2 = -4x$

Página 223

1. **Una elipse tiene sus focos en los puntos $F(5, 0)$ y $F'(-5, 0)$ y su constante es $k = 26$. Halla sus elementos característicos y su ecuación reducida. Represéntala.**

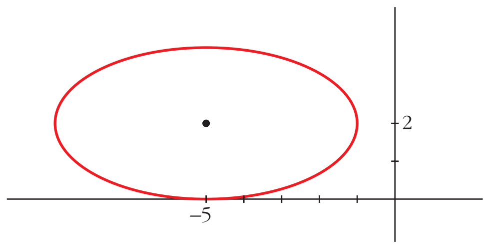
- Semieje mayor: $k = 26 \rightarrow 2a = 26 \rightarrow a = 13$
- Semidistancia focal: $\overline{FF'} = 10 \rightarrow 2c = 10 \rightarrow c = 5$
- Semieje menor: $b^2 = a^2 - c^2 = \sqrt{169 - 25} =$
  $= \sqrt{144} = 12 \rightarrow b = 12$
- Excentricidad: $\dfrac{c}{a} = \dfrac{5}{13} \approx 0{,}38 \rightarrow$
  $\rightarrow exc \approx 0{,}38$
- Ecuación reducida: $\dfrac{x^2}{169} + \dfrac{y^2}{144} = 1$



Página 224

2. **Representa y di su excentricidad:**

$$\frac{(x+5)^2}{16} + \frac{(y-2)^2}{4} = 1$$



$c = \sqrt{16-4} = \sqrt{12}$

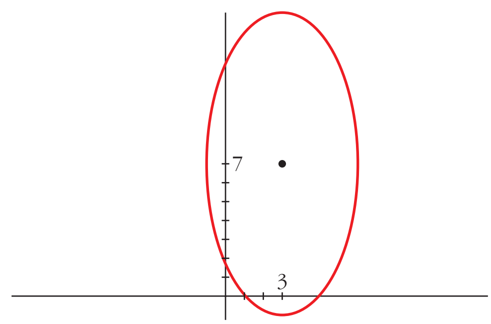
$exc = \dfrac{\sqrt{12}}{4} \approx 0{,}87$

3. **Representa y di su excentricidad:**

$$\frac{(x-3)^2}{16} + \frac{(y-7)^2}{64} = 1$$

$c = \sqrt{64-16} = \sqrt{48}$

$exc = \dfrac{\sqrt{48}}{8} \approx 0{,}87$

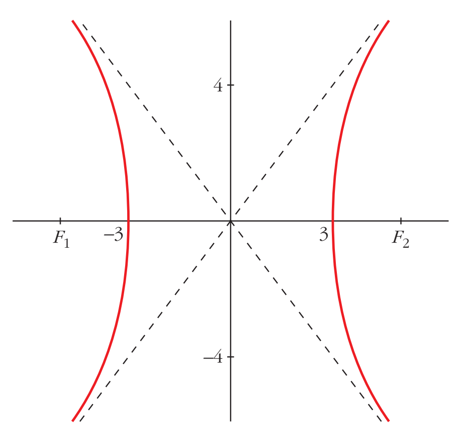


Página 226

1. **Una hipérbola tiene sus focos en los puntos $F_1(5, 0)$ y $F_2(-5, 0)$ y su constante es $k = 6$. Halla sus elementos característicos y su ecuación reducida. Represéntala.**

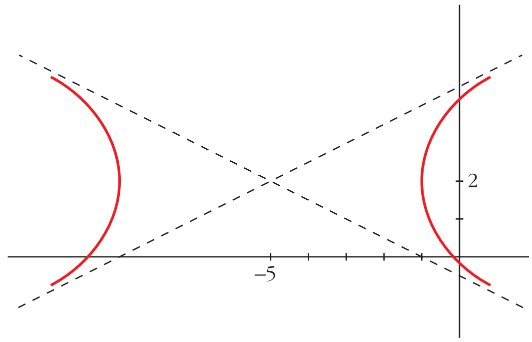
- Semieje: $k = 2a = 6 \;\rightarrow\; a = 3$
- Semidistancia focal: $\overline{F_1F_2} = 10 \;\rightarrow\; c = 5$
- Cálculo de b: $b^2 = c^2 - a^2 \;\rightarrow$

  $\rightarrow\; b = \sqrt{25-9} = \sqrt{16} = 4 \;\rightarrow\; b = 4$
- Excentricidad: $exc = \dfrac{c}{a} = \dfrac{5}{3} \approx 1{,}67$
- Asíntotas: $y = \dfrac{4}{3}x$; $y = -\dfrac{4}{3}x$
- Ecuación reducida: $\dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{16} = 1$

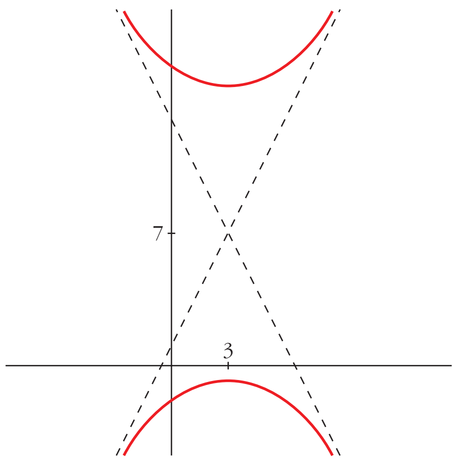


Página 227

2. **Representa:** $\dfrac{(x+5)^2}{16} - \dfrac{(y-2)^2}{4} = 1$



3. **Representa:** $\dfrac{(y-7)^2}{64} - \dfrac{(x-3)^2}{16} = 1$



Página 228

1. **Halla la ecuación reducida de la parábola de foco $F(1{,}5;\ 0)$ y directriz $x = -1{,}5$.**

Si $P(x, y)$ es un punto de la parábola: *dist* (P, F) = *dist* (P, d), donde d es la directriz y F el foco.

$$\sqrt{(x-1{,}5)^2 + y^2} = |x + 1{,}5|$$

$$x^2 - 3x + 2{,}25 + y^2 = x^2 + 3x + 2{,}25 \quad \rightarrow \quad y^2 = 6x$$

- De otra forma:

  Distancia del foco a la directriz: $p = 3$

  Ecuación reducida: $y^2 = 6x$

2. Halla la ecuación reducida de la parábola de foco $F(0, 2)$ y directriz $y = -2$.

Si $P(x, y)$ es un punto de la parábola: $dist(P, F) = dist(P, d)$, donde d es la directriz y F el foco.

$$\sqrt{x^2 + (y-2)^2} = |y + 2|$$

$$x^2 + y^2 - 4y + 4 = y^2 + 4y + 4 \quad \rightarrow \quad x^2 = 8y$$

- De otra forma:

  Distancia del foco a la directriz: $p = 4$

  Ecuación reducida: $x^2 = 8y$

Página 235

EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

PARA PRACTICAR

Lugares geométricos

1 **Halla, en cada caso, el lugar geométrico de los puntos que equidistan de A y B.**

a) $A(5, -3)$ $B(2, 0)$

b) $A(3, 5)$ $B(-4, 5)$

c) $A(2, 7)$ $B(2, -1)$

a) $\sqrt{(x-5)^2 + (y+3)^2} = \sqrt{(x-2)^2 + y^2} \rightarrow$

$\rightarrow x^2 - 10x + 25 + y^2 + 6y + 9 = x^2 - 4x + 4 + y^2 \rightarrow$

$\rightarrow -6x + 6y + 30 = 0 \rightarrow -x + y + 5 = 0$. Es la mediatriz de AB.

b) $\sqrt{(x-3)^2 + (y-5)^2} = \sqrt{(x+4)^2 + (y-5)^2} \rightarrow$

$\rightarrow x^2 - 6x + 9 = x^2 + 8x + 16 \rightarrow -14x - 7 = 0 \rightarrow 2x + 1 = 0$

c) $\sqrt{(x-2)^2 + (y-7)^2} = \sqrt{(x-2)^2 + (y+1)^2} \rightarrow$

$\rightarrow y^2 - 14y + 49 = y^2 + 2y + 1 \rightarrow -16y + 48 = 0 \rightarrow y - 3 = 0$

2 **Halla el lugar geométrico de los puntos $P(x, y)$ cuya diferencia de cuadrados de distancias a los puntos $A(0, 0)$ y $B(6, 3)$ es 15. ¿Qué figura obtienes?**

$[dist\,(P, A)]^2 - [dist\,(P, B)]^2 = 15$

$x^2 + y^2 - [(x-6)^2 + (y-3)^2] = 15$

Desarrollamos y simplificamos:

$$x^2 + y^2 - x^2 - 36 + 12x - y^2 - 9 + 6y = 15 \rightarrow$$

$$\rightarrow 12x + 6y - 60 = 0 \rightarrow r\colon 2x + y - 10 = 0$$

Veamos que la recta obtenida es perpendicular al segmento AB:

$\overrightarrow{AB} = (6, 3) \rightarrow$ pendiente: $m_{AB} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

La pendiente de r es $m_r = -2$.

$m_{AB} \cdot m_r = \frac{1}{2}(-2) = -1 \rightarrow \overrightarrow{AB} \perp r$

3 **Halla el lugar geométrico de los puntos cuya distancia a la recta $4x - 3y + 11 = 0$ es 6.**

☛ ***El valor absoluto dará lugar a dos rectas.***

$P(x, y)$ cumple que $dist(P, r) = 6 \rightarrow \dfrac{|4x - 3y + 11|}{\sqrt{16 + 9}} = 6 \rightarrow$

$$\rightarrow |4x - 3y + 11| = 30 \rightarrow \begin{cases} 4x - 3y + 11 = 30 \\ 4x - 3y + 11 = -30 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} r_1: 4x - 3y - 19 = 0 \\ r_2: 4x - 3y + 41 = 0 \end{cases}$$

Son dos rectas paralelas entre sí y paralelas, a su vez, a la recta dada.

4 **Halla el lugar geométrico de los puntos que equidistan de las rectas:**

$$\boldsymbol{r: 3x - 5y + 11 = 0 \qquad s: 3x - 5y + 3 = 0}$$

Interpreta las líneas obtenidas.

$P(x, y)$ donde $d(P, r) = d(P, s) \rightarrow \dfrac{|3x - 5y + 11|}{\sqrt{34}} = \dfrac{|3x - 5y + 3|}{\sqrt{34}} \rightarrow$

$$\rightarrow \begin{cases} 3x - 5y + 11 = 3x - 5y + 3 \rightarrow 11 = 3 \text{ ¡¡Imposible!!} \\ 3x - 5y + 11 = -3x + 5y - 3 \rightarrow 6x - 10y + 14 = 0 \rightarrow r: 3x - 5y + 7 = 0 \end{cases}$$

Es una recta paralela a las dos rectas dadas que, a su vez, son paralelas entre sí, como puede verse por sus coeficientes, pues:

$$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = 1 \neq \frac{C}{C'} = \frac{11}{3}$$

5 **Halla las ecuaciones de las bisectrices de los ángulos que forman las rectas *r* y *s*:**

$$\boldsymbol{r: 4x - 3y + 8 = 0 \qquad s: 12x + 5y - 7 = 0}$$

Son todos los puntos $P(x, y)$ tales que $d(P, r) = d(P, s)$:

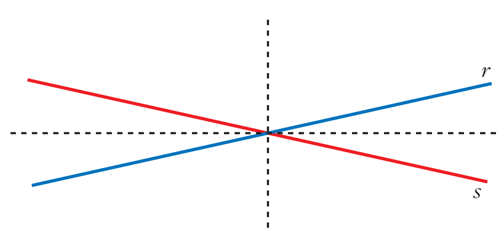
$$\frac{|4x - 3y + 8|}{\sqrt{25}} = \frac{|12x + 5y - 7|}{\sqrt{169}} \rightarrow \frac{|4x - 3y + 8|}{5} = \frac{|12x + 5y - 7|}{13} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} 13(4x - 3y + 8) = 5(12x + 5y - 7) \\ 13(4x - 3y + 8) = -5(12x + 5y - 7) \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} 52x - 39y + 104 = 60x + 25y - 35 \\ 52x - 39y + 104 = -60x - 25y + 35 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 8x + 64y - 139 = 0 \\ 112x - 14y + 69 = 0 \end{cases}$$

Luego hay dos soluciones, bisectrices de los ángulos cóncavo y convexo que forman las rectas r y s.

Ambas bisectrices se cortan en el punto de corte de las rectas r y s, y son perpendiculares.



Circunferencia

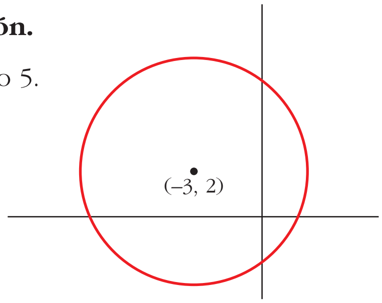
6 ¿Cuál es el lugar geométrico de los puntos que distan 5 unidades del punto $P(-3, 2)$?

Represéntalo gráficamente y halla su ecuación.

Es una circunferencia de centro $P(-3, 2)$ y radio 5.

Ecuación: $(x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 25$

$$x^2 + y^2 + 6x - 4y - 12 = 0$$



7 Escribe las ecuaciones de las circunferencias de centro C y radio r.

a) $C = (0, 0)$, $r = \sqrt{5}$

b) $C = (2, 0)$, $r = 5/2$

c) $C = (-2, -3/2)$, $r = 1/2$

a) $(x - 0)^2 + (y - 0)^2 = \left(\sqrt{5}\right)^2 \rightarrow x^2 + y^2 = 5$

b) $(x - 2)^2 + (y - 0)^2 = \left(\dfrac{5}{2}\right)^2 \rightarrow 4x^2 + 4y^2 - 16x - 9 = 0$

c) $(x + 2)^2 + \left(y + \dfrac{3}{2}\right)^2 = \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 \rightarrow x^2 + y^2 + 4x + 3y + 6 = 0$

8 Averigua cuáles de las siguientes expresiones corresponden a circunferencias y, en ellas, halla su centro y su radio:

a) $x^2 + y^2 - 8x + 2y + 10 = 0$

b) $x^2 - y^2 + 2x + 3y - 5 = 0$

c) $x^2 + y^2 + xy - x + 4y - 8 = 0$

d) $2x^2 + 2y^2 - 16x + 24 = 0$

e) $x^2 + y^2 + 6x + 10y = -30$

a) Los coeficientes de x^2 e y^2 son 1. No hay término en xy.

$$\left(\frac{A}{2}\right)^2 + \left(\frac{B}{2}\right)^2 - C = 16 + 1 - 10 = 7 > 0$$

Es una circunferencia de centro $(4, -1)$ y radio $\sqrt{7}$.

b) Los coeficientes de x^2 e y^2 no son iguales. No es una circunferencia.

c) Hay un término xy. No es una circunferencia.

d) Los coeficientes de x^2 e y^2 son iguales y no tiene término en xy. Dividimos entre 2 la igualdad: $x^2 + y^2 - 8x + 12 = 0$.

$$\left(\frac{A}{2}\right)^2 + \left(\frac{B}{2}\right)^2 - C = 16 + 0 - 12 = 4 > 0$$

Es una circunferencia de centro (4, 0) y radio $\sqrt{4} = 2$.

e) Los coeficientes de x^2 e y^2 son 1. No hay término en xy.

$$\left(\frac{A}{2}\right)^2 + \left(\frac{B}{2}\right)^2 - C = 9 + 25 - 30 = 4 > 0$$

Es una circunferencia de centro (–3, –5) y radio 2.

9 **Escribe las ecuaciones de las siguientes circunferencias:**

a) Centro en $C(-2, 1)$ y pasa por el punto $P(0, -4)$.

b) Uno de sus diámetros es el segmento $\overline{AB}$ donde $A(1, 2)$ y $B(3, 6)$.

c) Centro en $C(-1, -5)$ y es tangente a la recta $x - 4 = 0$.

d) Centro en $C(3, 5)$ y es tangente a la recta $4x + 3y - 2 = 0$.

a) Radio $= |\overrightarrow{CP}| = \sqrt{(0 + 2)^2 + (-4 - 1)^2} = \sqrt{29}$

Ecuación: $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 29$

b) Centro: Punto medio de $AB \rightarrow \left(\dfrac{1+3}{2}, \dfrac{2+6}{2}\right) = (2, 4)$

$$\text{Radio} = \frac{|\overrightarrow{AB}|}{2} = \frac{\sqrt{(3-1)^2 + (6-2)^2}}{2} = \frac{\sqrt{20}}{2} = \sqrt{5}$$

Ecuación: $(x - 2)^2 + (y - 4)^2 = 5$

c) Radio: Distancia de $C(-1, -5)$ a la recta $x - 4 = 0$.

$$R = \frac{|-1 - 4|}{\sqrt{1}} = 5$$

Ecuación: $(x + 1)^2 + (y + 5)^2 = 25$

d) Radio: $dist(C, r) = \dfrac{|4 \cdot 3 + 3 \cdot 5 - 2|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \dfrac{25}{5} = 5$

Ecuación: $(x - 3)^2 + (y - 5)^2 = 25$

Posiciones relativas de rectas y de circunferencias

10 **Estudia la posición de la recta $x + y = 0$ con relación a la circunferencia:**

$$\boldsymbol{x^2 + y^2 + 6x + 2y + 6 = 0}$$

El centro de la circunferencia es $C(-3, -1)$ y su radio es $r = \sqrt{9 + 1 - 6} = \sqrt{4} = 2$.

Hallamos la distancia de C a la recta s: $x + y = 0$:

$$d = dist\,(C, s) = \frac{|-3-1|}{\sqrt{2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2} \approx 2{,}83 > 2 = r$$

La recta es *exterior* a la circunferencia.

11 **Estudia la posición relativa de la circunferencia $x^2 + y^2 - 6x - 4y + 9 = 0$ respecto de cada una de las siguientes rectas:**

r_1: $2x - y - 2 = 0$

r_2: $x + y - 1 = 0$

r_3: $3x - 4y + 9 = 0$

- Hallamos el centro y el radio de la circunferencia:

  $x^2 - 6x + 9 + y^2 - 4y + 4 = -9 + 9 + 4 \;\rightarrow\; (x-3)^2 + (y-2)^2 = 4$

  $C(3, 2)$, $R = 2$

- Calculamos la distancia del centro a cada una de las rectas y la comparamos con el radio:

$$dist(C, r_1) = \frac{|2 \cdot 3 - 2 - 2|}{\sqrt{4+1}} = \frac{2}{\sqrt{5}} < 2 \;\rightarrow\; r_1 \text{ es secante.}$$

$$dist(C, r_2) = \frac{|3 + 2 - 1|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} > 2 \;\rightarrow\; r_2 \text{ es exterior.}$$

$$dist(C, r_3) = \frac{|3 \cdot 3 - 4 \cdot 2 + 9|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{10}{5} = 2 \;\rightarrow\; r_3 \text{ es tangente.}$$

12 **¿Para qué valor de b la recta $y = x + b$ es tangente a la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$?**

El centro de la circunferencia es $C(0, 0)$ y su radio es $r = 1$.

Hallamos la distancia de C a la recta s: $x - y + b = 0$: $d = dist\,(C, s) = \dfrac{|b|}{\sqrt{2}}$

Para que la recta sea tangente a la circunferencia, ha de ser $d = r$, es decir:

$$\frac{|b|}{\sqrt{2}} = 1 \;\rightarrow\; |b| = \sqrt{2} \left< \begin{array}{l} b = \sqrt{2} \\ b = -\sqrt{2} \end{array} \right.$$

13 **Calcula la distancia del centro de la circunferencia $x^2 + y^2 - 2y - 1 = 0$ a la recta r: $2x - y + 3 = 0$. ¿Cuál es la posición de r respecto a la circunferencia?**

El centro de la circunferencia es $C(0, 1)$ y su radio es $R = \sqrt{2}$. La distancia de C a r es:

$$dist\,(C, r) = \frac{|-1+3|}{\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}} \approx 0{,}89 < \sqrt{2} \approx 1{,}41$$

Luego la circunferencia y la recta son secantes.

Potencia de un punto a una circunferencia

14 **Calcula la potencia de los puntos $P(5, 2)$, $Q(2, 1)$ y $R(-1, 0)$ a la circunferencia: C: $x^2 + y^2 - 6x - 4y + 9 = 0$.**

Utilízalo para estudiar la posición relativa de P, Q y R respecto de C.

C: $x^2 + y^2 - 6x - 4y + 9 = 0 \rightarrow O(3, 2)$, $r = 2$

$P(5, 2) \rightarrow \mathcal{P} = (5-3)^2 + (2-2)^2 - 4 = 0 = 0$; por tanto, P pertenece a C.

$Q(2, 1) \rightarrow \mathcal{P} = (2-3)^2 + (1-2)^2 - 4 = -2 < 0$; por tanto, P es un punto interior a C.

$R(-1, 0) \rightarrow \mathcal{P} = (-1-3)^2 + (0-2)^2 - 4 = 16 > 0$; por tanto, P es un punto exterior a C.

Página 236

15 **Halla el eje radical de los siguientes pares de circunferencias:**

a) C_1: $(x+4)^2 + (y-1)^2 = 4$

C_2: $(x+4)^2 + (y+2)^2 = 1$

b) C_3: $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 9$

C_4: $(x-6)^2 + (y-3)^2 = 4$

c) C_5: $(x+4)^2 + (y+3)^2 = 1$

C_6: $(x-6)^2 + (y+1)^2 = 1$

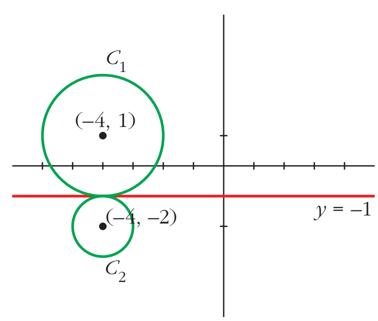
Represéntalo.

a) $\left.\begin{array}{l} C_1: (x+4)^2 + (y-1)^2 - 4 = 0 \\ C_2: (x+4)^2 + (y+2)^2 - 1 = 0 \end{array}\right\}$ Igualamos:

$(x+4)^2 + (y-1)^2 - 4 = (x+4)^2 + (y+2)^2 - 1$

$\rightarrow y^2 - 2y + 1 - 4 = y^2 + 4y + 4 - 1 \rightarrow$

$\rightarrow -6y - 6 = 0 \rightarrow y = -1$. Eje radical.

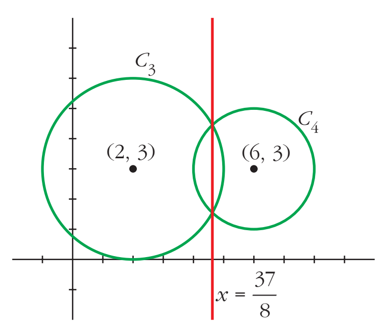


b) $\left.\begin{array}{l} C_3: (x-2)^2 + (y-3)^2 - 9 = 0 \\ C_4: (x-6)^2 + (y-3)^2 - 4 = 0 \end{array}\right\}$ Igualamos:

$(x-2)^2 + (y-3)^2 - 9 = (x-6)^2 + (y-3)^2 - 4$

$\rightarrow x^2 + 4 - 4x - 9 = x^2 + 36 - 12x - 4 \rightarrow$

$\rightarrow 8x - 37 = 0 \rightarrow x = \frac{37}{8}$. Eje radical.

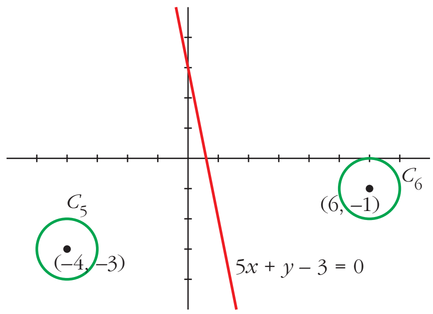


c) $\left.\begin{array}{l} C_5: (x+4)^2+(y+3)^2-1=0 \\ C_6: (x-6)^2+(y+1)^2-1=0 \end{array}\right\}$ Igualamos:

$(x+4)^2+(y+3)^2-1=(x-6)^2+(y+1)^2-1 \rightarrow$

$\rightarrow x^2+8x+16+y^2+6y+9-1=x^2-12x+36+y^2+2y+1-1 \rightarrow$

$\rightarrow 20x+4y-12=0 \rightarrow 5x+y-3=0$. Eje radical.



Elipse

16 **Halla los vértices, los focos, las excentricidades, y representa las elipses dadas por sus ecuaciones:**

a) $\dfrac{x^2}{100}+\dfrac{y^2}{36}=1$ **b)** $\dfrac{x^2}{64}+\dfrac{y^2}{100}=1$

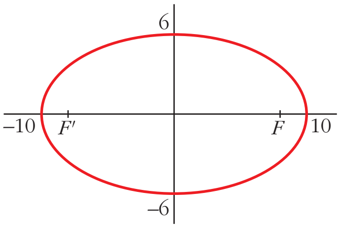
c) $9x^2+25y^2=25$ **d)** $9x^2+4y^2=1$

a) **Vértices:** (10, 0); (–10, 0); (0, 6) y (0, –6)

Focos: $c=\sqrt{100-36}=8$

$F(8, 0)$ y $F'(-8, 0)$

Excentricidad: $exc=\dfrac{8}{10}=0,8$

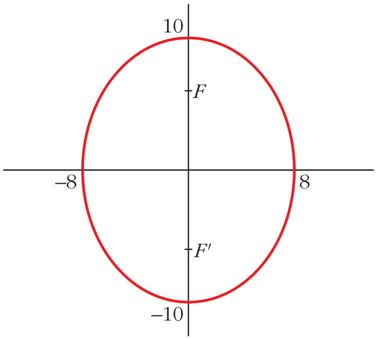


b) **Vértices:** (8, 0); (–8, 0); (0, 10) y (0, –10)

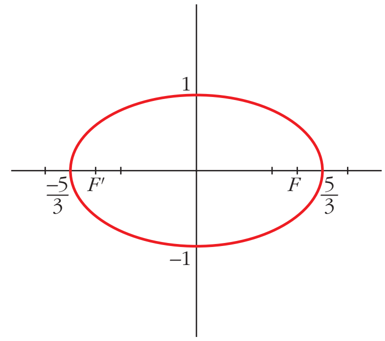
Focos: $c=\sqrt{100-64}=\sqrt{36}=6$

$F(0, 6)$ y $F'(0, -6)$

Excentricidad: $exc=\dfrac{6}{10}=0,6$



c) $9x^2 + 25y^2 = 25 \quad \rightarrow \quad \dfrac{x^2}{25/9} + \dfrac{y^2}{1} = 1$



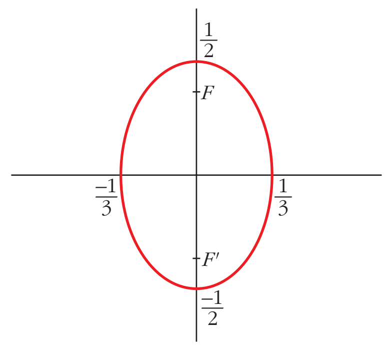
Vértices: $\left(\dfrac{5}{3}, 0\right); \left(-\dfrac{5}{3}, 0\right);$ (0, 1) y (0, –1)

Focos: $c = \sqrt{\dfrac{25}{9} - 1} = \sqrt{\dfrac{16}{9}} = \dfrac{4}{3}$

$F\left(\dfrac{4}{3}, 0\right)$ y $F'\left(-\dfrac{4}{3}, 0\right)$

Excentricidad: $exc = \dfrac{4/3}{5/3} = \dfrac{4}{5} = 0{,}8$

d) $9x^2 + 4y^2 = 1 \quad \rightarrow \quad \dfrac{x^2}{1/9} + \dfrac{y^2}{1/4} = 1$



Vértices: $\left(\dfrac{1}{3}, 0\right); \left(-\dfrac{1}{3}, 0\right);$

$\left(0, \dfrac{1}{2}\right)$ y $\left(0, -\dfrac{1}{2}\right)$

Focos: $c = \sqrt{\dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{9}} = \sqrt{\dfrac{5}{36}} = \dfrac{\sqrt{5}}{6}$

$F\left(0, \dfrac{\sqrt{5}}{6}\right)$ y $F'\left(0, -\dfrac{\sqrt{5}}{6}\right)$

17 **Halla las ecuaciones de las elipses determinadas de los modos siguientes:**

a) Focos (–2, 0), (2, 0). Longitud del eje mayor, 10.

b) *F*(–3, 0) y *F'*(3, 0) y cuya excentricidad es igual a 0,5.

c) Eje mayor sobre el eje *X*, igual a 10. Pasa por el punto (3, 3).

d) Eje mayor sobre el eje *Y* e igual a 2. Excentricidad, 1/2.

a) $c = 2; \; 2a = 10 \quad \rightarrow \quad a = 5; \; b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{25 - 4} = \sqrt{21}$

Ecuación: $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{21} = 1$

b) $c = 3; \; exc = \dfrac{c}{a} = 0{,}5 \quad \rightarrow \quad a = \dfrac{c}{0{,}5} = \dfrac{3}{0{,}5} = 6$

$b^2 = a^2 - c^2 = 36 - 9 = 27$

Ecuación: $\dfrac{x^2}{36} + \dfrac{y^2}{27} = 1$

c) $2a = 10 \;\rightarrow\; a = 5;\; \dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

Como pasa por $(3, 3) \;\rightarrow\; \dfrac{9}{25} + \dfrac{9}{b^2} = 1 \;\rightarrow\; 9b^2 + 225 = 25b^2 \;\rightarrow$

$\rightarrow\; 16b^2 = 225 \;\rightarrow\; b^2 = \dfrac{225}{16}$

Ecuación: $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{225/16} = 1$, o bien, $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{16y^2}{225} = 1$

d) $exc = \dfrac{c}{1} = \dfrac{1}{2} \;\rightarrow\; c = \dfrac{1}{2}$ $(a = 1,$ pues $2a = 2)$

$b^2 = a^2 - c^2 = 1 - \dfrac{1}{4} = \dfrac{3}{4}$

Ecuación: $\dfrac{x^2}{3/4} + \dfrac{y^2}{1} = 1$, o bien, $\dfrac{4x^2}{3} + y^2 = 1$

18 **Halla la ecuación del lugar geométrico de los puntos cuya suma de distancias a $P(-4, 0)$ y $Q(4, 0)$ es 10.**

Es una elipse de focos $P(-4, 0)$ y $Q(4, 0)$, y constante $k = 10$, es decir, $2a = 10$ y $c = 4$.

Así: $a = 5$; $b^2 = a^2 - c^2 = 25 - 16 = 9$

La ecuación será: $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{9} = 1$

19 **Escribe la ecuación de la elipse que tiene por focos los puntos $F(0, 1)$ y $F'(0, -1)$, y cuya constante es igual a 4.**

Si $P(x, y)$ es un punto de la elipse, entonces:

$$dist\,(P, F) + dist\,(P, F') = 2a, \text{ es decir:}$$

$\sqrt{x^2 + (y-1)^2} + \sqrt{x^2 + (y+1)^2} = 4 \;\rightarrow$

$\rightarrow\; x^2 + (y-1)^2 = 16 + x^2 + (y+1)^2 - 8\sqrt{x^2 + (y+1)^2} \;\rightarrow$

$\rightarrow\; x^2 + y^2 - 2y + 1 = 16 + x^2 + y^2 + 2y + 1 - 8\sqrt{x^2 + (y+1)^2} \;\rightarrow$

$\rightarrow\; -4y - 16 = -8\sqrt{x^2 + (y+1)^2} \;\rightarrow\; (4y + 16)^2 = 64[x^2 + (y+1)^2] \;\rightarrow$

$\rightarrow\; 16y^2 + 256 + 128y = 64x^2 + 64y^2 + 64 + 128y \;\rightarrow$

$\rightarrow\; 192 = 64x^2 + 48y^2 \;\rightarrow\; \dfrac{x^2}{3} + \dfrac{y^2}{4} = 1$

• De otra forma:

El centro de la elipse es el punto medio del segmento que une F con F', es decir: $(0, 0)$

Por otra parte:

$$2c = dist\,(F, F') = |\overrightarrow{F'F}| = |(0, 2)| = 2 \quad \rightarrow \quad c = 1$$

$$2a = 4 \quad \rightarrow \quad a = 2 \quad \rightarrow \quad a^2 = 4$$

$$b^2 = a^2 - c^2 = 4 - 1 = 3$$

Por tanto, la ecuación es: $\dfrac{x^2}{3} + \dfrac{y^2}{4} = 1$

20 **Halla la ecuación de la elipse que pasa por el punto (3, 1) y tiene sus focos en (4, 0) y (–4, 0).**

La ecuación es: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

• Como pasa por $(3, 1)$ $\rightarrow$ $\dfrac{9}{a^2} + \dfrac{1}{b^2} = 1$

• Como $a^2 = b^2 + c^2$ y sabemos que $c = 4$ $\rightarrow$ $a^2 = b^2 + 16$

Teniendo en cuenta las dos condiciones anteriores:

$$\frac{9}{b^2 + 16} + \frac{1}{b^2} = 1 \quad \rightarrow \quad 9b^2 + b^2 + 16 = b^4 + 16b^2 \quad \rightarrow \quad b^4 + 6b^2 - 16 = 0$$

$$b^2 = \frac{-6 \pm \sqrt{36 + 64}}{2} = \frac{-6 \pm \sqrt{100}}{2} = \frac{-6 \pm 10}{2} \left\langle \begin{array}{l} b^2 = 2 \\ b^2 = -8 \ \ \text{(No vale)} \end{array} \right.$$

Así: $a^2 = 2 + 16 = 18$

Por tanto, la ecuación de la elipse será: $\dfrac{x^2}{18} + \dfrac{y^2}{2} = 1$

Hipérbola

21 **Halla los vértices, los focos, las excentricidades y las asíntotas, y dibuja las hipérbolas dadas por las ecuaciones:**

a) $\dfrac{x^2}{100} - \dfrac{y^2}{36} = 1$

b) $\dfrac{9x^2}{16} - y^2 = 1$

c) $x^2 - 4y^2 = 1$

d) $x^2 - 4y^2 = 4$

e) $\dfrac{y^2}{4} - \dfrac{x^2}{36} = 1$

f) $y^2 - 16x^2 = 16$

g) $9x^2 - 4y^2 = 36$

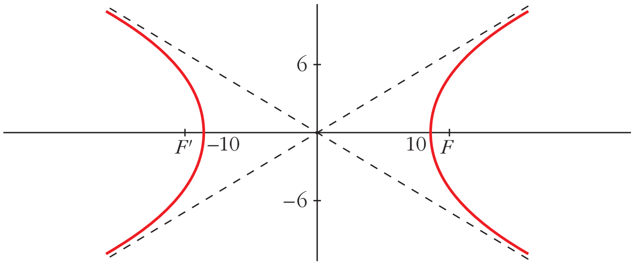
h) $4x^2 - y^2 + 16 = 0$

a) $a = 10, \;\; b = 6, \;\; c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{136} = 2\sqrt{34}, \;\; exc = \dfrac{2\sqrt{34}}{10} \approx 1{,}17$

Vértices: $(10, 0)$ y $(-10, 0)$

Focos: $F(2\sqrt{34}, 0)$ y $F'(-2\sqrt{34}, 0)$

Asíntotas: $y = \dfrac{3}{5}x; \;\; y = -\dfrac{3}{5}x$



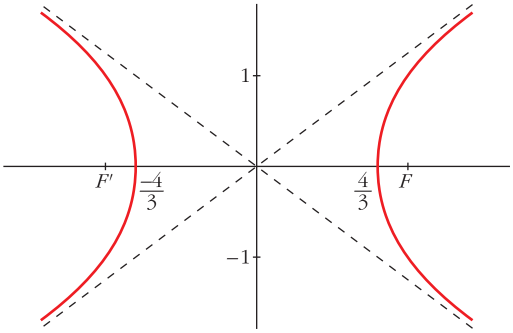
b) $\dfrac{9x^2}{16} - y^2 = 1 \;\;\rightarrow\;\; \dfrac{x^2}{16/9} - \dfrac{y^2}{1} = 1$

$a = \dfrac{4}{3}, \;\; b = 1, \;\; c = \sqrt{\dfrac{16}{9} + 1} = \dfrac{5}{3}, \;\; exc = \dfrac{5/3}{4/3} = \dfrac{5}{4} = 1{,}25$

Vértices: $\left(\dfrac{4}{3}, 0\right)$ y $\left(-\dfrac{4}{3}, 0\right)$

Focos: $F\left(\dfrac{5}{3}, 0\right)$ y $F'\left(-\dfrac{5}{3}, 0\right)$

Asíntotas: $y = \dfrac{3}{4}x; \;\; y = -\dfrac{3}{4}x$

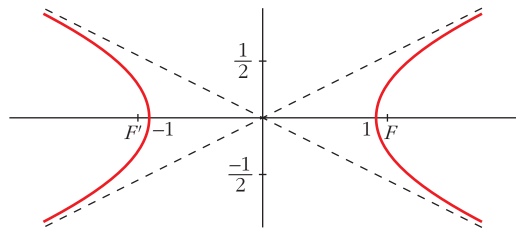


c) $x^2 - 4y^2 = 1 \;\;\rightarrow\;\; \dfrac{x^2}{1} - \dfrac{y^2}{1/4} = 1$

$a = 1, \;\; b = \dfrac{1}{2}, \;\; c = \sqrt{1 + \dfrac{1}{4}} = \dfrac{\sqrt{5}}{2}, \;\; exc = \dfrac{\sqrt{5}/2}{1} = \dfrac{\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}12$

Vértices: $(1, 0)$ y $(-1, 0)$. **Focos:** $F\left(\frac{\sqrt{5}}{2}, 0\right)$ y $F'\left(-\frac{\sqrt{5}}{2}, 0\right)$

Asíntotas: $y = \frac{1}{2}x$; $y = -\frac{1}{2}x$



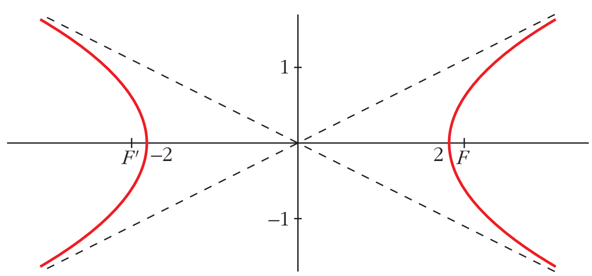
d) $x^2 - 4y^2 = 4 \;\rightarrow\; \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{1} = 1$

$a = 2$, $b = 1$, $c = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$, $exc = \frac{\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}12$

Vértices: $(2, 0)$ y $(-2, 0)$

Focos: $F(\sqrt{5}, 0)$ y $F'(-\sqrt{5}, 0)$

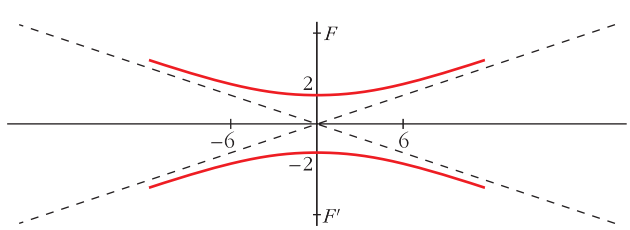
Asíntotas: $y = \frac{1}{2}x$; $y = -\frac{1}{2}x$



e) **Vértices:** $(0, 2)$ y $(0, -2)$

Focos: $F(0, \sqrt{40})$ y $F'(0, -\sqrt{40})$

$exc = \frac{\sqrt{40}}{2} \approx 3{,}16$. **Asíntotas:** $y = \frac{1}{3}x$; $y = -\frac{1}{3}x$



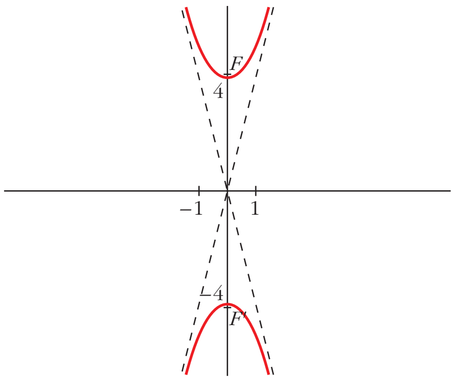
f) $y^2 - 16x^2 = 16 \;\rightarrow\; \dfrac{y^2}{16} - \dfrac{x^2}{1} = 1$

Vértices: $(0,\ 4)$ y $(0,\ -4)$

Focos: $F(0,\ \sqrt{17})$ y $F'(0,\ -\sqrt{17})$

$exc = \dfrac{\sqrt{17}}{4} \approx 1{,}03$

Asíntotas: $y = 4x$; $y = -4x$



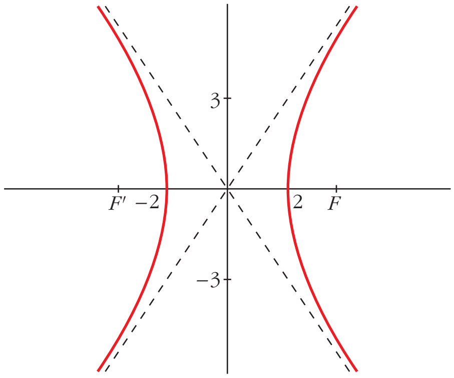
g) $9x^2 - 4y^2 = 36 \;\rightarrow\; \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{9} = 1$

Vértices: $(2,\ 0)$ y $(-2,\ 0)$

Focos: $F(\sqrt{13},\ 0)$ y $F'(-\sqrt{13},\ 0)$

$exc = \dfrac{\sqrt{13}}{2} \approx 1{,}80$

Asíntotas: $y = \dfrac{3}{2}x$; $y = -\dfrac{3}{2}x$



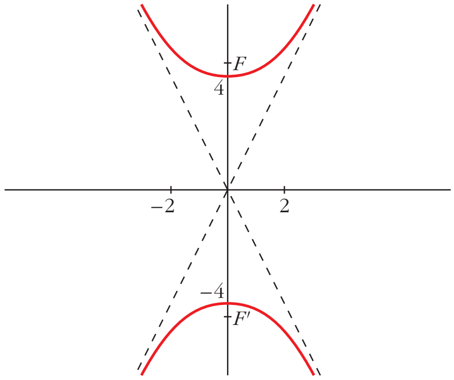
h) $4x^2 - y^2 + 16 = 0 \;\rightarrow\; y^2 - 4x^2 = 16 \;\rightarrow\; \dfrac{y^2}{16} - \dfrac{x^2}{4} = 1$

Vértices: $(0,\ 4)$ y $(0,\ -4)$

Focos: $F(\sqrt{20},\ 0)$ y $F'(-\sqrt{20},\ 0)$

$exc = \dfrac{\sqrt{20}}{4} \approx 1{,}12$

Asíntotas: $y = 2x$; $y = -2x$



22 **Halla las ecuaciones de las hipérbolas determinadas de los modos siguientes:**

a) Focos (–4, 0), (4, 0). Distancia entre vértices, 4.

b) Asíntotas, $y = \pm \dfrac{1}{5}x$. **Vértice, (2, 0).**

c) Asíntotas, $y = \pm 3x$. **Pasa por el punto (2, 1).**

d) Focos (–3, 0), (3, 0). Excentricidad, 3.

a) $c = 4;\ \ 2a = 4 \ \ \rightarrow \ \ a = 2;\ \ b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{16 - 4} = \sqrt{12}$

La ecuación es: $\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{12} = 1$

b) $a = 2;\ \ \dfrac{b}{a} = \dfrac{1}{5} \ \ \rightarrow \ \ \dfrac{b}{2} = \dfrac{1}{5} \ \ \rightarrow \ \ b = \dfrac{2}{5}$

Ecuación: $\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{4/25} = 1$, o bien, $\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{25y^2}{4} = 1$

c) $\dfrac{b}{a} = 3 \ \ \rightarrow \ \ b = 3a \ \ \rightarrow \ \ \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{9a^2} = 1$

Como pasa por (2, 1) $\rightarrow \ \ \dfrac{4}{a^2} - \dfrac{1}{9a^2} = 1 \ \ \rightarrow \ \ 36 - 1 = 9a^2$

$35 = 9a^2 \ \ \rightarrow \ \ a^2 = \dfrac{35}{9} \ \ \rightarrow \ \ b^2 = 9a^2 = 35$

Ecuación: $\dfrac{x^2}{35/9} - \dfrac{y^2}{35} = 1$, o bien, $\dfrac{9x^2}{35} - \dfrac{y^2}{35} = 1$

d) $c = 3,\ \ \dfrac{c}{a} = \dfrac{3}{a} = 3 \ \ \rightarrow \ \ a = 1$

$b^2 = c^2 - a^2 = 9 - 1 = 8$

Ecuación: $\dfrac{x^2}{1} - \dfrac{y^2}{8} = 1$

23 **Halla el lugar geométrico de los puntos cuya diferencia de distancias a** $F'(-4, 0)$ **y** $F(4, 0)$ **es 6.**

Es una hipérbola de focos F y F' y constante $2a = 6$.

Por tanto, $a = 3$, $c = 4$, $b^2 = c^2 - a^2 = 16 - 9 = 7$.

La ecuación es: $\dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{7} = 1$

24 **Halla la ecuación de la hipérbola que tiene por focos los puntos $F(-3, 0)$ y $F'(3, 0)$ y que pasa por el punto $P(8, 5\sqrt{3})$.**

- Hallamos la constante de la hipérbola: $|dist\,(P, F) - dist\,(P, F')| = 2a$

$$\left| |\overrightarrow{FP}| - |\overrightarrow{F'P}| \right| = 2a \quad \to \quad \left| |(11, 5\sqrt{3})| - |(5, 5\sqrt{3})| \right| = 2a$$

$$\sqrt{121 + 75} - \sqrt{25 + 75} = 2a \quad \to \quad 14 - 10 = 2a \quad \to \quad 4 = 2a \quad \to \quad a = 2$$

- Como $a = 2$ y $c = 3$, entonces $b^2 = c^2 - a^2 = 9 - 4 = 5$.

- La ecuación es: $\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{5} = 1$

Parábola

25 **Halla los vértices, los focos y las directrices de las siguientes parábolas, y represéntalas:**

a) $y^2 = 6x$ **b)** $y^2 = -6x$

c) $y = x^2$ **d)** $y = \dfrac{x^2}{4}$

e) $y^2 = 4(x - 1)$ **f)** $(y - 2)^2 = 8x$

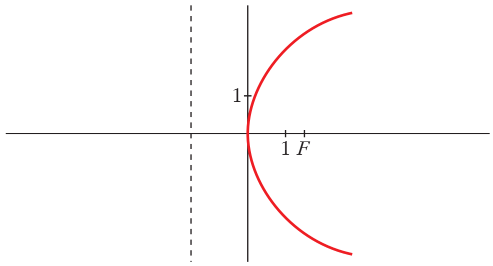
g) $x^2 = 4(y + 1)$ **h)** $(x - 2)^2 = -6y$

a) $\left.\begin{array}{l} y^2 = 2px \\ y^2 = 6x \end{array}\right\}$ $2p = 6 \quad \to \quad p = 3 \quad \to \quad \dfrac{p}{2} = \dfrac{3}{2}$

Vértice: $(0, 0)$

Foco: $\left(\dfrac{3}{2}, 0\right)$

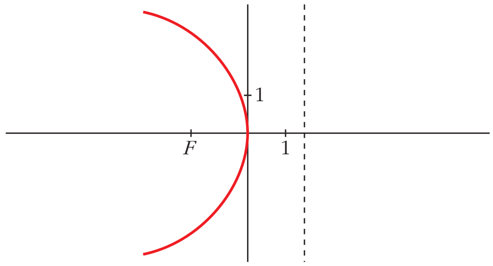
Directriz: $x = -\dfrac{3}{2}$



b) **Vértice:** $(0, 0)$

Foco: $\left(-\dfrac{3}{2}, 0\right)$

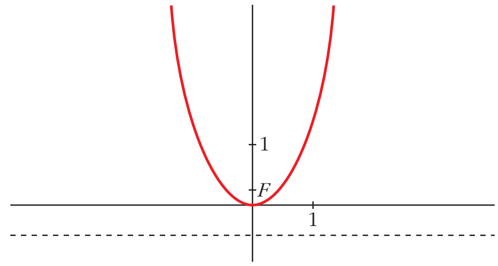
Directriz: $x = \dfrac{3}{2}$



c) **Vértice:** $(0, 0)$

Foco: $\left(0, \dfrac{1}{4}\right)$

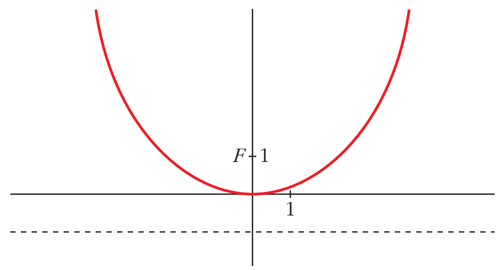
Directriz: $y = -\dfrac{1}{4}$



d) **Vértice:** $(0, 0)$

Foco: $(0, 1)$

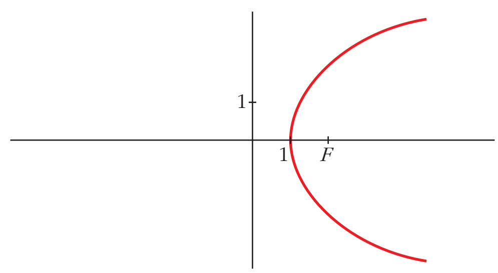
Directriz: $y = -1$



e) **Vértice:** $(1, 0)$

Foco: $(2, 0)$

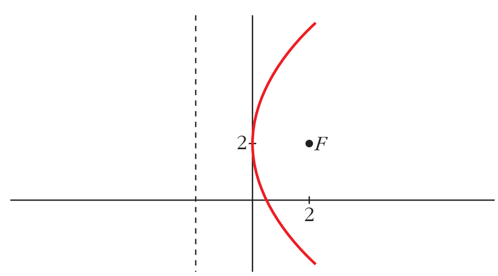
Directriz: $x = 0$



f) **Vértice:** $(0, 2)$

Foco: $(2, 2)$

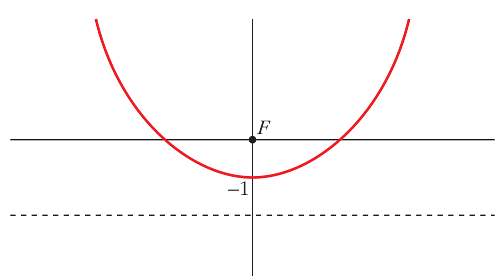
Directriz: $x = -2$



g) **Vértice:** $(0, -1)$

Foco: $(0, 0)$

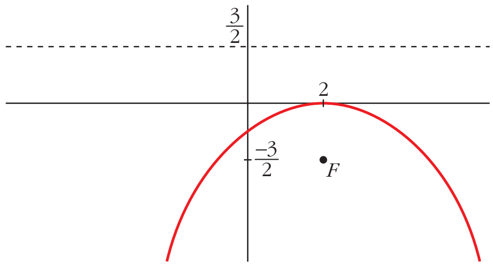
Directriz: $y = -2$



h) **Vértice:** (2, 0)

Foco: $\left(2, -\frac{3}{2}\right)$

Directriz: $y = \frac{3}{2}$



26 **Halla las ecuaciones de las parábolas determinadas de los siguientes modos:**

a) Directriz, $x = -5$. Foco, (5, 0).

b) Directriz, $y = 3$. Vértice, (0, 0).

c) Vértice (0, 0) y pasa por (2, 3). (2 soluciones).

a) $\frac{p}{2} = 5 \rightarrow p = 10 \rightarrow 2p = 20$. Ecuación: $y^2 = 20x$

b) El foco será $F(0, -3)$. Si $P(x, y)$ es un punto de la parábola y d: $y - 3 = 0$ es la directriz, entonces:

$$dist\,(P, F) = dist\,(P, d) \rightarrow \sqrt{x^2 + (y+3)^2} = |y - 3| \rightarrow$$
$$\rightarrow x^2 + y^2 + 6y + 9 = y^2 - 6y + 9 \rightarrow x^2 = -12y$$

c) Hay dos posibilidades:

I) *Eje horizontal*: $y^2 = 2px$. Como pasa por (2, 3), entonces:

$$9 = 4p \rightarrow p = \frac{9}{4} \rightarrow y^2 = \frac{9}{2}x$$

II) *Eje vertical*: $x^2 = 2py$. Como pasa por (2, 3), entonces:

$$4 = 6p \rightarrow p = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \rightarrow x^2 = \frac{4}{3}y$$

27 **Halla el lugar geométrico de los puntos que equidistan del punto (3, 0) y de la recta $y = -3$.**

Es una parábola cuyo foco es $F(3, 0)$ y cuya directriz es d: $y + 3 = 0$. Si $P(x, y)$ es un punto de la parábola, entonces:

$$dist\,(P, F) = dist\,(P, d) \rightarrow \sqrt{(x-3)^2 + y^2} = |y + 3| \rightarrow$$
$$\rightarrow x^2 - 6x + 9 + y^2 = y^2 + 6y + 9 \rightarrow y = \frac{x^2}{6} - x$$

O bien: $(x-3)^2 = 6\left(y + \frac{3}{2}\right)$

28 **Escribe la ecuación de la parábola de foco $F(2, 1)$ y directriz $y + 3 = 0$.**

Si $P(x, y)$ es un punto de la parábola, $F(2, 1)$ el foco, y d: $y + 3 = 0$ la directriz, entonces:

$$dist\ (P, F) = dist\ (P, d) \rightarrow \sqrt{(x-2)^2 + (y-1)^2} = |y + 3| \rightarrow$$
$$\rightarrow (x-2)^2 + (y-1)^2 = (y+3)^2 \rightarrow$$
$$\rightarrow (x-2)^2 + y^2 - 2y + 1 = y^2 + 6y + 9 \rightarrow$$
$$\rightarrow (x-2)^2 = 8y + 8 \rightarrow (x-2)^2 = 8(y+1)$$

Página 237

PARA RESOLVER

29 **Identifica las siguientes cónicas, calcula sus elementos característicos y dibújalas:**

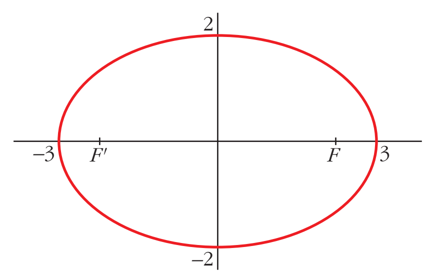
a) $4x^2 + 9y^2 = 36$ **b)** $16x^2 - 9y^2 = 144$ **c)** $9x^2 + 9y^2 = 25$

d) $x^2 - 4y^2 = 16$ **e)** $y^2 = 14x$ **f)** $25x^2 + 144y^2 = 900$

a) $4x^2 + 9y^2 = 36 \rightarrow \dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1$

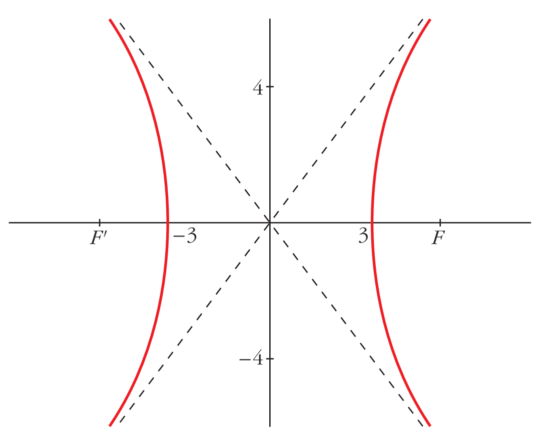
Es una elipse $\rightarrow a = 3,\ b = 2,\ c = \sqrt{5}$

$exc = \dfrac{\sqrt{5}}{3} \approx 0{,}75$



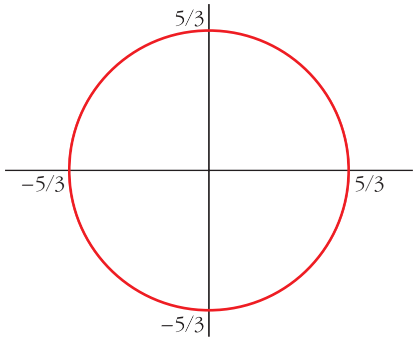
b) $16x^2 - 9y^2 = 144 \rightarrow \dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{16} = 1$

Es una hipérbola $\rightarrow \begin{cases} a = 3,\ b = 4,\ c = 5;\ exc = \dfrac{5}{3} \approx 1{,}67 \\ \text{Asíntotas: } y = \dfrac{4}{3}x;\ y = -\dfrac{4}{3}x \end{cases}$



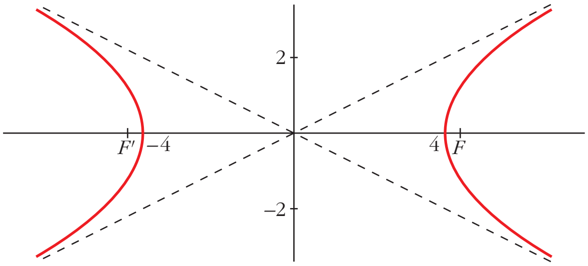
c) $9x^2 + 9y^2 = 25 \;\rightarrow\; x^2 + y^2 = \dfrac{25}{9}$

Es una circunferencia de centro (0, 0) y radio $\dfrac{5}{3}$.



d) $x^2 - 4y^2 = 16 \;\rightarrow\; \dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{4} = 1$

Es una hipérbola $\rightarrow \begin{cases} a = 4,\; b = 2,\; c = 2\sqrt{5};\; exc = \dfrac{2\sqrt{5}}{4} = \dfrac{\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}12 \\ \text{Asíntotas: } y = \dfrac{1}{2}x;\; y = -\dfrac{1}{2}x \end{cases}$

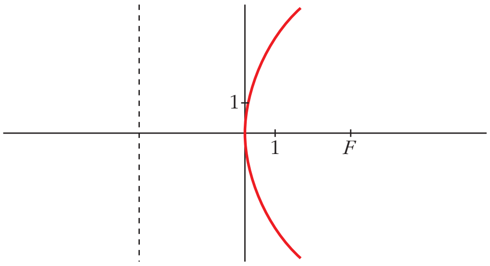


e) Es una parábola.

Vértice: (0, 0)

Foco: $\left(\dfrac{7}{2}, 0\right)$

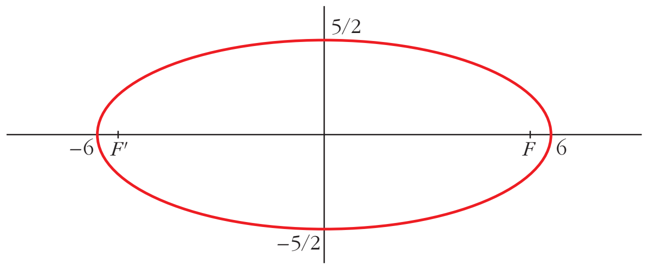
Directriz: $x = -\dfrac{7}{2}$



f) $25x^2 + 144y^2 = 900 \;\rightarrow\; \dfrac{x^2}{36} - \dfrac{y^2}{25/4} = 1$

Es una elipse $\rightarrow$ $a = 6,\; b = \dfrac{5}{2},\; c = \dfrac{\sqrt{119}}{12}$

$exc = \dfrac{\sqrt{119}}{12} \approx 0{,}91$



30 **Escribe la ecuación de una elipse con centro en el origen de coordenadas y focos en el eje de abscisas, sabiendo que pasa por el punto $P(8, -3)$ y que su eje mayor es igual al doble del menor.**

El eje mayor es igual al doble del menor, es decir: $a = 2b$. Además, pasa por el punto $P(8, -3)$. Luego:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \;\rightarrow\; \frac{64}{4b^2} + \frac{9}{b^2} = 1 \;\rightarrow\; \frac{16}{b^2} + \frac{9}{b^2} = 1 \;\rightarrow\; \frac{25}{b^2} = 1 \;\rightarrow$$

$$\rightarrow\; 25 = b^2;\; a^2 = 4b^2 = 100$$

La ecuación es: $\dfrac{x^2}{100} + \dfrac{y^2}{25} = 1$

31 **Halla la ecuación de la hipérbola que tiene el centro en el origen de coordenadas y los focos en el eje de abscisas, sabiendo que pasa por el punto $P(\sqrt{5/2}, 1)$ y que una de sus asíntotas es la recta $y = 2x$.**

La pendiente de la asíntota es $\dfrac{b}{a} = 2 \;\rightarrow\; b = 2a$

Luego $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{4a^2} = 1$ es la ecuación.

Como pasa por el punto $P(\sqrt{5/2}, 1)$, entonces:

$$\frac{5/2}{a^2} - \frac{1}{4a^2} = 1 \;\rightarrow\; 10 - 1 = 4a^2 \;\rightarrow\; 9 = 4a^2 \;\rightarrow\; a^2 = \frac{9}{4} \;\rightarrow\; b^2 = 4a^2 = 9$$

La ecuación será: $\dfrac{x^2}{9/4} - \dfrac{y^2}{9} = 1$, es decir: $\dfrac{4x^2}{9} - \dfrac{y^2}{9} = 1$

32 **Se llama hipérbola equilátera a aquella en que $a = b$. Halla la ecuación de la hipérbola equilátera cuyos focos son (5, 0) y (–5, 0).**

La ecuación será: $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{a^2} = 1$

Como $c^2 = a^2 + b^2$, y sabemos que $c = 5$ y que $a^2 = b^2$, entonces:

$$25 = 2a^2 \;\to\; a^2 = \frac{25}{2}$$

Por tanto, la ecuación es: $\dfrac{x^2}{25/2} - \dfrac{y^2}{25/2} = 1$, o bien, $x^2 - y^2 = \dfrac{25}{2}$

33 **Halla la ecuación de la hipérbola cuyas asíntotas son las rectas $y = \pm\frac{3}{5}x$ y los focos (2, 0) y (–2, 0).**

- Si los focos son (2, 0) y (–2, 0), entonces $c = 2$.
- Si las asíntotas son $y = \pm\dfrac{3}{5}x$, entonces: $\dfrac{b}{a} = \dfrac{3}{5}$
- Como $c^2 = a^2 + b^2$, tenemos que $a^2 + b^2 = 4$.
- Teniendo en cuenta los dos últimos resultados:

$$\left.\begin{array}{l} b = \dfrac{3}{5}a \\ a^2 + b^2 = 4 \end{array}\right\} \begin{array}{l} a^2 + \dfrac{9}{25}a^2 = 4 \;\to\; \dfrac{34a^2}{25} = 4 \;\to\; 34a^2 = 100 \\ a^2 = \dfrac{100}{34} = \dfrac{50}{17} \;\to\; b^2 = 4 - a^2 = \dfrac{18}{17} \end{array}$$

- Por tanto, la ecuación será: $\dfrac{x^2}{50/17} - \dfrac{y^2}{18/17} = 1$, o bien, $\dfrac{17x^2}{50} - \dfrac{17y^2}{18} = 1$

34 **Halla las ecuaciones de las siguientes parábolas:**

a) Foco (0, 0); directriz $y = -2$.

b) Foco (2, 0); directriz $x = -1$.

c) Foco (1, 1); vértice $\left(1, \frac{1}{2}\right)$.

a) Si $P(x, y)$ es un punto de la parábola, debe cumplir: $dist\,(P, F) = dist\,(P, d)$; donde F es el foco y d la directriz.

$$\sqrt{x^2 + y^2} = |y + 2| \;\to\; x^2 + y^2 = y^2 + 4y + 4 \;\to\; x^2 = 4(y + 1)$$

b) Si $P(x, y)$ es un punto de la parábola: $dist\,(P, F) = dist\,(P, d)$; siendo F el foco y d la directriz.

$$\sqrt{(x - 2)^2 + y^2} = |x + 1| \;\to\; x^2 - 4x + 4 + y^2 = x^2 + 2x + 1$$

$$y^2 = 6x - 3 \;\to\; y^2 = 6\left(x - \frac{1}{2}\right)$$

c) Si el foco es $F(1, 1)$ y el vértice es $\left(1, \frac{1}{2}\right)$, la directriz tiene que ser la recta d: $y = 0$, ya que la distancia del vértice al foco ha de ser igual a la distancia del vértice a la directriz. Así, si $P(x, y)$ es un punto de la parábola:

$dist\ (P, F) = dist\ (P, d)$

$$\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2} = |y| \quad \to \quad (x-1)^2 + y^2 - 2y + 1 = y^2$$

$$(x-1)^2 = 2y - 1 \quad \to \quad (x-1)^2 = 2\left(y - \frac{1}{2}\right)$$

35 **Aplica dos métodos diferentes que permitan decidir si la recta r: $4x + 3y - 8 = 0$ es exterior, tangente o secante a la circunferencia:**

$$(x-6)^2 + (y-3)^2 = 25$$

- MÉTODO I

Calculamos la distancia del centro de la circunferencia, $O(6, 3)$, a la recta r:

$$dist(O, r) = \frac{|4 \cdot 6 + 3 \cdot 3 - 8|}{\sqrt{4^2+3^2}} = \frac{25}{5} = 5$$

Como coincide con el radio de la circunferencia, son tangentes.

- MÉTODO II

Resolvemos el sistema formado por las dos ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} 4x + 3y - 8 = 0 \\ x^2 - 12x + 36 + y^2 - 6y + 9 - 25 = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x = \dfrac{8-3y}{4} \\ x^2 - 12x + y^2 - 6y + 20 = 0 \end{array}$$

$$\left(\frac{8-3y}{4}\right)^2 - 12 \cdot \frac{8-3y}{4} + y^2 - 6y + 20 = 0$$

$$\frac{64 - 48y + 9y^2}{16} + \frac{36y - 96}{4} + y^2 - 6y + 20 = 0$$

$$64 - 48y + 9y^2 + 144y - 384 + 16y^2 - 96y + 320 = 0$$

$$25y^2 = 0 \quad \to \quad y = 0$$

$$x = \frac{8-3y}{4} = 2$$

Por tanto, hay un único punto de corte entre la circunferencia y la recta, $P(2, 0)$; es decir, son tangentes.

36 **Halla los puntos de intersección de cada pareja de circunferencias y di cuál es su posición relativa:**

a) $\begin{cases} x^2 + y^2 - 6x - 16 = 0 \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x^2 + y^2 - 6x - 4y + 9 = 0 \\ x^2 + y^2 - 6x + 2y + 9 = 0 \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{l} x^2 + y^2 - 6x - 16 = 0 \\ x^2 + y^2 \qquad\qquad\quad = 4 \end{array}\right\}$ $\begin{array}{l} 4 - 6x - 16 = 0 \;\rightarrow\; -6x = 12 \;\rightarrow\; x = -2 \\ 4 + y^2 = 4 \;\rightarrow\; y^2 = 0 \;\rightarrow\; y = 0 \end{array}$

Las circunferencias se cortan en el punto (–2, 0).

La primera circunferencia tiene centro en (3, 0) y radio 5; la segunda tiene centro en (0, 0) y radio 2. La distancia entre sus centros es $d = 3$. Como la diferencia entre sus radios es $5 - 2 = 3 = d$, las circunferencias son tangentes interiores.

b) $\left.\begin{array}{l} x^2 + y^2 - 6x - 4y + 9 = 0 \\ x^2 + y^2 - 6x + 2y + 9 = 0 \end{array}\right\}$ Restando a la 2.ª ecuación la 1.ª: $6y = 0 \;\rightarrow\; y = 0$

$x^2 - 6x + 9 = 0 \;\rightarrow\; (x - 3)^2 = 0 \;\rightarrow\; x = 3$

Las circunferencias se cortan en el punto (3, 0).

La primera circunferencia tiene su centro en (3, 2) y radio 2; la segunda tiene su centro en (3, –1) y radio 1. La distancia entre sus centros es $d = 3$, igual que la suma de sus radios. Por tanto, las circunferencias son tangentes exteriores.

37 **Describe las siguientes cónicas.**

Obtén sus elementos y dibújalas.

a) $\dfrac{(x-3)^2}{25} + \dfrac{(y+2)^2}{9} = 1$ **b)** $\dfrac{(x-3)^2}{9} + \dfrac{(y+2)^2}{25} = 1$

c) $\dfrac{(x-3)^2}{16} - \dfrac{(y+2)^2}{4} = 1$ **d)** $\dfrac{(y+2)^2}{4} - \dfrac{(x-3)^2}{16} = 1$

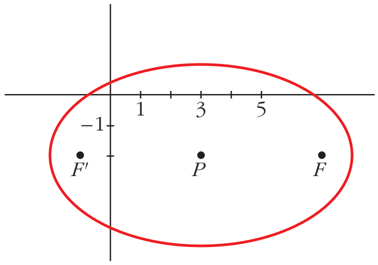
a) Es una elipse de centro $P(3, -2)$.

$a = 5, \; b = 3$

$c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{25 - 9} = \sqrt{16} = 4$

Los focos son $F(7, -2)$ y $F'(-1, -2)$.

La excentricidad es: $exc = \dfrac{4}{5} = 0{,}8$

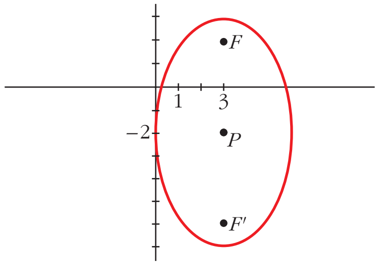


b) Es una elipse de centro $P(3, -2)$.

$a = 5, \; b = 3, \; c = 4$

Los focos son $F(3, 2)$ y $F'(3, -6)$.

La excentricidad es: $exc = \dfrac{4}{5} = 0{,}8$



c) Es una hipérbola de centro $P(3, -2)$.

$a = 4$, $b = 2$, $c = \sqrt{16 + 4} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

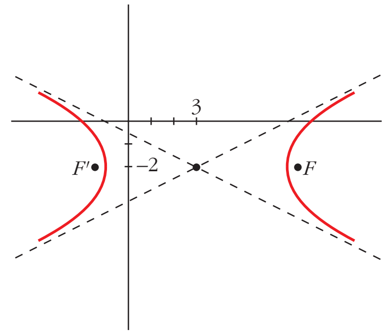
Los focos son:

$F(3 + 2\sqrt{5}, -2)$ y $F'(3 - 2\sqrt{5}, -2)$

La excentricidad es: $exc = \dfrac{2\sqrt{5}}{4} = \dfrac{\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}12$

Las asíntotas son:

$y + 2 = \dfrac{1}{2}(x - 3)$; $y + 2 = -\dfrac{1}{2}(x - 3)$



d) Es una hipérbola de centro $P(3, -2)$.

$b = 2$, $a = 4$, $c = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

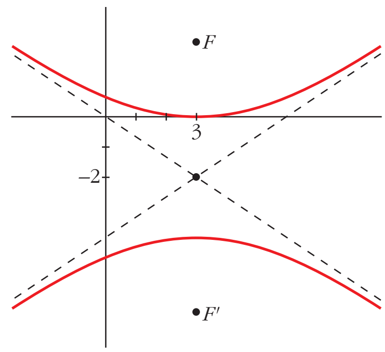
Los focos son:

$F(3, -2 + 2\sqrt{5})$ y $F'(3, -2 - 2\sqrt{5})$

La excentricidad es: $exc = \dfrac{2\sqrt{5}}{2} = \sqrt{5}$

Las asíntotas son:

$y + 2 = \dfrac{1}{2}(x - 3)$; $y + 2 = -\dfrac{1}{2}(x - 3)$



38 **a) Halla la ecuación de la circunferencia cuyo centro es $C(-1, 1)$ y es tangente a la recta $3x - 4y - 3 = 0$.**

b) De todas las rectas paralelas a la bisectriz del primer cuadrante, encuentra las que sean tangentes a la circunferencia hallada en el apartado anterior.

a) El radio, r, de la circunferencia es la distancia del centro $C(-1, 1)$ a la recta s: $3x - 4y - 3 = 0$; es decir:

$$r = dist\,(C, s) = \frac{|-3 - 4 - 3|}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{10}{5} = 2$$

La ecuación será: $(x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 4$, o bien, $x^2 + y^2 + 2x - 2y - 2 = 0$

b) Las rectas paralelas a la bisectriz del primer cuadrante son de la forma $y = x + k$, es decir, t: $x - y + k = 0$. La recta t es tangente a la circunferencia cuando la distancia del centro de la circunferencia, $C(-1, 1)$, a la recta es igual al radio, 2. Es decir:

$$dist\,(C, t) = \frac{|-1 - 1 + k|}{\sqrt{2}} = 2 \;\rightarrow\; \frac{|k - 2|}{\sqrt{2}} = 2 \;\rightarrow$$

$$\rightarrow\; |k - 2| = 2\sqrt{2} \;<\; \begin{array}{lll} k - 2 = 2\sqrt{2} & \rightarrow & k = 2 + 2\sqrt{2} \\ k - 2 = -2\sqrt{2} & \rightarrow & k = 2 - 2\sqrt{2} \end{array}$$

Hay dos rectas: $\begin{cases} y = x + 2 + 2\sqrt{2} \\ y = x + 2 - 2\sqrt{2} \end{cases}$

39 **Halla la ecuación de la circunferencia cuyo centro es el punto $C(3, 2)$ y una de cuyas rectas tangentes tiene por ecuación $4x - 3y - 5 = 0$.**

Determina si el punto $X(3, 3)$ es interior, es exterior o está en la circunferencia.

- El radio, r, de la circunferencia es igual a la distancia del centro, $C(3, 2)$, a la recta s: $4x - 3y - 5 = 0$; es decir:

$$r = dist\ (C, s) = \frac{|12 - 6 - 5|}{\sqrt{16 + 9}} = \frac{1}{5}$$

La ecuación es: $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = \frac{1}{25}$, o bien, $x^2 + y^2 - 6x - 4y - \frac{324}{25} = 0 \rightarrow$

$$\rightarrow \quad 25x^2 + 25y^2 - 150x - 100y - 324 = 0$$

- Veamos si $X(3, 3)$ es interior, exterior o está en la circunferencia:

$$dist\ (C, X) = |\overrightarrow{CX}| = |(0, 1)| = 1 > \text{radio} = \frac{1}{5}$$

Luego el punto es *exterior* a la circunferencia.

40 **a) Considera el lugar geométrico de los puntos del plano que son centro de las circunferencias que pasan por los puntos $P(4, 0)$ y $Q(0, 2)$. Halla su ecuación.**

b) El origen de coordenadas pertenece a una circunferencia de longitud 6π. Calcula el centro de esta circunferencia si imponemos que debe ser un punto del lugar definido en a).

a) Si $C(x, y)$ es el centro de la circunferencia, la distancia de C a P y a Q ha de ser la misma, es decir:

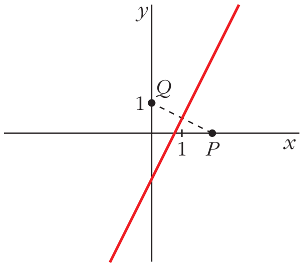
$dist\ (C, P) = dist\ (C, Q) \quad \rightarrow \quad |\overrightarrow{PC}| = |\overrightarrow{QC}|$

$\sqrt{(x - 4)^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + (y - 2)^2}$

$x^2 - 8x + 16 + y^2 = x^2 + y^2 - 4y + 4 \rightarrow$

$\rightarrow \ 2x - y - 3 = 0$

Obtenemos una recta, que es la *mediatriz del segmento* PQ.



b) Longitud $= 2\pi r = 6\pi \ \rightarrow \ $ radio $= r = 3$

Su centro está en un punto de la recta $2x - y - 3 = 0$ y pasa por el punto $P(0, 0)$.

El centro es de la forma $C(x, 2x - 3)$:

$$r = dist\ (P, C) = |\overrightarrow{PC}| = \sqrt{x^2 + (2x - 3)^2} = 3$$

$$x^2 + 4x^2 - 12x + 9 = 9 \ \rightarrow \ 5x^2 - 12x = 0 \ \begin{cases} x = 0 \\ x = 12/5 \end{cases}$$

Hay dos soluciones: $C_1(0, -3)$ y $C_2\left(\frac{12}{5}, \frac{9}{5}\right)$

41 **Halla las ecuaciones de las siguientes circunferencias:**

a) Pasa por los puntos $A(-2, 0)$, $B(0, 4)$ y $C(-4, 1)$.

☛ ***Mira el problema resuelto 1.***

b) Pasa por el origen de coordenadas y por los puntos $A(4, 0)$ y $B(0, 3)$.

c) Tiene su centro en la recta $x - 3y = 0$ y pasa por los puntos $(-1, 4)$ y $(3, 6)$.

d) Pasa por los puntos $(1, 3)$ y $(3, 5)$ y tiene el centro en la recta $x + 2y = 3$.

a) El centro pertenece a la mediatriz de AB.

Ecuación de la mediatriz de AB:

$$\sqrt{(x+2)^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + (y-4)^2} \rightarrow x + 2y - 3 = 0$$

También pertenece a la mediatriz de AC:

Ecuación: $\sqrt{(x+2)^2 + y^2} = \sqrt{(x+4)^2 + (y-1)^2} \rightarrow -4x + 2y - 13 = 0$

Resolviendo el sistema:

$$\left.\begin{array}{r} x + 2y - 3 = 0 \\ -4x + 2y - 13 = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x = -2 \\ y = 5/2 \end{array}$$

Centro: $\left(-2, \dfrac{5}{2}\right)$. Radio: $|\overrightarrow{AC}| = \dfrac{5}{2}$

Ecuación: $(x+2)^2 + \left(y - \dfrac{5}{2}\right)^2 = \dfrac{25}{4} \rightarrow x^2 + y^2 + 4x - 5y + 4 = 0$

b) El centro pertenece a la mediatriz del segmento que une $O(0, 0)$ y $A(4, 0)$, es decir, pertenece a la recta $x = 2$.

También pertenece a la mediatriz del segmento que une $O(0, 0)$ y $B(0, 3)$, es decir, pertenece a la recta $y = \dfrac{3}{2}$.

Por tanto, el centro de la circunferencia es $C\left(2, \dfrac{3}{2}\right)$.

El radio es la distancia del centro a cualquiera de los tres puntos:

$$r = dist\,(C, O) = |\overrightarrow{OC}| = \sqrt{4 + \frac{9}{4}} = \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{5}{2}$$

La ecuación es: $(x-2)^2 + \left(y - \dfrac{3}{2}\right)^2 = \dfrac{25}{4}$, o bien, $x^2 + y^2 - 4x - 3y = 0$

c) Si el centro está sobre la recta $x - 3y = 0$, es de la forma $C(3y, y)$.

El centro está a igual distancia de $A(-1, 4)$ que de $B(3, 6)$. Además, esta distancia es el radio, r, de la circunferencia:

$$r = dist\,(A, C) = dist\,(B, C) \rightarrow |\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{BC}| \rightarrow$$

$$\rightarrow \sqrt{(3y+1)^2 + (y-4)^2} = \sqrt{(3y-3)^2 + (y-6)^2}$$

$9y^2 + 1 + 6y + y^2 + 16 - 8y = 9y^2 + 9 - 18y + y^2 + 36 - 12y$

$28y = 28 \;\rightarrow\; y = 1 \;\rightarrow\; x = 3y = 3$

Por tanto, el centro de la circunferencia está en $C(3, 1)$, y su radio es:

$r = |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5$

La ecuación es: $(x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 25$, o bien, $x^2 + y^2 - 6x - 2y - 15 = 0$

d) Si el centro está en la recta $x + 2y = 3$, es de la forma $C(3 - 2y, y)$.

El centro está a igual distancia de $A(1, 3)$ y de $B(3, 5)$. Además, esta distancia es el radio, r, de la circunferencia:

$r = dist(A, C) = dist(B, C) \;\rightarrow\; |\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{BC}| \;\rightarrow$

$\rightarrow\; \sqrt{(2 - 2y)^2 + (y - 3)^2} = \sqrt{(-2y)^2 + (y - 5)^2} \;\rightarrow$

$\rightarrow\; 4 + 4y^2 - 8y + y^2 + 9 - 6y = 4y^2 + y^2 + 25 - 10y \;\rightarrow$

$\rightarrow\; 4 + 9 - 25 = -10y + 8y + 6y \;\rightarrow\; -12 = 4y \;\rightarrow\; y = -3 \;\rightarrow\; x = 3 - 2y = 9$

Por tanto, el centro de la circunferencia está en $C(9, 3)$, y su radio es:

$r = |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{8^2 + 0^2} = 8$

La ecuación es: $(x - 9)^2 + (y - 3)^2 = 64$

Página 238

42 **Calcula la ecuación de la elipse cuyos focos son los puntos $F(-1, 2)$ y $F'(3, 2)$ y cuya excentricidad es igual a 1/3.**

- El centro de la elipse es el punto medio entre los focos:

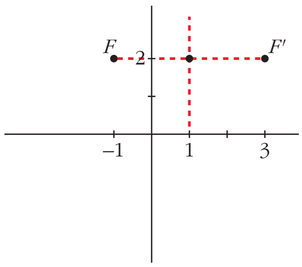
$$\left(\frac{-1 + 3}{2}, \frac{2 + 2}{2}\right) = (1, 2)$$

- La semidistancia focal es $c = 2$.

- La excentricidad es $exc = \dfrac{c}{a} = \dfrac{2}{a} = \dfrac{1}{3} \;\rightarrow\; a = 6$

- Obtenemos $b^2 \;\rightarrow\; b^2 = a^2 - c^2 = 36 - 4 = 32$

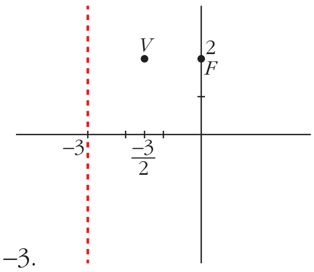
- La ecuación es: $\dfrac{(x - 1)^2}{36} + \dfrac{(y - 2)^2}{32} = 1$



43 **La parábola $y^2 - 4y - 6x - 5 = 0$ tiene por foco el punto (0, 2). Encuentra su directriz.**

$y^2 - 4y = 6x + 5 \;\rightarrow\; y^2 - 4y + 4 = 6x + 9 \;\rightarrow$

$\rightarrow\; (y - 2)^2 = 6\left(x + \dfrac{3}{2}\right)$



El vértice de la parábola es $V\left(-\dfrac{3}{2}, 2\right)$.

Como el foco es $F(0, 2)$, entonces la directriz es $x = -3$.

44 **Halla la ecuación del lugar geométrico de todos los puntos del plano tales que su distancia al punto (4, 0) es el doble de su distancia a la recta $x = 1$.**

Comprueba que dicho lugar geométrico es una cónica y halla sus focos.

Sea $P(x, y)$ uno de los puntos del lugar geométrico. La distancia de P al punto $Q(4, 0)$ ha de ser el doble que la distancia de P a la recta s: $x - 1 = 0$; es decir:

$$dist(P, Q) = 2dist(P, s) \;\rightarrow\; \sqrt{(x-4)^2 + y^2} = 2|x - 1|$$

$$(x - 4)^2 + y^2 = 4(x - 1)^2 \;\rightarrow\; x^2 - 8x + 16 + y^2 = 4(x^2 - 2x + 1)$$

$$x^2 - 8x + 16 + y^2 = 4x^2 - 8x + 4 \;\rightarrow\; 3x^2 - y^2 = 12 \;\rightarrow\; \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$$

Es una hipérbola, centrada en (0, 0).

$$a^2 = 4;\; b^2 = 12 \;\rightarrow\; c^2 = a^2 + b^2 = 16 \;\rightarrow\; c = 4$$

Por tanto, los focos son $F(4, 0)$ y $F(-4, 0)$.

45 **Halla la ecuación del lugar geométrico de los puntos cuya distancia al punto (4, 0) es igual a la mitad de la distancia a la recta $x - 16 = 0$. Representa la curva que obtienes.**

Sea $P(x, y)$ uno de los puntos del lugar geométrico. La distancia de P a (4, 0) ha de ser igual a la mitad de la distancia de P a la recta $x - 16 = 0$; es decir:

$$\sqrt{(x-4)^2 + y^2} = \frac{1}{2}|x - 16|$$

$$(x - 4)^2 + y^2 = \frac{1}{4}(x - 16)^2$$

$$x^2 - 8x + 16 + y^2 = \frac{1}{4}(x^2 - 32x + 256)$$

$$4x^2 - 32x + 64 + 4y^2 = x^2 - 32x + 256$$

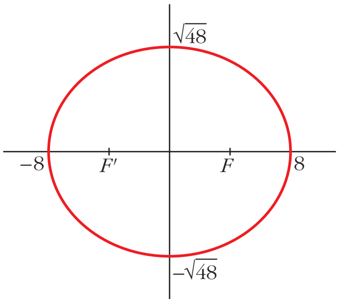
$$3x^2 + 4y^2 = 192 \;\rightarrow\; \frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{48} = 1$$

Es una elipse, en la que $a = 8$ y $b = \sqrt{48} \approx 6{,}93$.

La representamos:

Los focos están en $F(4, 0)$ y $F'(-4, 0)$.

La excentricidad es: $exc = \frac{c}{a} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} = 0{,}5$



46 **Halla el lugar geométrico de los puntos $P(x, y)$ tales que el producto de las pendientes de las rectas trazadas desde P a los puntos: $A(-2, 1)$ y $B(2, -1)$ sea igual a 1. ¿Qué figura obtienes? Represéntala.**

- La pendiente de la recta que une P con A es: $\frac{y-1}{x+2}$
- La pendiente de la recta que une P con B es: $\frac{y+1}{x-2}$
- El producto de las pendientes ha de ser igual a 1, es decir:

$$\left(\frac{y-1}{x+2}\right) \cdot \left(\frac{y+1}{x-2}\right) = 1 \quad \rightarrow \quad \frac{y^2-1}{x^2-4} = 1 \quad \rightarrow \quad y^2 - 1 = x^2 - 4$$

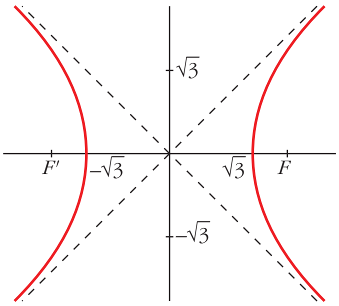
$$x^2 - y^2 = 3 \quad \rightarrow \quad \frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{3} = 1$$

Es una hipérbola, en la que $a = b = \sqrt{3}$ y $c = \sqrt{6}$.

Los focos son $F(\sqrt{6}, 0)$ y $F(-\sqrt{6}, 0)$.

Las asíntotas son: $y = x$ e $y = -x$

La excentricidad es: $exc = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}} = \sqrt{2} \approx 1{,}41$



47 **a) Halla el lugar geométrico de todos los puntos $P(x, y)$ del plano cuya suma de cuadrados de distancias a los puntos $A(-3, 0)$ y $B(3, 0)$ es 68.**

Puedes comprobar fácilmente que se trata de una circunferencia de centro $O(0, 0)$. ¿Cuál es su radio?

b) Generaliza: Halla el lugar geométrico de los puntos del plano cuya suma de cuadrados de distancias a $A(-a, 0)$ y $B(a, 0)$ es k (constante), y comprueba que se trata de una circunferencia de centro $O(0, 0)$.

Di el valor de su radio en función de a y de k. ¿Qué relación deben cumplir los parámetros a y k para que realmente sea una circunferencia?

a) $[dist(A, P)]^2 + [dist(B, P)]^2 = 68 \rightarrow (x + 3)^2 + y^2 + (x - 3)^2 + y^2 = 68 \rightarrow$

$\rightarrow x^2 + 6x + 9 + y^2 + x^2 - 6x + 9 + y^2 = 68 \rightarrow$

$\rightarrow 2x^2 + 2y^2 = 68 - 18 \rightarrow 2x^2 + 2y^2 = 50 \rightarrow$

$\rightarrow x^2 + y^2 = 25$, que es la ecuación de una circunferencia de centro $P(0, 0)$ y radio $r = 5$.

Comprobemos que, efectivamente, se trata de esa circunferencia.

Despejamos $y \rightarrow y = \sqrt{25 - x^2} \rightarrow P(x, y) = (x, \sqrt{25 - x^2})$

Debe verificarse que:

$$dist(O, P) = r$$

Es decir, que:

$$\sqrt{x^2 + y^2} = 5 \rightarrow \sqrt{x^2 + (25 - x^2)} = 5 \rightarrow \sqrt{25} = 5$$

Por tanto, como se cumple la condición, podemos asegurar que se trata de esa circunferencia.

b) $[dist(A, P)]^2 + [dist(B, P)]^2 = k \rightarrow (x + a)^2 + y^2 + (x - a)^2 + y^2 = k \rightarrow$

$\rightarrow x^2 + 2ax + a^2 + y^2 + x^2 - 2ax + a^2 + y^2 = k \rightarrow$

$\rightarrow 2x^2 + 2y^2 = k - 2a^2 \rightarrow x^2 + y^2 = \frac{k}{2} - a^2$

que es la ecuación de una circunferencia de centro (0, 0) y radio:

$$r = \sqrt{\frac{k}{2} - a^2}$$

Para que realmente sea una circunferencia, debe ocurrir que $r > 0$. Por tanto, debe verificarse:

$$\frac{k}{2} - a^2 > 0 \rightarrow k > 2a$$

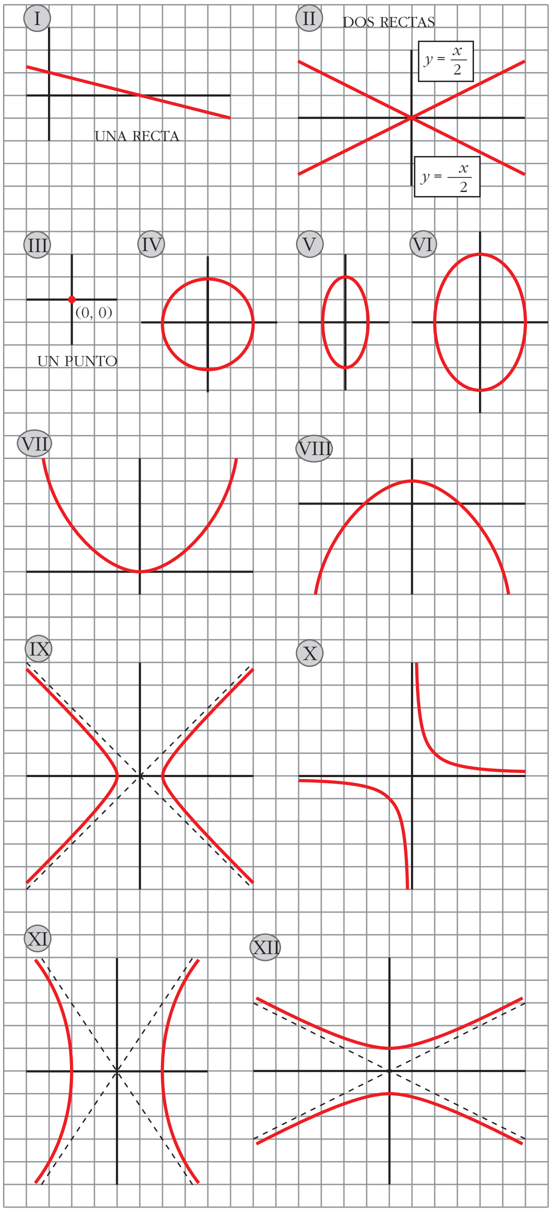
48 **Asocia cada una de las siguientes ecuaciones a una de las gráficas que se muestran a continuación:**

a) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ b) $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$ c) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} = 1$

d) $\frac{x}{4} + y = 1$ e) $\frac{x^2}{4} + y = 1$ f) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$

g) $y^2 - \frac{x^2}{4} = 1$ h) $\frac{x^2}{4} + y^2 = 0$ i) $\frac{x^2}{4} - y^2 = 0$

j) $\frac{x^2}{4} - y = 0$ k) $x^2 - y^2 = 1$ l) $xy = 1$



a) VI

b) V

c) IV

d) I

e) VIII

f) XI

g) XII

h) III

i) II

j) VII

k) IX

l) X

Página 239

REFLEXIONA SOBRE LA TEORÍA

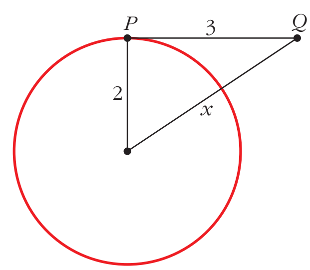
49 **Un segmento PQ de 3 cm de longitud se mueve apoyándose tangencialmente sobre la circunferencia $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 9 = 0$. Si el extremo P es el punto de tangencia, ¿cuál es el lugar geométrico que describe el otro extremo Q?**

La circunferencia dada tiene su centro en (2, –3) y su radio es $\sqrt{4 + 9 - 9} = 2$.

Como la tangente es perpendicular al radio, la distancia de Q al centro será siempre la misma:

$$x = \sqrt{9 + 4} = \sqrt{13}$$

Por tanto, Q describe una circunferencia con el mismo centro que la dada y radio $\sqrt{13}$.



Su ecuación será: $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 13$; o bien

$$x^2 + y^2 - 4x + 6y = 0$$

50 **Pon la ecuación del lugar geométrico de los puntos $P(x, y)$ que equidistan del punto $F(6, -1)$ y de la recta r: $3x - 4y - 2 = 0$.**

(Encontrarás una ecuación complicada. No te molestes en simplificarla). ¿De qué figura se trata? Para responder a esta pregunta, fíjate en cómo se ha definido y no en cuál es su ecuación.

Representa r y F. ¿Cómo habrá que situar unos nuevos ejes coordenados para que la ecuación de esa curva sea $y^2 = kx$? ¿Cuánto vale k?

Ecuación: $\sqrt{(x - 6)^2 + (y + 1)^2} = \dfrac{|3x - 4y - 2|}{5}$

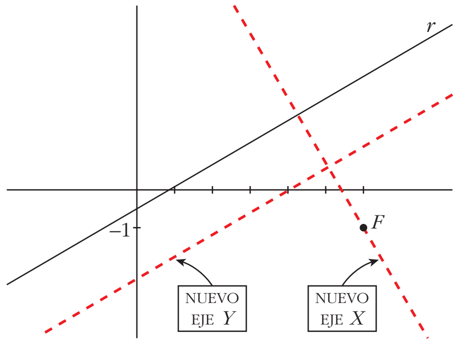
El lugar geométrico de los puntos que equidistan de un punto (foco) y de una recta (directriz) *es una parábola.*

La ecuación de la parábola respecto a los nuevos ejes es $y^2 = 2px$, donde p es la distancia del foco a la directriz:

$$dist\ (F, r) = \frac{|18 + 4 - 2|}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{20}{5} = 4$$

Si $p = 4$, entonces $k = 8$.

La ecuación es $y^2 = 8x$ respecto a los nuevos ejes.



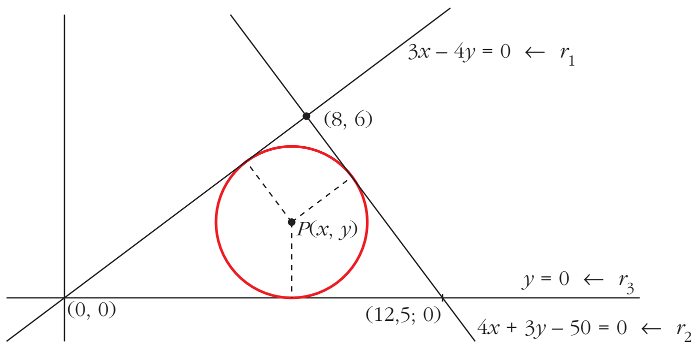
51 **Dos circunferencias se cortan en los puntos (0, 0) y (0, 8). ¿Cuál es su eje radical? Justifica tu respuesta.**

Su eje radical será la recta que pasa por los puntos (0, 0) y (0, 8); es decir: $x = 0$.

PARA PROFUNDIZAR

52 **Halla la ecuación de la circunferencia inscrita en el triángulo de lados:**

$$\boldsymbol{y = 0 \qquad 3x - 4y = 0 \qquad 4x + 3y - 50 = 0}$$



Si $P(x, y)$ es el centro de la circunferencia, entonces:

• $dist\,(P, r_1) = dist\,(P, r_3) \;\rightarrow\; \dfrac{|3x - 4y|}{5} = |y| \;\rightarrow\; 5|y| = |3x - 4y|$

$5y = 3x - 4y \;\rightarrow\; 9y = 3x \;\rightarrow\; x = 3y$

$5y = -3x + 4y \;\rightarrow\; y = -3x \;\leftarrow$ No vale; la bisectriz que buscamos es la otra.

• $dist\,(P, r_2) = dist\,(P, r_3) \;\rightarrow\; \dfrac{|4x + 3y - 50|}{5} = |y| \;\rightarrow\; 5|y| = |4x + 3y - 50|$

$5y = 4x + 3y - 50 \;\rightarrow\; y = 2x - 25 \;\leftarrow$ No vale; es la otra bisectriz.

$5y = -4x - 3y + 50 \;\rightarrow\; 2x + 4y = 25$

El punto de corte de las dos bisectrices es el incentro, es decir, el centro de la circunferencia inscrita en el triángulo.

$$\left.\begin{array}{l} x = 3y \\ 2x + 4y = 25 \end{array}\right\} \begin{array}{l} 6y + 4y = 25 \;\rightarrow\; 10y = 25 \;\rightarrow\; y = \dfrac{25}{10} = \dfrac{5}{2} \\ x = 3y = \dfrac{15}{2} \end{array}$$

El centro es $P\left(\dfrac{15}{2}, \dfrac{5}{2}\right)$.

El radio es $dist\,(P, r_3) = y = \dfrac{5}{2} = \text{radio}$

La ecuación es: $\left(x - \dfrac{15}{2}\right)^2 + \left(y - \dfrac{5}{2}\right)^2 = \dfrac{25}{4}$; o bien:

$$x^2 - 15x + \frac{225}{4} + y^2 - 5y + \frac{25}{4} = \frac{25}{4}$$

$$x^2 + y^2 - 15x - 5y + \frac{225}{4} = 0 \;\rightarrow\; 4x^2 + 4y^2 - 60x - 20y + 225 = 0$$

53 Halla la ecuación de la circunferencia que pasa por (–3, 2) y (4, 1) y es tangente al eje *OX*.

Si $P(x, y)$ es el centro de la circunferencia, y llamamos a los puntos $A(-3, 2)$ y $B(4, 1)$; la distancia de P a los dos puntos y al eje OX ha de ser la misma. Además, esta distancia es igual al radio de la circunferencia.

$$\left.\begin{array}{l} dist\,[P, \text{eje } OX] = |y| \\ dist\,(P, A) = \sqrt{(x+3)^2 + (y-2)^2} \\ dist\,(P, B) = \sqrt{(x-4)^2 + (y-1)^2} \end{array}\right\} \text{han de ser iguales.}$$

$$\sqrt{(x+3)^2 + (y-2)^2} = \sqrt{(x-4)^2 + (y-1)^2}$$

$$x^2 + 6x + 9 + y^2 - 4y + 4 = x^2 - 8x + 16 + y^2 - 2y + 1$$

$$14x - 2y - 4 = 0 \;\rightarrow\; 7x - y - 2 = 0 \;\rightarrow\; y = 7x - 2$$

$$\sqrt{(x+3)^2 + (y-2)^2} = |y|$$

$$x^2 + 6x + 9 + y^2 - 4y + 4 = y^2$$

$$x^2 + 6x - 4(7x - 2) + 13 = 0$$

$$x^2 + 6x - 28x + 8 + 13 = 0 \;\rightarrow\; x^2 - 22x + 21 = 0$$

$$x = \frac{22 \pm \sqrt{484 - 84}}{2} = \frac{22 \pm \sqrt{400}}{2} = \frac{22 \pm 20}{2} \begin{array}{l} x = 21 \;\rightarrow\; y = 145 \\ x = 1 \;\rightarrow\; y = 5 \end{array}$$

Hay dos soluciones:

1.ª) Centro (21, 145) y radio 145:

$$(x - 21)^2 + (y - 145)^2 = 21\,025; \text{ o bien: } x^2 + y^2 - 42x - 290y + 441 = 0$$

2.ª) Centro (1, 5) y radio 5:

$$(x-1)^2+(y-5)^2=25; \text{ o bien: } x^2+y^2-2x-10y+1=0$$

54 **Determina la ecuación de la circunferencia de radio 10 que, en el punto (7, 2), es tangente a la recta $3x-4y-13=0$.**

El centro pertenece a la recta perpendicular a la dada que pasa por (7, 2).

— Una recta perpendicular a $3x-4y-13=0$ es de la forma $4x+3y+k=0$. Como (7, 2) pertenece a la recta: $28+6+k=0 \rightarrow k=-34$. El centro pertenece a la recta:

$$4x+3y-34=0 \rightarrow y=\frac{-4x+34}{3}$$

— El centro es $C\left(x, \frac{-4x+34}{3}\right)$.

La distancia de C al punto (7, 2) es igual al radio, que es 10, es decir:

$$\sqrt{(x-7)^2+\left(\frac{-4x+34}{3}-2\right)^2}=10$$

$$(x-7)^2+\left(\frac{-4x+34}{3}\right)^2=100$$

$$x^2-14x+49+\frac{16x^2-224x+784}{9}=100$$

$$9x^2-126x+441+16x^2-224x+784=900$$

$$25x^2-350x+325=0 \rightarrow x^2-14x+13=0$$

$$x=\frac{14\pm\sqrt{196-52}}{2}=\frac{14\pm\sqrt{144}}{2}=\frac{14\pm 12}{2} \begin{cases} x=13 \rightarrow y=-6 \\ x=1 \rightarrow y=10 \end{cases}$$

Hay dos soluciones:

1.ª) Centro (13, –6) y radio 10:

$$(x-13)^2+(y+6)^2=100 \rightarrow x^2+y^2-26x+12y+105=0$$

2.ª) Centro (1, 10) y radio 10:

$$(x-1)^2+(y-10)^2=100 \rightarrow x^2+y^2-2x-20y+1=0$$

55 **Halla la ecuación de la parábola de vértice en el punto (2, 3) y que pasa por el punto (4, 5).**

Hay dos posibilidades:

1) $(y-3)^2=2p(x-2)$

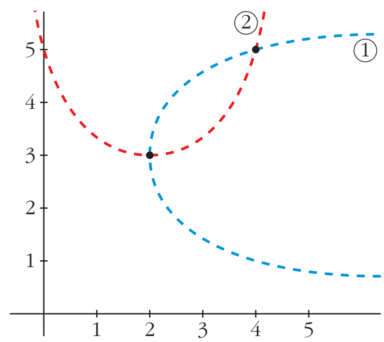
Como pasa por (4, 5) $\rightarrow 4=4p \rightarrow p=1$

$$(y-3)^2=2(x-2)$$

2) $(x-2)^2 = 2p'(y-3)$

Como pasa por $(4, 5) \to 4 = 4p' \to p' = 1$

$$(x-2)^2 = 2(y-3)$$



56 **Halla los vértices, los focos y la excentricidad de las cónicas siguientes:**

a) $\mathbf{9x^2 + 16y^2 - 36x + 96y + 36 = 0}$

b) $\mathbf{x^2 - 4y^2 - 2x - 3 = 0}$

c) $\mathbf{x^2 + 9y^2 + 36y + 27 = 0}$

a) $9x^2 + 16y^2 - 36x + 96y + 36 = 0$

$9x^2 - 36x + 36 + 16y^2 + 96y + 144 - 36 - 144 + 36 = 0$

$(3x-6)^2 + (4y+12)^2 - 144 = 0$

$[3(x-2)]^2 + [4(y+3)]^2 = 144$

$9(x-2)^2 + 16(y+3)^2 = 144$

$$\frac{(x-2)^2}{16} + \frac{(y+3)^2}{9} = 1$$

Es una **elipse** de **centro** $(2, -3)$.

$a = 4, \quad b = 3, \quad c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{7}$

Vértices: $(6, -3)$; $(-2, -3)$; $(2, 0)$ y $(2, -6)$

Focos: $(2 + \sqrt{7}, -3)$ y $(2 - \sqrt{7}, -3)$

Excentricidad: $exc = \dfrac{c}{a} = \dfrac{\sqrt{7}}{4} \approx 0,66$

b) $x^2 - 4y^2 - 2x - 3 = 0$

$x^2 - 2x + 1 - 4y^2 - 1 - 3 = 0$

$(x-1)^2 - 4y^2 = 4$

$$\frac{(x-1)^2}{4} - y^2 = 1$$

Es una **hipérbola** de **centro** (1, 0).

$a = 2, \ \ b = 1, \ \ c = \sqrt{4 + 1} = \sqrt{5}$

Vértices: (3, 0) y (–1, 0)

Focos: $(\sqrt{5} + 1, 0)$ y $(-\sqrt{5} + 1, 0)$

Excentricidad: $exc = \dfrac{\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}12$

c) $x^2 + 9y^2 + 36x + 27 = 0$

$x^2 + 9(y^2 + 4y) + 27 = 0$

$x^2 + 9(y + 2)^2 - 36 + 27 = 0$

$x^2 + 9(y + 2)^2 = 9$

$\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{(y + 2)^2}{1} = 1$

Es una **elipse** con $a = 3, \ \ b = 1, \ \ c = \sqrt{8}$.

Vértices: (–3, 0), (3, 0), (0, –1), (0, 1)

Focos: $(-\sqrt{10}, 0), (\sqrt{10}, 0)$

Excentricidad: $exc = \dfrac{c}{a} = \dfrac{\sqrt{8}}{3} \approx 0{,}94$

Página 239

AUTOEVALUACIÓN

1. **Halla la ecuación de la bisectriz de los ángulos formados por las siguientes rectas:**

$\boldsymbol{r_1: x = 3}$

$\boldsymbol{r_2: 3x - 4y + 1 = 0}$

Los puntos $X(x, y)$ deben cumplir: $dist(X, r_1) = dist(X, r_2)$

$$\left.\begin{array}{l} dist(X, r_1) = |x - 3| \\ dist(X, r_2) = \dfrac{|3x - 4y + 1|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} \end{array}\right\} \quad |x - 3| = \frac{|3x - 4y + 1|}{5}$$

Eliminando los valores absolutos obtenemos dos ecuaciones, las que corresponden a las dos bisectrices, perpendiculares entre sí:

$5(x - 3) = 3x - 4y + 1 \;\rightarrow\; 2x + 4y - 16 = 0 \;\rightarrow\; x + 2y - 8 = 0$

$-5(x - 3) = 3x - 4y + 1 \;\rightarrow\; 8x - 4y - 14 = 0 \;\rightarrow\; 4x - 2y - 7 = 0$

2. **Escribe la ecuación de la circunferencia cuyo centro es el punto $\boldsymbol{C(1, -3)}$ y pasa por el punto $\boldsymbol{A(5, 0)}$.**

La ecuación de la circunferencia es de la forma $(x - 1)^2 + (y + 3)^2 = r^2$. Para determinar r^2, sustituimos $A(5, 0)$ en la ecuación:

$$(5 - 1)^2 + 3^2 = r^2 \;\rightarrow\; r^2 = 25$$

La ecuación de la circunferencia es, por tanto, $(x - 1)^2 + (y + 3)^2 = 25$. O, en su forma simplificada, $x^2 + y^2 - 2x + 6y - 15 = 0$.

3. **Consideramos la circunferencia $\boldsymbol{x^2 + y^2 - 2x = 0}$ y la recta $\boldsymbol{r: 3x - 4y + k = 0}$. Calcula los valores que debe tomar $\boldsymbol{k}$ para que $\boldsymbol{r}$ sea interior, tangente o exterior a la circunferencia.**

Hallamos primero el centro, O_C, y el radio, R, de la circunferencia:

$$x^2 + y^2 - 2x = 0 \;\rightarrow\; (x - 1)^2 + y^2 = 1 \;\rightarrow\; O_C = (1, 0) \text{ y } R = 1$$

Calculamos la distancia del centro de la circunferencia, O_C, a la recta $r: 3x - 4y + k = 0$:

$$d = dist(O_C, r) = \frac{|3 \cdot 1 - 4 \cdot 0 + k|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{|3 + k|}{5}$$

• Para que r sea interior a la circunferencia, ha de ser $d < R = 1$.

$$\frac{|3+k|}{5} < 1 \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{3+k}{5} < 1 \rightarrow k < 2 \\ -\dfrac{3+k}{5} < 1 \rightarrow \dfrac{3+k}{5} > -1 \rightarrow k > -8 \end{array} \right\} \text{Es decir, } k \in (-8, 2).$$

• Para que r sea tangente a la circunferencia, ha de ser $d = R = 1$.

$$\frac{|3+k|}{5} = 1 \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{3+k}{5} = 1 \rightarrow k = 2 \\ -\dfrac{3+k}{5} = 1 \rightarrow k = -8 \end{array} \right.$$

• Para que r sea exterior a la circunferencia, ha de ser $d > R = 1$.

$$\frac{|3+k|}{5} > 1 \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{3+k}{5} > 1 \rightarrow k > 2 \\ -\dfrac{3+k}{5} > 1 \rightarrow \dfrac{3+k}{5} < -1 \rightarrow k < -8 \end{array} \right\} \text{Es decir,}$$

$k \in (-\infty, -8) \cup (2, +\infty)$.

4. Dados los puntos $F(3, 2)$ y $F'(1, -2)$ y la recta r: $x + y - 1 = 0$, obtén las ecuaciones de:

a) La elipse de focos F y F' cuya constante es 6.

b) La hipérbola de focos F y F' cuya constante es 2.

c) La parábola de foco F y directriz r.

☛ ***No es necesario que simplifiques la expresión de la ecuación.***

a) Elipse de focos $F(3, 2)$ y $F'(1, -2)$ y constante $k = 6$.

- Semieje mayor, a: $k = 6 = 2a \rightarrow a = 3$
- Semidistancia focal, $c = \dfrac{|\overline{FF'}|}{2} = \dfrac{\sqrt{(-2)^2 + (-4)^2}}{2} = \dfrac{\sqrt{20}}{2} = \sqrt{5}$
- Semieje menor, b: $b^2 = a^2 - c^2 = 9 - 5 = 4 \rightarrow b = 2$

Por tanto, la ecuación de la elipse es $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1$.

b) Hipérbola de focos $F(3, 2)$ y $F'(1, -2)$ y constante $k = 2$.

- Semieje a: $k = 2 = 2a \rightarrow a = 1$
- Semidistancia focal, $c = \dfrac{|\overline{FF'}|}{2} = \sqrt{5}$
- $c^2 = a^2 + b^2 \rightarrow b^2 = c^2 - a^2 = 5 - 1 = 4 \rightarrow b = 2$

Por tanto, la ecuación de la hipérbola es $\dfrac{x^2}{1} - \dfrac{y^2}{4} = 1$.

c) Parábola de foco $F(3, 2)$ y recta directriz $r: x + y - 1 = 0$.

En una parábola de ecuación $y^2 = 2px$, $p = dist(F, r)$:

$$p = \frac{|3 + 2 - 1|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$$

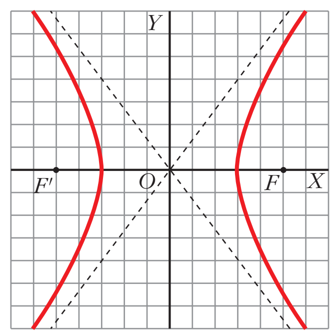
Por tanto, la ecuación de la parábola es $y = 4\sqrt{2}x$.

5. Describe las siguientes cónicas. Obtén sus elementos y dibújalas:

a) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$

b) $\frac{(x-5)^2}{9} - \frac{(y+1)^2}{16} = 1$

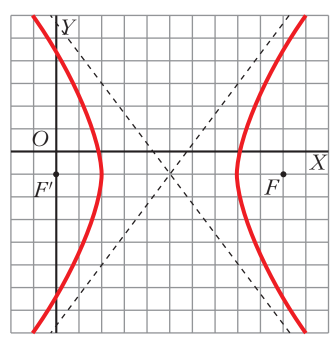
a) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$



Es una hipérbola en la que:

- $a = 3$, $b = 4$
- Asíntotas: $y = \frac{4}{3}x$, $y = -\frac{4}{3}x$
- Semidistancia focal: $c = \sqrt{a^2 + b^2} = 5$
- Focos: $F(5, 0)$ y $F'(-5, 0)$
- Vértices: $V(3, 0)$ y $V'(-3, 0)$

b) $\frac{(x-5)^2}{9} - \frac{(y+1)^2}{16} = 1$



Es una hipérbola igual a la del apartado anterior pero centrada en el punto $(5, -1)$.

- $a = 3$, $b = 4$, $c = 5$
- Asíntotas: $y = \frac{4}{3}x - \frac{23}{3}$; $y = -\frac{4}{3}x + \frac{17}{3}$
- Focos: $F(10, -1)$, $F'(0, -1)$
- Vértices: $V(8, -1)$, $V'(2, -1)$

6. Obtén la ecuación de la elipse de focos $F(-4, 0)$ y $F'(4, 0)$ y excentricidad 0,8.

$F(-4, 0)$ $F'(4, 0)$ $exc = 0{,}8$

$$c = \frac{|\overline{FF'}|}{2} = 4$$

$exc = \frac{c}{a} = \frac{4}{a} = 0{,}8 \;\rightarrow\; a = 5$

$b^2 = a^2 - c^2 = 25 - 16 = 9 \;\rightarrow\; b = 3$

La ecuación de la elipse es $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$.

7. **Halla los focos, la excentricidad y las asíntotas de la hipérbola $9x^2 - 16y^2 = 144$. Dibújala.**

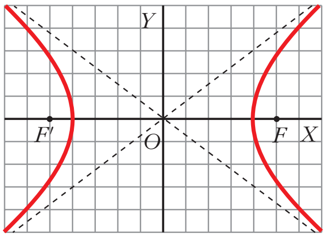
$9x^2 - 16y^2 = 144 \;\rightarrow\; \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$

$a^2 = 16 \;\rightarrow\; a = 4$

$b^2 = 9 \;\rightarrow\; b = 3$

$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{25} = 5$

Los focos son $F(5, 0)$ y $F'(-5, 0)$.



Excentricidad: $exc = \frac{c}{a} = \frac{5}{4}$

Asíntotas: $y = \frac{3}{4}x$ e $y = -\frac{3}{4}x$

8. **Escribe la ecuación de la parábola que tiene por directriz la recta $x = 3$, y como vértice, el origen de coordenadas.**

d: $x = 3$

En una parábola $y^2 = 2px$, la recta directriz es $x = -\frac{p}{2}$.

Por tanto, $3 = -\frac{p}{2} \;\rightarrow\; p = -6$

La ecuación de la parábola es $y^2 = -12x$.

9. **Halla el eje radical a las circunferencias:**

$$C_1: x^2 + y^2 - 4x - 2y + 1 = 0$$

$$C_2: x^2 + y^2 - 4x - 18y + 21 = 0$$

Representa las circunferencias y su eje radical.

Sea $P(x, y)$ un punto del eje radical de ambas circunferencias. Como las potencias de P a C_1 y de P a C_2 deben coincidir:

$x^2 + y^2 - 4x - 2y + 1 = x^2 + y^2 - 4x - 18y + 21 \;\rightarrow\; 16y = 20 \;\rightarrow\; y = \frac{5}{4}$

El eje radical de las circunferencias es $y = \frac{5}{4}$.

Para hacer la representación, calculamos el centro y el radio de cada circunferencia:

$$C_1 \begin{cases} A = -4 \\ B = -2 \\ C = 1 \end{cases} \qquad \begin{array}{l} O_{C_1} = (2,\ 1) \\ r = \sqrt{4 + 1 - 1} = 2 \end{array}$$

$$C_2 \begin{cases} A = -4 \\ B = -18 \\ C = 21 \end{cases} \qquad \begin{array}{l} O_{C_2} = (2,\ 9) \\ r' = \sqrt{4 + 81 - 21} = 8 \end{array}$$