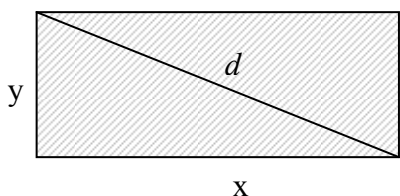


PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN

1.- Entre todos los rectángulos de perímetro 12 cm. ¿cuál es el que tiene la diagonal menor?.

Solución:



Perímetro: $2x + 2y = 12 \Rightarrow x + y = 6 \Rightarrow y = 6 - x$ (condición que se ha de cumplir)

Función a minimizar: $x^2 + y^2 = d^2 \Rightarrow d = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + (6 - x)^2}$

Es decir, $d(x) = \sqrt{2x^2 - 12x + 36}$ que es la función a estudiar.

$$d'(x) = \frac{4x - 12}{2\sqrt{2x^2 - 12x + 36}} = \frac{2x - 6}{\sqrt{2x^2 - 6x + 18}}$$

Igualando $d'(x)$ a cero y resolviendo la ecuación resultante se obtiene $x = 3$

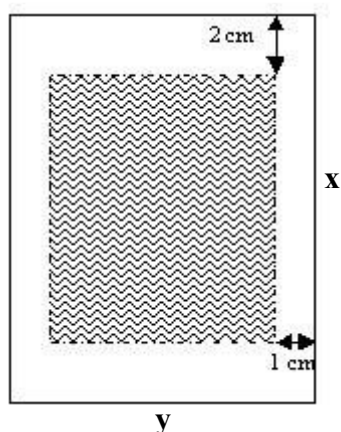
$$\text{Segunda derivada: } d''(x) = \frac{2\sqrt{2x^2 - 6x + 18} - \frac{4x - 6}{2\sqrt{2x^2 - 6x + 18}} \cdot (2x - 6)}{2x^2 - 6x + 18}$$

Valor de la segunda derivada para $x = 3$:

$$d''(3) = \frac{2\sqrt{2 \cdot 3^2 - 18 + 18} - 0}{2 \cdot 3^2 - 18 + 18} = \frac{2\sqrt{2 \cdot 3^2}}{2 \cdot 3^2} = \frac{\sqrt{2}}{3} > 0 \text{ (mínimo, se trata de un cuadrado)}$$

2.- Una hoja de papel debe contener 18 cm^2 de texto impreso. Los márgenes superior e inferior deben tener 2 cm. cada uno, y los laterales 1 cm. Halla las dimensiones de la hoja para que el gasto de papel sea mínimo.

Solución:



Condición que se tiene que dar: 18 cm^2 de texto impreso, es decir, $(x-4)(y-2) = 18$

$$y-2 = \frac{18}{x-4} \Rightarrow y = \frac{10+2x}{x-4}$$

Función a minimizar: Superficie = $x \cdot y = x \cdot \frac{10+2x}{x-4} = \frac{10x+2x^2}{x-4}$, es decir,

$$S = \frac{10x+2x^2}{x-4}. \text{ Derivando, } S' = \frac{2x^2-16x-40}{(x-4)^2}. \text{ Si hacemos } S' = 0 \text{ entonces}$$

$$2x^2 - 16x - 40 = 0 \Rightarrow x^2 - 8x - 20 = 0 \Rightarrow x = \frac{8 \pm \sqrt{144}}{2} = \frac{8 \pm 12}{2} = \begin{cases} 10 \\ -2 \end{cases}$$

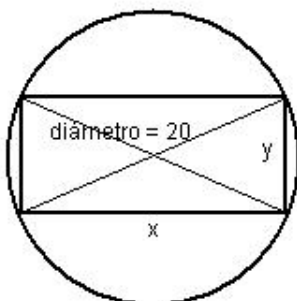
La solución negativa no tiene sentido.

$$S'' = \frac{(4x-16)(x-4)^2 - 2(x-4)(2x^2-16x-40)}{(x-4)^4}; S''(10) = \frac{24 \cdot 36 - 0}{6^4} > 0$$

Para $x = 10$, la 2ª derivada es positiva, luego es un mínimo.

3.- Halla las dimensiones del rectángulo de área máxima inscrito en una circunferencia de 10 cm. de radio.

Solución:



Condición que se tiene que dar: $x^2 + y^2 = 400 \Rightarrow y = \sqrt{400 - x^2}$

Función a maximizar: Área = $x \cdot y = x\sqrt{400 - x^2}$; $A = x\sqrt{400 - x^2}$

$$A' = 1 \cdot \sqrt{400 - x^2} + \frac{-2x}{2\sqrt{400 - x^2}} \cdot x = \sqrt{400 - x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{400 - x^2}} = \frac{400 - 2x^2}{\sqrt{400 - x^2}}$$

Si hacemos $A' = 0$, $400 - 2x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 200 \Rightarrow x = \pm 10\sqrt{2}$

Es claro que la solución es $x = 10\sqrt{2}$ ya que la negativa no tiene sentido.

Comprobaremos que es máximo calculando la segunda derivada:

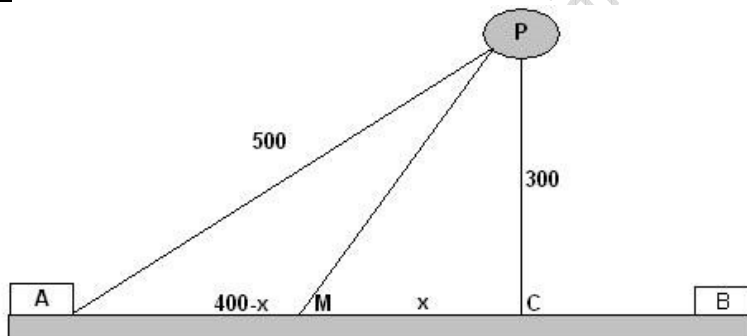
$$A'' = \frac{-4x\sqrt{400 - x^2} - \frac{-2x}{2\sqrt{400 - x^2}}(400 - 2x^2)}{400 - x^2}$$

Para $x = 10\sqrt{2}$, $A''(10\sqrt{2}) = \frac{-4 \cdot 10\sqrt{2} \sqrt{400 - 200} - 0}{200} = -\frac{\sqrt{2}\sqrt{200}}{5} < 0$ (máximo)

Si $x = 10\sqrt{2}$, $y = \sqrt{400 - (10\sqrt{2})^2} = 10\sqrt{2}$. Se trata de un cuadrado.

4.- En una carretera a través del desierto un automóvil debe ir desde la ciudad A hasta el oasis P situado a 500 Km. de distancia de A. Puede aprovechar para ello una carretera recta que une las ciudades A y B y que le permite ir a una velocidad de 100 Km/h, mientras que por el desierto la velocidad es de 60 Km/h. Sabiendo que la distancia más corta de P a la carretera que une las ciudades A y B es de 300 Km., determina la ruta que deberá usar para ir de A a P en el menor tiempo posible.

Solución:



La ruta a seguir es AMP.

Aplicando Pitágoras en el triángulo ACP se obtiene:

$$\overline{AC} = \sqrt{500^2 - 300^2} = 400$$

En el triángulo MCP se obtiene que $\overline{MP} = \sqrt{x^2 + 300^2}$

Y el tiempo que tarda el automóvil en recorrer la distancia AM + MP es:

$$t = \frac{400 - x}{100} + \frac{\sqrt{x^2 + 300^2}}{60}$$

Derivando, $t' = \frac{-1}{100} + \frac{1}{60} \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 300^2}} = \frac{-1}{100} + \frac{x}{60\sqrt{x^2 + 300^2}}$

Si hacemos $t' = 0$, $\frac{-1}{100} + \frac{x}{60\sqrt{x^2 + 300^2}} = 0 \Rightarrow \frac{x}{60\sqrt{x^2 + 300^2}} = \frac{1}{100}$

Es decir, $10x = 6\sqrt{x^2 + 300^2} \Rightarrow 100x^2 = 36x^2 + 36 \cdot 300^2 \Rightarrow$

$$64x^2 = 36 \cdot 300^2 \Rightarrow x^2 = \frac{36 \cdot 300^2}{64} \Rightarrow x = \pm 225$$

La solución negativa no tiene sentido. $AM = 400 - 225 = 175$

El automóvil deja la carretera a 175 Km. de la ciudad A.

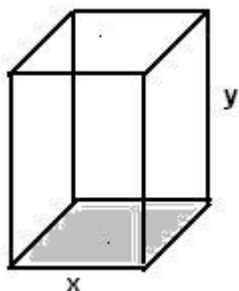
Podemos comprobar que es mínimo hallando la segunda derivada:

$$t'' = \frac{1 \cdot 60\sqrt{x^2 + 300^2} - 60 \cdot \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 300^2}}}{60^2(x^2 + 300^2)} = \frac{60(x^2 + 300^2) - 60x}{60^2(x^2 + 300^2)} \Rightarrow$$

$$t'' = \frac{60(x^2 + 300^2) - 60x}{60^2(x^2 + 300^2)\sqrt{x^2 + 300^2}}. \text{ Para } x = 225, t''(225) > 0 \text{ (mínimo)}$$

5.- Un depósito abierto de latón con base cuadrada y capacidad para 4.000 litros, ¿qué dimensiones debe tener para que su fabricación sea lo más económica posible?

Solución:



La función que tenemos que minimizar es el área del depósito: $A = x^2 + 4xy$

Con la condición de que el volumen $V = x^2y$ sea de 4000 litros.

$$x^2y = 4000 \Rightarrow y = \frac{4000}{x^2}, \text{ por tanto, } A = x^2 + 4x \cdot \frac{4000}{x^2}$$

$$A = x^2 + \frac{16000}{x} \text{ (función a minimizar)}$$

$$A = x^2 + 1600x^{-1}; A' = 2x - 1 \cdot 16000x^{-2} = 2x - \frac{16000}{x^2} = \frac{2x^3 - 16000}{x^2}$$

$$\text{Si hacemos } A' = 0, 2x^3 - 16000 = 0 \Rightarrow x^3 = 8000 \Rightarrow x = 20$$

$$\text{Segundo derivada: } A'' = \frac{6x^2 \cdot x^2 - 2x(2x^3 - 16000)}{x^4} = \frac{2x^3 + 32000}{x^3}$$

$$\text{Para } x = 20, A''(20) = \frac{2 \cdot 20^3 + 32000}{20^3} > 0 \Rightarrow \text{para } x = 20 \text{ la superficie es mínima.}$$

$$\text{Si } x = 20, y = \frac{4000}{20^2} = 10$$

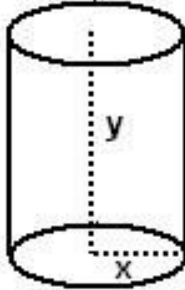
luego la caja debe tener 20 dm. de lado y 10 dm. de altura.

6.- Se desea construir una lata de conserva en forma de cilindro circular recto de área total 150 cm^2 y volumen máximo. Determina su generatriz y su radio.

Solución:

El área total de un cilindro es:

$$\text{Área} = 2\pi \times \text{radio} \times \text{generatriz} + \text{el área de las dos bases } (\pi \times \text{radio}^2 + \pi \times \text{radio}^2)$$



es decir, $A = 2\pi \cdot x \cdot y + 2\pi \cdot x^2 = 150$ (Condición que se tiene que cumplir)

$$\text{Y de aquí, } \pi \cdot x \cdot y + \pi \cdot x^2 = 75 \Rightarrow y = \frac{75 - \pi x^2}{\pi x}$$

El volumen del cilindro es igual al área de la base por la altura, por tanto,

$$V = \pi x^2 y = \pi x^2 \frac{75 - \pi x^2}{\pi x} = 75x - \pi x^3 \text{ (función a maximizar)}$$

$$\text{Derivando, } V' = 75 - 3\pi x^2$$

$$\text{Si hacemos } V' = 0, 75 - 3\pi x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{75}{3\pi} = \frac{25}{\pi} \Rightarrow x = \pm \frac{5}{\sqrt{\pi}}$$

$$\text{Segunda derivada: } V'' = -6\pi x$$

$$V''\left(\frac{5}{\sqrt{\pi}}\right) = -6\pi \cdot \frac{5}{\sqrt{\pi}} = -\frac{30\pi \cdot \sqrt{\pi}}{\pi} = -30\sqrt{\pi} < 0$$

Para $x = \frac{5}{\sqrt{\pi}}$ el volumen es máximo.

$$y = \frac{75 - \pi \frac{25}{\pi}}{\pi \cdot \frac{5}{\sqrt{\pi}}} = \frac{50}{\frac{5\pi}{\sqrt{\pi}}} = \frac{50\sqrt{\pi}}{5\pi} = \frac{10\sqrt{\pi}}{\pi}$$