



1. Ecuaciones de 1^{er} y 2^o grado

■ Piensa y calcula

Resuelve mentalmente las siguientes ecuaciones:

a) $x + 3 = 5$ b) $3x = 12$ c) $x^2 = 25$ d) $x(x - 7) = 0$ e) $5x^2 = 0$ f) $|x| = 7$

Solución:

a) $x = 2$ b) $x = 4$ c) $x = \pm 5$ d) $x = 0, x = 7$ e) $x = 0$ f) $x = \pm 7$

● Aplica la teoría

1. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\frac{3x-1}{4} - \frac{6x+5}{8} + 2 = 2x + \frac{1}{8}$
 b) $\frac{4x-3}{12} - \frac{5x+3}{6} + 10 = 3x - \frac{5x-2}{4} - \frac{5}{2}$

Solución:

a) $x = 1/2$ b) $x = 5$

2. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $x^2 + x - 6 = 0$ b) $x^2 - 10x + 25 = 0$
 c) $6x^2 + 5x - 4 = 0$ d) $2x^2 + 7x - 15 = 0$

Solución:

a) $x_1 = 2, x_2 = -3$ b) $x_1 = x_2 = 5$
 c) $x_1 = 1/2, x_2 = -4/3$ d) $x_1 = 3/2, x_2 = -5$

3. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $3x^2 - 12 = 0$ b) $2x^2 + 6x = 0$
 c) $4x^2 - 9 = 0$ d) $5x^2 + 7x = 0$

Solución:

a) $x_1 = 2, x_2 = -2$ b) $x_1 = 0, x_2 = -3$
 c) $x_1 = 3/2, x_2 = -3/2$ d) $x_1 = 0, x_2 = -7/5$

4. Sin resolver las siguientes ecuaciones, halla cuántas raíces tienen:

a) $2x^2 - 7x - 15 = 0$ b) $4x^2 + 12x + 9 = 0$
 c) $x^2 - 4x + 13 = 0$ d) $6x^2 - 7x + 3 = 0$

Solución:

a) $\Delta = 169 > 0$

Tiene dos raíces reales y distintas.

b) $\Delta = 0$

Tiene una sola raíz real, que es doble.

c) $\Delta = -36 < 0$

No tiene raíces reales.

d) $\Delta = -23 < 0$

No tiene raíces reales.

5. Halla la descomposición factorial de los siguientes trinomios de 2^o grado:

a) $x^2 + 5x - 14$ b) $6x^2 - x - 2$
 c) $3x^2 - 10x + 3$ d) $5x^2 + 24x - 5$

Solución:

a) $(x - 2)(x + 7)$
 b) $6(x - 2/3)(x + 1/2)$
 c) $3(x - 3)(x - 1/3)$
 d) $5(x + 5)(x - 1/5)$

6. Halla un número sabiendo que dicho número más su mitad y menos su sexta parte es igual a 16

Solución:

$x + x/2 - x/6 = 16$
 $x = 12$

2. Factorización de polinomios

■ Piensa y calcula

Factoriza mentalmente los siguientes polinomios y halla sus raíces:

- a) $x^2 + 5x$ b) $x^2 + 2x + 1$ c) $x^2 - 6x + 9$ d) $x^2 - 16$

Solución:

- a) $x(x + 5) \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = -5$ b) $(x + 1)^2 \Rightarrow x_1 = x_2 = -1$
c) $(x - 3)^2 \Rightarrow x_1 = x_2 = 3$ d) $(x + 4)(x - 4) \Rightarrow x_1 = -4, x_2 = 4$

● Aplica la teoría

7. Factoriza mentalmente los siguientes polinomios:

- a) $x^2 + 3x$ b) $x^2 - 4$
c) $x^2 - 2x + 1$ d) $x^2 + 4x + 4$

Solución:

- a) $x(x + 3)$ b) $(x + 2)(x - 2)$
c) $(x - 1)^2$ d) $(x + 2)^2$

8. Factoriza mentalmente los siguientes polinomios y halla sus raíces:

- a) $x^3 - 4x$
b) $x^3 + 2x^2 + x$
c) $x^4 - 25x^2$
d) $x^3 - 6x^2 + 9x$

Solución:

- a) $x(x + 2)(x - 2) \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = -2, x_3 = 2$
b) $x(x + 1)^2 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = x_3 = -1$
c) $x^2(x + 5)(x - 5) \Rightarrow x_1 = x_2 = 0, x_3 = -5, x_4 = 5$
d) $x(x - 3)^2 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = x_3 = 3$

9. Factoriza los siguientes polinomios y halla sus raíces:

- a) $x^3 - 4x^2 - 11x + 30$
b) $x^3 - x^2 - 8x + 12$

Solución:

- a) $(x - 2)(x + 3)(x - 5)$
 $x_1 = 2, x_2 = -3, x_3 = 5$
b) $(x + 3)(x - 2)^2$
 $x_1 = -3, x_2 = x_3 = 2$

10. Factoriza los siguientes polinomios y halla sus raíces:

- a) $x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 4$
b) $x^5 - 2x^4 - 2x^3 + 4x^2 + x - 2$

Solución:

- a) $(x - 1)^2(x + 2)^2$
 $x_1 = x_2 = 1, x_3 = x_4 = -2$
b) $(x - 1)^2(x + 1)^2(x - 2)$
 $x_1 = x_2 = 1, x_3 = x_4 = -1, x_5 = 2$

11. Factoriza los siguientes polinomios y halla sus raíces:

- a) $6x^3 - 7x^2 - 14x + 8$
b) $5x^4 - 33x^3 + 66x^2 - 28x - 24$

Solución:

- a) $6(x - 2)(x - 1/2)(x + 4/3)$
 $x_1 = 2, x_2 = 1/2, x_3 = -4/3$
b) $5(x - 2)^2(x - 3)(x + 2/5)$
 $x_1 = x_2 = 2, x_3 = 3, x_4 = -2/5$

12. Halla un polinomio que tenga las siguientes raíces:

- a) $x_1 = 1, x_2 = 2$
b) $x_1 = 3/5, x_2 = 0$
c) $x_1 = 2, x_2 = -1, x_3 = 3$
d) $x_1 = 0, x_2 = x_3 = 1, x_4 = 3$

Solución:

- a) $(x - 1)(x - 2) = x^2 - 3x + 2$
b) $5x(x - 3/5) = 5x^2 - 3x$
c) $(x - 2)(x + 1)(x - 3) = x^3 - 4x^2 + x + 6$
d) $x(x - 1)^2(x - 3) = x^4 - 5x^3 + 7x^2 - 3x$

3. Fracciones algebraicas

■ Piensa y calcula

Factoriza mentalmente el numerador y el denominador, y simplifica la fracción algebraica $\frac{x^2 + x}{x^2 + 2x + 1}$

Solución:

$$\frac{x(\cancel{x+1})}{(\cancel{x+1})^2} = \frac{x}{x+1}$$

● Aplica la teoría

13. Descompón mentalmente en factores el numerador y el denominador, y simplifica las siguientes fracciones algebraicas:

a) $\frac{x^2 + x}{2x + 2}$

b) $\frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 - 1}$

Solución:

a) $\frac{x(\cancel{x+1})}{2(\cancel{x+1})} = \frac{x}{2}$

b) $\frac{(x+1)^2}{(\cancel{x+1})(x-1)} = \frac{x+1}{x-1}$

14. Completa:

a) $\frac{x+3}{x^2-9} = \frac{2x+1}{\dots}$

b) $\frac{x^2-1}{x-1} = \frac{\dots}{2x+5}$

Solución:

a) $2x^2 - 5x - 3$

b) $2x^2 + 7x + 5$

15. Calcula:

a) $\frac{2}{x-1} + \frac{1}{x+1}$

b) $\frac{2x}{x^2-4} - \frac{x+1}{x+2}$

Solución:

a) $\frac{3x+1}{x^2-1}$

b) $\frac{-x^2+3x+2}{x^2-4}$

16. Efectúa:

a) $\frac{x+2}{x-1} \cdot \frac{x^2}{x^2-4}$

b) $\frac{x+3}{x+1} \cdot \frac{x^2+2}{x^2-9}$

Solución:

a) $\frac{x^2}{x^2-3x+2}$

b) $\frac{x^2+2}{x^2-2x-3}$

17. Calcula:

a) $\frac{x+2}{x+4} : \frac{x^2-4}{x^2-16}$

b) $\frac{2x+2}{x^2+1} : \frac{x^2-1}{3x^2+3}$

Solución:

a) $\frac{x-4}{x-2}$

b) $\frac{6}{x-1}$

18. Opera y simplifica:

a) $\left(\frac{2}{x+1} - \frac{1}{x-2}\right) : \frac{2}{x^2-4x+4}$

b) $\left(\frac{1}{x^2-9} + \frac{1}{x-3}\right)\left(\frac{1}{x} : \frac{1}{x+4}\right)$

Solución:

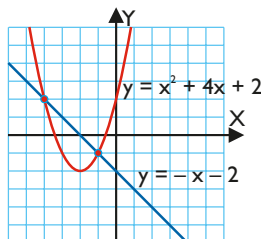
a) $\frac{x^2-7x+10}{2(x+1)}$

b) $\frac{(x+4)^2}{x(x^2-9)}$

4. Aplicaciones de las ecuaciones de 2° grado

■ Piensa y calcula

Observando la representación gráfica, calcula las soluciones del sistema:
$$\left. \begin{array}{l} y = -x - 2 \\ y = x^2 + 4x + 2 \end{array} \right\}$$



Solución:

$$x_1 = -4, y_1 = 2 \quad x_2 = -1, y_2 = -1$$

● Aplica la teoría

19. Resuelve las siguientes ecuaciones:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } x^4 - 10x^2 + 9 = 0 & \text{b) } x^4 - 3x^2 - 4 = 0 \\ \text{c) } x^6 - 9x^3 + 8 = 0 & \text{d) } x^6 + 7x^3 - 8 = 0 \end{array}$$

Solución:

$$\begin{array}{l} \text{a) } x_1 = 1, x_2 = -1, x_3 = 3, x_4 = -3 \\ \text{b) } x_1 = 2, x_2 = -2 \\ \text{c) } x_1 = 1, x_2 = 2 \\ \text{d) } x_1 = 1, x_2 = -2 \end{array}$$

20. Resuelve las ecuaciones racionales:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \frac{2x+3}{x-1} - 5 = \frac{5x-4}{x+1} & \text{b) } \frac{x-2}{x} = \frac{4x-3}{x-2} \\ \text{c) } \frac{x+1}{x} - \frac{3x-1}{x+1} = -\frac{2}{3} & \text{d) } \frac{3x-1}{x+2} + \frac{x}{x-2} = -\frac{1}{5} \end{array}$$

Solución:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } x_1 = 2, x_2 = -1/4 & \text{b) } x_1 = 1, x_2 = -4/3 \\ \text{c) } x_1 = 3, x_2 = -1/4 & \text{d) } x_1 = 1/3, x_2 = 6/7 \end{array}$$

21. Resuelve las ecuaciones irracionales:

$$\begin{array}{l} \text{a) } 3x + \sqrt{17-4x} = 4x + 1 \\ \text{b) } 3 - x + \sqrt{3x+12} = x + 8 \\ \text{c) } \sqrt{2x+6} - \sqrt{x-1} = 2 \\ \text{d) } \sqrt{5x+1} = 5 - \sqrt{x-2} \end{array}$$

Solución:

$$\text{a) } x = 2 \quad \text{b) } x = -1 \quad \text{c) } x = 5 \quad \text{d) } x = 3$$

22. Resuelve los siguientes sistemas y di si son compatibles o incompatibles:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \left. \begin{array}{l} x - 2y = 0 \\ x^2 + y^2 = 20 \end{array} \right\} & \text{b) } \left. \begin{array}{l} 2x + y = 2 \\ y = x^2 - 3x - 4 \end{array} \right\} \end{array}$$

Solución:

$$\begin{array}{l} \text{a) } x_1 = 4, y_1 = 2; x_2 = -4, y_2 = -2 \\ \text{Sistema compatible.} \\ \text{b) } x_1 = 3, y_1 = -4; x_2 = -2, y_2 = 6 \\ \text{Sistema compatible.} \end{array}$$

23. Halla un número sabiendo que dicho número más su inverso es igual a $26/5$

Solución:

$$x + 1/x = 26/5 \Rightarrow x = 5, x = 1/5$$

24. Halla un número, sabiendo que el número menos la raíz cuadrada, de dicho número al cuadrado menos 7 unidades, es igual a uno.

Solución:

$$\begin{array}{l} x - \sqrt{x^2 - 7} = 1 \\ x = 4 \end{array}$$

5. Ecuaciones exponenciales, logarítmicas y sistemas

■ Piensa y calcula

Resuelve mentalmente las siguientes ecuaciones exponenciales y logarítmicas:

- a) $2^x = 8$ b) $2^x = 1/8$ c) $2^x = 1$ d) $2^x = 2$ e) $\log_5 x = 3$ f) $\log_5 x = -3$ g) $\log_5 x = 0$ h) $\log_5 x = 1$

Solución:

- a) $x = 3$ b) $x = -3$ c) $x = 0$ d) $x = 1$
 e) $x = 125$ f) $x = 1/125$ g) $x = 1$ h) $x = 5$

● Aplica la teoría

25. Resuelve las siguientes ecuaciones exponenciales y logarítmicas:

- a) $2^x + 2^{x+1} = 24$ b) $9^x - 10 \cdot 3^x + 9 = 0$
 c) $5^{x-2} - 3^{x+1} = 0$ d) $\log(x+3) + \log x = 1$

Solución:

- a) $x = 3$ b) $x_1 = 0, x_2 = 2$
 c) $x = 8,45$ d) $x = 2$

26. Resuelve las siguientes ecuaciones exponenciales y logarítmicas:

- a) $4 \log x + 1 = \log 16 + \log 5x$
 b) $4^x - 10 \cdot 2^x + 16 = 0$
 c) $5^{x-1} + 5^x + 5^{x+1} = 31$
 d) $6^{x-3} - 5^{x+4} = 0$

Solución:

- a) $x = 2$ b) $x_1 = 3, x_2 = 1$
 c) $x = 1$ d) $x = 64,79$

27. Resuelve los sistemas:

- a) $\begin{cases} 2^x + 3^y = 11 \\ 2^{x+1} - 3^{y-1} = 1 \end{cases}$
 b) $\begin{cases} 2 \log x + \log y = 2 \\ \log xy = 1 \end{cases}$

Solución:

- a) $x = 1, y = 2$ b) $x = 10, y = 1$

28. En la fórmula del capital final, en el interés compuesto $C = c(1+r)^t$, donde **C** es el capital final, **c** el capital inicial, **r** el tanto por uno y **t** el número de años. Calcula el número de años que tienen que transcurrir para que un capital de 10 000 € colocado al 5 % se transforme en 15 000 €

Solución:

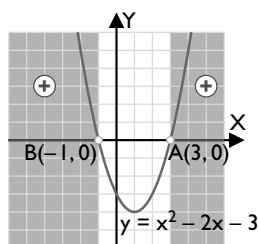
$$10\,000 \cdot 1,05^t = 15\,000$$

$$t = 8,3 \text{ años}$$

6. Inecuaciones polinómicas y racionales

■ Piensa y calcula

Observando la gráfica, halla los intervalos de los valores de **x** en los que la parábola $y = x^2 - 2x - 3$ es positiva.



Solución:

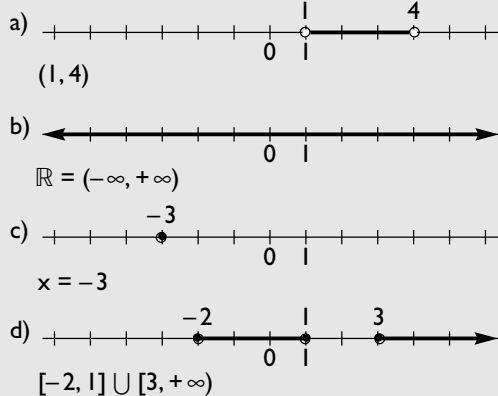
Positiva (+) : $(-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$

● Aplica la teoría

29. Resuelve las siguientes inecuaciones polinómicas:

- a) $x^2 - 5x + 4 < 0$ b) $x^2 + x + 2 > 0$
 c) $x^2 + 6x + 9 \leq 0$ d) $x^3 - 2x^2 - 5x + 6 \geq 0$

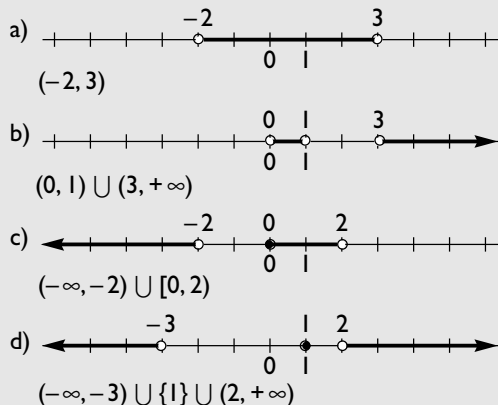
Solución:



30. Resuelve las siguientes inecuaciones racionales:

- a) $\frac{x+2}{x-3} < 0$ b) $\frac{x^2-3x}{x-1} > 0$
 c) $\frac{x}{x^2-4} \leq 0$ d) $\frac{x^2-2x+1}{x^2+x-6} \geq 0$

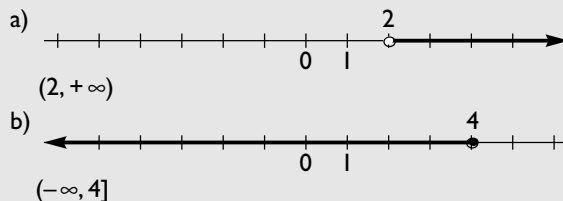
Solución:



31. Resuelve las siguientes inecuaciones polinómicas:

- a) $x^3 - 3x - 2 > 0$
 b) $x^3 - 8x^2 + 20x - 16 \leq 0$

Solución:



32. Dada la función $f(x) = -x^2 + 6x - 8$, halla:

- a) cuándo vale cero.
 b) cuándo es positiva.
 c) cuándo es negativa.

Solución:

- a) $x_1 = 2, x_2 = 4$
 b) $(2, 4)$
 c) $(-\infty, 2) \cup (4, +\infty)$

33. Dada la función $f(x) = \frac{x^2 - x}{x^2 - 4}$, halla:

- a) cuándo vale cero.
 b) cuándo es positiva.
 c) cuándo es negativa.

Solución:

- a) $x_1 = 0, x_2 = 1$
 b) $(-\infty, -2) \cup (0, 1) \cup (2, +\infty)$
 c) $(-2, 0) \cup (1, 2)$

7. Método de Gauss

■ Piensa y calcula

Calcula mentalmente el valor de z en la 3ª ecuación. Sustituye ese valor en la 2ª ecuación y calcula mentalmente el valor de y . Sustituye el valor de z y de y en la 1ª ecuación, y calcula mentalmente el valor de x

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ y + z = 6 \\ 3z = 6 \end{cases}$$

Solución:

$$z = 2 \quad y = 4 \quad x = -2$$

● Aplica la teoría

34. Resuelve, aplicando el método de Gauss, los sistemas:

$$\text{a) } \begin{cases} 2x + y - 3z = 1 \\ x - 2y + 4z = 19 \\ 3x + 4y - z = 1 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2x - y + 3z = 11 \\ x + 2y - z = -2 \end{cases}$$

Solución:

a) $x = 5, y = -3, z = 2$

b) $x = 3, y = -2, z = 1$

35. Resuelve, aplicando el método de Gauss, los sistemas:

$$\text{a) } \begin{cases} 2x - y + z = -8 \\ x + 3y - 2z = 5 \\ 2x + y + 3z = 4 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} x + y - z = 0 \\ 2x - 3y + z = 13 \\ -3x + 2y + 5z = -8 \end{cases}$$

Solución:

a) $x = -3, y = 4, z = 2$

b) $x = 3, y = -2, z = 1$

36. Resuelve, aplicando el método de Gauss, los sistemas:

$$\text{a) } \begin{cases} 2x - y + z = 11 \\ x - y + 3z = 15 \\ 3x + 2y - 5z = -17 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} 4x - y - z = 0 \\ 2x + y + z = 3 \\ 6x - 2y - 3z = -6 \end{cases}$$

Solución:

a) $x = 2, y = -4, z = 3$

b) $x = 1/2, y = -3, z = 5$

37. Calcula tres números tales que la suma de los tres es 9. El mediano disminuido en una unidad es la tercera parte de la suma del mayor y el menor. La diferencia entre el mayor y el menor excede en uno al mediano.

Solución:

x: el número menor.

y: el número mediano.

z: el número mayor.

$$\begin{cases} x + y + z = 9 \\ y - 1 = (x + z)/3 \\ z - x = y + 1 \end{cases}$$

$x = 1, y = 3, z = 5$

8. Resolución de problemas

■ Piensa y calcula

Halla mentalmente tres números enteros consecutivos menores que 7, de forma que sean los lados de un triángulo rectángulo.

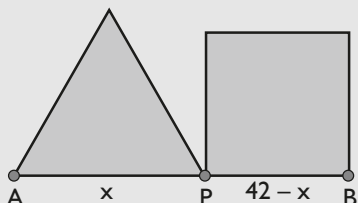
Solución:

3, 4 y 5, ya que $3^2 + 4^2 = 5^2$

● Aplica la teoría

38. Un segmento AB tiene de longitud 42 cm. Halla un punto P de dicho segmento de forma que el triángulo equilátero construido sobre AP tenga el mismo perímetro que el cuadrado construido sobre PB.

Solución:



Medida de los segmentos:

$$AP = x, PB = 42 - x$$

$$3x = 4(42 - x)$$

$$x = 24 \text{ cm}$$

39. Entre Sonia y Alba tienen 300 €. Alba tiene el triple de dinero que Sonia. ¿Cuánto dinero tiene cada una?

Solución:

Sonia tiene: x

Alba tiene: $300 - x$

$$300 - x = 3x$$

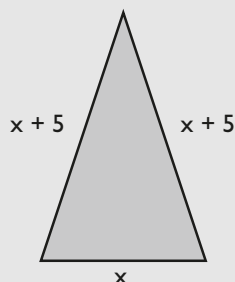
$$x = 75 \text{ €}$$

Sonia tiene: 75 €

Alba tiene: 225 €

40. En un triángulo isósceles, cada uno de los lados iguales mide 5 m más que el desigual. Si el perímetro mide 34 m, ¿cuánto mide cada lado?

Solución:



El lado desigual: x

Cada lado igual: $x + 5$

$$x + 2(x + 5) = 34$$

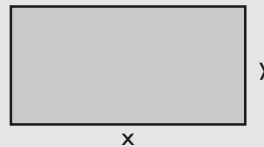
$$x = 8 \text{ m}$$

El lado desigual mide 8 m

Cada lado igual mide 13 m

41. En un prado se quiere cercar una zona rectangular para que pascen unas cabras. Se tiene 24 m de valla y queremos que el área del recinto delimitado sea de 32 m². Calcula las dimensiones de la zona vallada.

Solución:



Largo: x

Ancho: y

$$2x + 2y = 24$$

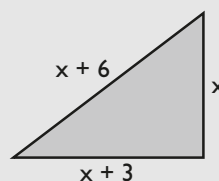
$$xy = 32$$

$$x = 8 \text{ m}, y = 4 \text{ m}$$

El largo mide 8 m, y el ancho mide 4 m

42. Los lados de un triángulo rectángulo son números que se diferencian en tres unidades. Calcula las longitudes de dichos lados.

Solución:



Cateto menor: x

Cateto mayor: $x + 3$

Hipotenusa: $x + 6$

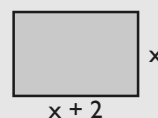
$$x^2 + (x + 3)^2 = (x + 6)^2$$

Si $x = 9$, los lados miden: 9, 12 y 15

Si $x = -3$, los lados miden: -3, 0 y 3, que no son valores válidos.

43. Un piso tiene forma rectangular y su área es de 120 m². Si el largo mide 2 m más que el ancho, ¿cuáles son las dimensiones del piso?

Solución:



Ancho: x

Largo: $x + 2$

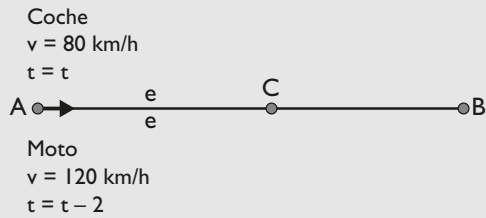
$$x(x + 2) = 120$$

Si $x = 10$, el ancho es 10 m y el largo 12 m

Si $x = -12$, los lados son -12 y 10, que no son valores válidos.

44. Un coche sale de una ciudad A hacia otra ciudad B, que dista 900 km de A, con una velocidad de 80 km/h. Dos horas más tarde sale de la misma ciudad A con dirección a la ciudad B una moto a 120 km/h. ¿Cuánto tiempo tardará en alcanzar la moto al coche? ¿A qué distancia de la ciudad A lo alcanzará?

Solución:



Coche

e: e

v: 80 km/h

t: t

$e = vt$

$e = 80t$

Moto

e: e

v: 120 km/h

t: $t - 2$

$e = vt$

$e = 120(t - 2)$

Hay que resolver el sistema:

$$\left. \begin{array}{l} e = 80t \\ e = 120(t - 2) \end{array} \right\}$$

$t = 6 \text{ h}$

$e = 80 \cdot 6 = 480 \text{ km}$

1. Ecuaciones de 1^{er} y 2^o grado

45. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $x + \frac{x}{2} + \frac{x}{3} + \frac{x}{4} = 25$

b) $\frac{2x-3}{4} - \frac{5x+1}{6} = \frac{1}{12} - 2x$

c) $\frac{3x-1}{6} - \frac{2x+5}{8} = 4x - \frac{8}{3}$

d) $-\frac{2x-5}{3} + \frac{-3x+7}{5} + 2x = \frac{8}{5}$

Solución:

a) $x = 12$

b) $x = 3/5$

c) $x = 1/2$

d) $x = -2$

46. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $x^2 + 3x - 10 = 0$

b) $x^2 - 6x + 9 = 0$

c) $3x^2 - 7x - 6 = 0$

d) $6x^2 + 7x + 2 = 0$

Solución:

a) $x_1 = 2, x_2 = -5$

b) $x_1 = x_2 = 3$

c) $x_1 = 3, x_2 = -2/3$

d) $x_1 = -1/2, x_2 = -2/3$

47. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $5x^2 - 20 = 0$

b) $3x^2 + 6x = 0$

c) $9x^2 - 25 = 0$

d) $3x^2 - 8x = 0$

Solución:

a) $x_1 = 2, x_2 = -2$

b) $x_1 = 0, x_2 = -2$

c) $x_1 = 5/3, x_2 = -5/3$

d) $x_1 = 0, x_2 = 8/3$

48. Sin resolver las siguientes ecuaciones, halla cuántas raíces tienen:

a) $x^2 + 10x + 25 = 0$

b) $3x^2 + 8x - 3 = 0$

c) $x^2 - 6x + 13 = 0$

d) $x^2 + 8x + 15 = 0$

Solución:

a) $\Delta = 0$

Tiene una sola raíz real, que es doble.

b) $\Delta = 100 > 0$

Tiene dos raíces reales y distintas.

c) $\Delta = -16 < 0$

No tiene raíces reales.

d) $\Delta = 4 > 0$

Tiene dos raíces reales y distintas.

49. Halla la descomposición factorial de los siguientes trinomios de 2^o grado:

a) $x^2 - x - 6$

b) $9x^2 + 12x + 4$

c) $2x^2 - 9x - 5$

d) $6x^2 - 5x - 6$

Solución:

a) $(x+2)(x-3)$

b) $9(x+2/3)^2$

c) $2(x-5)(x+1/2)$

d) $6(x-3/2)(x+2/3)$

50. Halla ecuaciones de 2^o grado que tengan las siguientes raíces:

a) $x_1 = -3, x_2 = 1$

b) $x_1 = -2, x_2 = 3$

c) $x_1 = -1/2, x_2 = 5$

d) $x_1 = 3, x_2 = 3/4$

Solución:

a) $(x+3)(x-1) = x^2 + 2x - 3$

b) $(x+2)(x-3) = x^2 - x - 6$

c) $2(x+1/2)(x-5) = 2x^2 - 9x - 5$

d) $4(x-3)(x-3/4) = 4x^2 - 15x + 9$

51. Sin resolver las siguientes ecuaciones, halla la suma y el producto de sus raíces:

a) $x^2 + 2x - 8 = 0$

b) $x^2 - 7x + 10 = 0$

c) $15x^2 + x - 2 = 0$

d) $4x^2 - 19x - 5 = 0$

Solución:

a) $S = -2, P = -8$

b) $S = 7, P = 10$

c) $S = -1/15, P = -2/15$

d) $S = 19/4, P = -5/4$

2. Factorización de polinomios

52. Factoriza mentalmente los siguientes polinomios:

a) $x^4 - 2x^2$

b) $x^2 - 16$

c) $x^2 + 6x + 9$

d) $x^2 - 10x + 25$

Solución:

a) $x^2(x + \sqrt{2})(x - \sqrt{2})$

b) $(x+4)(x-4)$

c) $(x+3)^2$

d) $(x-5)^2$

53. Factoriza mentalmente los siguientes polinomios y halla sus raíces:

a) $x^3 - 9x$

b) $x^3 + 10x^2 + 25x$

c) $x^4 - 16x^2$

d) $x^3 - 8x^2 + 16x$

Solución:

a) $x(x+3)(x-3) \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = -3, x_3 = 3$

b) $x(x+5)^2 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = x_3 = -5$

c) $x^2(x+4)(x-4) \Rightarrow x_1 = x_2 = 0, x_3 = -4, x_4 = 4$

d) $x(x-4)^2 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = x_3 = 4$

Ejercicios y problemas

54. Halla la descomposición factorial de los siguientes polinomios y calcula sus raíces:

- a) $15x^3 - 8x^2 - 9x + 2$
- b) $5x^3 - 2x^2 - 20x + 8$
- c) $49x^3 - 28x^2 + 4x$
- d) $3x^4 - x^3 - 57x^2 - 71x + 30$

Solución:

- a) $15(x-1)(x-1/5)(x+2/3)$
 $x_1 = 1, x_2 = 1/5, x_3 = -2/3$
- b) $5(x-2)(x+2)(x-2/5)$
 $x_1 = 2, x_2 = -2, x_3 = 2/5$
- c) $49x(x-2/7)^2$
 $x_1 = 0, x_2 = x_3 = 2/7$
- d) $3(x+2)(x+3)(x-5)(x-1/3)$
 $x_1 = -2, x_2 = -3, x_3 = 5, x_4 = 1/3$

55. Factoriza los siguientes polinomios y halla sus raíces:

- a) $x^3 - 5x^2 - 2x + 10$
- b) $8x^5 + 18x^4 + x^3 - 6x^2$

Solución:

- a) $(x-5)(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})$
 $x_1 = 5, x_2 = \sqrt{2}, x_3 = -\sqrt{2}$
- b) $8x^2(x+2)(x-1/2)(x+3/4)$
 $x_1 = x_2 = 0, x_3 = -2, x_4 = 1/2, x_5 = -3/4$

56. Escribe un polinomio que tenga las siguientes raíces:

- a) $x_1 = 2, x_2 = 3, x_3 = 1$
- b) $x_1 = x_2 = 3, x_3 = 0$
- c) $x_1 = 1, x_2 = -2, x_3 = 3$
- d) $x_1 = 2, x_2 = x_3 = 1, x_4 = -2$

Solución:

- a) $(x-2)(x-3)(x-1) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$
- b) $(x-3)^2 x = x^3 - 6x^2 + 9x$
- c) $(x-1)(x+2)(x-3) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$
- d) $(x-2)(x-1)^2(x+2) = x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 8x - 4$

3. Fracciones algebraicas

57. Descompón mentalmente en factores el numerador y el denominador; y simplifica las siguientes fracciones algebraicas:

- a) $\frac{3x^2 - 3x}{6x - 6}$
- b) $\frac{x^2 + 4x + 4}{x^2 - 4}$

Solución:

- a) $\frac{3x(\cancel{x-1})}{6(\cancel{x-1})} = \frac{x}{2}$
- b) $\frac{(x+2)^2}{(\cancel{x+2})(x-2)} = \frac{x+2}{x-2}$

58. Completa:

$$a) \frac{x+1}{x^2-1} = \frac{2x+3}{\dots} \quad b) \frac{x^2+3x}{x^2-9} = \frac{\dots}{x-3}$$

Solución:

- a) $2x^2 + x - 3$
- b) x

59. Calcula:

$$a) \frac{3x}{x-2} + \frac{5}{x+2} \quad b) \frac{x}{x^2+6x+9} - \frac{2x+1}{x+3}$$

Solución:

$$a) \frac{3x^2 + 11x - 10}{x^2 - 4} \quad b) \frac{-2x^2 - 6x - 3}{(x+3)^2}$$

60. Efectúa:

$$a) \frac{x+1}{x-1} \cdot \frac{3x^2+1}{x^2+2x+1} \quad b) \frac{x}{x+1} \cdot \frac{x-3}{x^2}$$

Solución:

$$a) \frac{3x^2+1}{x^2-1} \quad b) \frac{x-3}{x^2+x}$$

61. Calcula:

$$a) \frac{x+1}{x+5} : \frac{x^2-1}{x^2+10x+25} \quad b) \frac{x+2}{x+1} : \frac{x^2+4x+4}{5x^2+5}$$

Solución:

$$a) \frac{x+5}{x-1} \quad b) \frac{5}{x+2}$$

62. Opera y simplifica:

$$a) \left(\frac{5x}{x-1} - \frac{2x+3}{x-2} \right) : \frac{x-5}{x-2}$$

$$b) \left(\frac{1}{2x-3} + 4 \right) \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x-3} \right)$$

Solución:

$$a) \frac{3x^2 - 11x + 3}{x^2 - 6x + 5} \quad b) \frac{-24x + 33}{2x^3 - 9x^2 + 9x}$$

4. Aplicaciones de las ecuaciones de 2º grado

63. Resuelve las siguientes ecuaciones:

- a) $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$
- b) $x^4 - 3x^2 - 4 = 0$
- c) $x^4 - 10x^2 + 25 = 0$
- d) $x^6 - 7x^3 - 8 = 0$

Solución:

- a) $x_1 = 2, x_2 = -2, x_3 = 3, x_4 = -3$
 b) $x_1 = 2, x_2 = -2$
 c) $x_1 = \sqrt{5}, x_2 = -\sqrt{5}$
 d) $x_1 = 2, x_2 = -1$

64. Resuelve las siguientes ecuaciones:

- a) $\frac{5x-1}{x+1} - \frac{2x+3}{x} = \frac{21}{2}$
 b) $12 + \sqrt{3x+10} = 2x+7$
 c) $3x - \frac{2x-1}{x+3} = \frac{3}{2}$
 d) $\sqrt{x+6} + 4 = 6 + \sqrt{2x-5}$

Solución:

- a) $x_1 = -2, x_2 = -1/5$
 b) $x = 5$
 c) $x_1 = 1/2, x_2 = -7/3$
 d) $x = 3$

65. Resuelve las siguientes ecuaciones:

- a) $5x - \sqrt{x+2} = 3x+2$
 b) $\frac{7x-3}{x+2} - \frac{5x+1}{x-2} + 8 = \frac{5}{3}$
 c) $\sqrt{x+9} + \sqrt{x} = 9$
 d) $\frac{2x+3}{x-3} - \frac{x}{x+3} = \frac{5x+2}{x^2-9} - 5$

Solución:

- a) $x = 2$
 b) $x_1 = 4, x_2 = -16/25$
 c) $x = 16$
 d) $x_1 = 2, x_2 = -19/6$

66. Resuelve los siguientes sistemas y di si son compatibles o incompatibles:

- a) $\begin{cases} 5x - y = 3 \\ 5x^2 - y = 13 \end{cases}$ b) $\begin{cases} y = \frac{6}{x} \\ 2y = 3x \end{cases}$

Solución:

- a) $x_1 = 2, y_1 = 7; x_2 = -1, y_2 = -8$
 El sistema es compatible.
 b) $x_1 = 2, y_1 = 3; x_2 = -2, y_2 = -3$
 El sistema es compatible.

67. Resuelve los siguientes sistemas y di si son compatibles o incompatibles:

- a) $\begin{cases} x + y = 5 \\ x^2 - y^2 = 9 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \frac{4}{3}x + y = \frac{25}{3} \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases}$

Solución:

- a) $x = 17/5, y = 8/5$
 El sistema es compatible.
 b) $x = 4, y = 3$
 El sistema es compatible.

68. Resuelve los siguientes sistemas y di si son compatibles o incompatibles:

- a) $\begin{cases} 8x - y^2 = 0 \\ 2x - y = 8 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 4x = y^2 \\ 2x - y = -2 \end{cases}$

Solución:

- a) $x_1 = 2, y_1 = -4; x_2 = 8, y_2 = 8$
 El sistema es compatible.
 b) No tiene solución real.
 El sistema es incompatible.

5. Ecuaciones exponenciales, logarítmicas y sistemas

69. Resuelve las siguientes ecuaciones exponenciales y logarítmicas:

- a) $3^x + 3^{x-1} = 12$
 b) $4^x - 10 \cdot 2^x + 16 = 0$
 c) $2^{x+1} = 3^{x-1}$
 d) $\log(x+3) - \log(x-2) + 2 \log 5 = 2$

Solución:

- a) $x = 2$ b) $x_1 = 3, x_2 = 1$
 c) $x = 4,42$ d) $x = 11/3$

70. Resuelve las siguientes ecuaciones exponenciales y logarítmicas:

- a) $3^{x+2} - 4^{x-3} = 0$
 b) $5^{x+2} - 4 \cdot 5^{x+1} - 8 \cdot 5^{x-1} = 85$
 c) $\log_3(5x+2) - \log_3(2x-1) = 1$
 d) $4 \cdot 2^{2x} - 33 \cdot 2^x + 8 = 0$

Solución:

- a) $x = 22,09$ b) $x = 2$
 c) $x = 5$ d) $x_1 = 3, x_2 = -2$

Ejercicios y problemas

71. Resuelve las siguientes ecuaciones exponenciales y logarítmicas:

- a) $Lx + L(x+1) - L2 = L3$
 b) $3 \cdot 3^{2x} - 28 \cdot 3^x + 9 = 0$
 c) $2^{x-2} + 2^{x-1} + 2^x + 2^{x+1} = 30$
 d) $5^{x-2} - 4^{x+1} = 0$

Solución:

- a) $x = 2$
 b) $x_1 = 2, x_2 = -1$
 c) $x = 3$
 d) $x = 20,64$

72. Resuelve las siguientes ecuaciones exponenciales y logarítmicas:

- a) $4^{x+1} - 7^{x-1} = 0$
 b) $3^{x-1} + 3^x + 3^{x+1} = 39$
 c) $\log_2(2x+5) - \log_2 x + \log_2 3 = \log_2 11$
 d) $5^{2x} - 6 \cdot 5^x + 5 = 0$

Solución:

- a) $x = 5,95$
 b) $x = 2$
 c) $x = 3$
 d) $x_1 = 0, x_2 = 1$

73. Resuelve los sistemas:

- a) $\begin{cases} x - y = 2 \\ 5 \cdot 2^x - 2 \cdot 4^{y+1} = 8 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + y = 11 \\ \log x = \log y + 1 \end{cases}$

Solución:

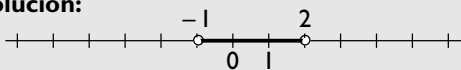
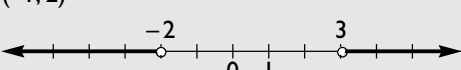
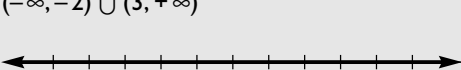
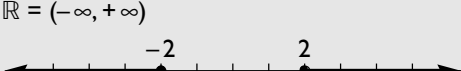
- a) $x_1 = 1, y_1 = -1; x_2 = 3, y_2 = 1$
 b) $x = 10, y = 1$

6. Inecuaciones polinómicas y racionales

74. Resuelve las siguientes inecuaciones polinómicas:

- a) $x^2 - x - 2 < 0$
 b) $x^2 - x - 6 > 0$
 c) $-x^2 + 4x - 4 \leq 0$
 d) $x^2 - 4 \geq 0$

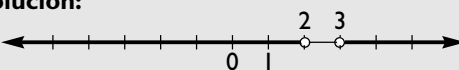
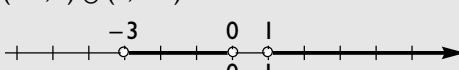
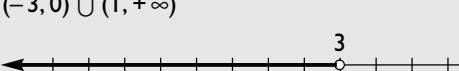
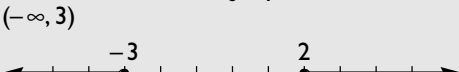
Solución:

- a) 
 $(-1, 2)$
 b) 
 $(-\infty, -2) \cup (3, +\infty)$
 c) 
 $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
 d) 
 $(-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$

75. Resuelve las siguientes inecuaciones racionales:

- a) $\frac{x-2}{3-x} < 0$
 b) $\frac{x+3}{x^2-x} > 0$
 c) $\frac{x^2+2}{x-3} \leq 0$
 d) $\frac{x^2+x-6}{x^2-2x+1} \geq 0$

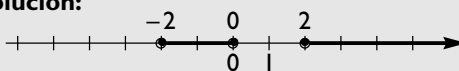
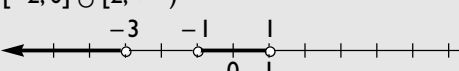
Solución:

- a) 
 $(-\infty, 2) \cup (3, +\infty)$
 b) 
 $(-3, 0) \cup (1, +\infty)$
 c) 
 $(-\infty, 3)$
 d) 
 $(-\infty, -3] \cup [2, +\infty)$

76. Resuelve las siguientes inecuaciones polinómicas:

- a) $x^3 - 4x \geq 0$
 b) $x^3 + 3x^2 - x - 3 < 0$

Solución:

- a) 
 $[-2, 0] \cup [2, +\infty)$
 b) 
 $(-\infty, -3) \cup (-1, 1)$

77. Dada la función $f(x) = -x^2 + 2x + 3$, halla:

- a) cuándo vale cero.
 b) cuándo es positiva.
 c) cuándo es negativa.

Solución:

- a) $x_1 = 3, x_2 = -1$
 b) $(-1, 3)$
 c) $(-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$

78. Dada la función $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2-9}$, halla:

- a) cuándo vale cero.
 b) cuándo es positiva.
 c) cuándo es negativa.

Solución:

- a) $x_1 = -1, x_2 = 1$
 b) $(-\infty, -3) \cup (-1, 1) \cup (3, +\infty)$
 c) $(-3, -1) \cup (1, 3)$

7. Método de Gauss

79. Resuelve, aplicando el método de Gauss, los siguientes sistemas:

$$\begin{array}{l} \text{a) } \left. \begin{array}{l} x + y + z = 6 \\ 2x - y - 3z = -9 \\ 3x + y - 2z = -1 \end{array} \right\} \quad \text{b) } \left. \begin{array}{l} 2x + y - 2z = -10 \\ 3x - 4y + 5z = 14 \\ x + y - z = -4 \end{array} \right\} \end{array}$$

Solución:

a) $x = 1, y = 2, z = 3$ b) $x = -1, y = 2, z = 5$

80. Resuelve, aplicando el método de Gauss, los siguientes sistemas:

$$\begin{array}{l} \text{a) } \left. \begin{array}{l} 2x - 3y + z = 10 \\ x + y - 2z = -5 \\ 5x - 2y - 2z = 6 \end{array} \right\} \quad \text{b) } \left. \begin{array}{l} 3x - 2y - z = 7 \\ 4x + y - 2z = -5 \\ 2x - 3y - 4z = -7 \end{array} \right\} \end{array}$$

Solución:

a) $x = 2, y = -1, z = 3$ b) $x = 2, y = -3, z = 5$

8. Resolución de problemas

81. Ismael tiene tres años más que Ana, y Sonia tiene 2 años más que Ismael. Entre los tres tienen 53 años. ¿Cuántos años tiene cada uno?

Solución:

Ana: x Ismael: $x + 3$ Sonia: $x + 5$
 $x + x + 3 + x + 5 = 53 \Rightarrow x = 15$
 Ana: 15 años. Ismael: 18 años. Sonia: 20 años.

82. Cada uno de los lados iguales de un triángulo isósceles mide el triple que el lado desigual. Si el perímetro mide 42 m, ¿cuánto mide cada lado?

Solución:



El lado desigual: x
 Cada lado igual: $3x$
 $x + 2 \cdot 3x = 42$
 $x = 6 \text{ m}$
 El lado desigual mide 6 m
 Cada lado igual mide 18 m

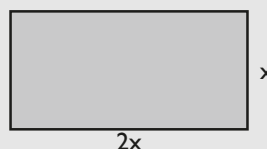
83. Se mezcla café del tipo A de 5,5 €/kg con café del tipo B de 4 €/kg para obtener una mezcla de 90 kg a 5 €/kg. ¿Cuántos kilogramos de café debemos tomar de cada tipo?

Solución:

Café de tipo A: x a 5,5 €/kg
 Café de tipo B: $90 - x$ a 4 €/kg
 $5,5x + 4(90 - x) = 5 \cdot 90$
 $x = 60 \text{ kg}$
 Café de tipo A: 60 kg
 Café de tipo B: 30 kg

84. Halla las longitudes de los lados de un rectángulo sabiendo que el largo es el doble que el ancho y que la superficie mide 50 m².

Solución:



Ancho: x
 Largo: $2x$
 $x \cdot 2x = 50$
 Si $x = 5$, el ancho mide 5 m y el largo mide 10 m
 Si $x = -5$, se obtienen valores no válidos.

85. Un frutero compra una caja de plátanos a 0,8 €/kg. Se le estropean 3 kg, que tira a la basura, y el resto los vende a 1,2 €. Si gana 18 €, ¿cuántos kilogramos de plátanos contenía la caja inicialmente?

Solución:

Compra: x kg a 0,8 €/kg
 Vende: $x - 3$ a 1,2 €/kg
 $0,8x + 18 = (x - 3)1,2$
 $x = 54 \text{ kg}$

Para ampliar

86. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $x^4 - 3x^2 = 0$
 b) $x^6 - 27x^3 = 0$
 c) $x^4 - 7x^2 + 12 = 0$
 d) $4x^4 - 17x^2 + 4 = 0$

Solución:

a) $x_1 = x_2 = 0, x_3 = \sqrt{3}, x_4 = -\sqrt{3}$
 b) $x_1 = x_2 = x_3 = 0, x_4 = 3$
 c) $x_1 = 2, x_2 = -2, x_3 = \sqrt{3}, x_4 = -\sqrt{3}$
 d) $x_1 = 2, x_2 = -2, x_3 = 1/2, x_4 = -1/2$

Ejercicios y problemas

87. Resuelve mentalmente las siguientes ecuaciones:

- a) $x(x + 3) = 0$ b) $(x + 1)(x - 5) = 0$
c) $x(x + 2)(3x - 6) = 0$ d) $x(x - 1)(2x + 5) = 0$

Solución:

- a) $x_1 = 0, x_2 = -3$
b) $x_1 = -1, x_2 = 5$
c) $x_1 = 0, x_2 = -2, x_3 = 2$
d) $x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = -5/2$

88. Resuelve mentalmente las siguientes ecuaciones:

- a) $2x^2 = 0$ b) $x^2 - 9 = 0$
c) $x^2 - 4x = 0$ d) $3x^2 - 7x = 0$

Solución:

- a) $x_1 = x_2 = 0$ b) $x_1 = 3, x_2 = -3$
c) $x_1 = 0, x_2 = 4$ d) $x_1 = 0, x_2 = 7/3$

89. Halla mentalmente la descomposición factorial de los siguientes trinomios de 2º grado:

- a) $x^2 - 7x$ b) $x^2 + 12x + 36$
c) $x^2 - 25$ d) $x^2 - 14x + 49$

Solución:

- a) $x(x - 7)$ b) $(x + 6)^2$
c) $(x + 5)(x - 5)$ d) $(x - 7)^2$

90. Halla ecuaciones de 2º grado que tengan las siguientes raíces:

- a) $x_1 = 2, x_2 = -5$ b) $x_1 = -1, x_2 = 4$
c) $x_1 = 1/2, x_2 = 2/3$ d) $x_1 = 4, x_2 = -1/3$

Solución:

- a) $(x - 2)(x + 5) = 0 \Rightarrow x^2 + 3x - 10 = 0$
b) $(x + 1)(x - 4) = 0 \Rightarrow x^2 - 3x - 4 = 0$
c) $(x - 1/2)(x - 2/3) = 0 \Rightarrow 6x^2 - 7x + 2 = 0$
d) $(x - 4)(x + 1/3) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 11x - 4 = 0$

91. Sin resolver las siguientes ecuaciones, halla la suma y el producto de sus raíces:

- a) $x^2 + 5x + 6 = 0$ b) $x^2 + 3x - 10 = 0$
c) $5x^2 - 14x - 3 = 0$ d) $6x^2 + x - 2 = 0$

Solución:

- a) $S = -5, P = 6$ b) $S = -3, P = -10$
c) $S = 14/5, P = -3/5$ d) $S = -1/6, P = -1/3$

92. Halla la descomposición factorial de los siguientes trinomios de 2º grado:

- a) $6x^2 - 5x - 1$ b) $9x^2 - 18x + 8$
c) $15x^2 - 17x + 2$ d) $6x^2 - 5x - 6$

Solución:

- a) $6(x - 1)(x + 1/6)$ b) $9(x - 2/3)(x - 4/3)$
c) $15(x - 1)(x - 2/15)$ d) $6(x - 3/2)(x + 2/3)$

93. Plantea una ecuación de segundo grado que tenga:

- a) una solución real doble.
b) dos soluciones reales y distintas.

Solución:

- a) $(x - 3)^2 = 0 \Rightarrow x^2 - 6x + 9 = 0$
b) $(x + 2)(x - 3) = 0 \Rightarrow x^2 - x - 6 = 0$

94. Sabiendo que la ecuación $4x^2 + kx - 9 = 0$ tiene dos raíces opuestas, halla el valor de k

Solución:

$k = 0$

95. Factoriza mentalmente los siguientes polinomios:

- a) $x^2 + x + 1/4$
b) $x^2 - 3$

Solución:

- a) $(x + 1/2)^2$
b) $(x + \sqrt{3})(x - \sqrt{3})$

96. Factoriza mentalmente los siguientes polinomios:

- a) $x^2 + 2x/3 + 1/9$
b) $4x^2 - 12x + 9$
c) $x^2 + 2x/5 + 1/25$
d) $9x^2 - 25$

Solución:

- a) $(x + 1/3)^2$ b) $(2x - 3)^2$
c) $(x + 1/5)^2$ d) $(3x + 5)(3x - 5)$

97. Factoriza los siguientes polinomios:

- a) $x^5 - 16x$
b) $x^6 - 25x^2$

Solución:

- a) $x(x - 2)(x + 2)(x^2 + 4)$
b) $x^2(x + \sqrt{5})(x - \sqrt{5})(x^2 + 5)$

98. Factoriza los siguientes polinomios:

- a) $x^4 - 81$ b) $x^4 - 9x^2$

Solución:

- a) $(x + 3)(x - 3)(x^2 + 9)$
b) $x^2(x - 3)(x + 3)$

99. Factoriza los siguientes polinomios y halla sus raíces:

- a) $14x^3 - 27x^2 - 6x + 8$
 b) $x^3 - 3x^2 - 13x + 15$
 c) $x^4 - 7x^3 - 3x^2 + 21x$
 d) $x^4 - 4x^3 - x^2 + 20x - 20$

Solución:

- a) $14(x-2)(x-1/2)(x+4/7)$
 $x_1 = 2, x_2 = 1/2, x_3 = -4/7$
 b) $(x-1)(x+3)(x-5)$
 $x_1 = 1, x_2 = -3, x_3 = 5$
 c) $x(x-7)(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})$
 $x_1 = 0, x_2 = 7, x_3 = -\sqrt{3}, x_4 = \sqrt{3}$
 d) $(x-2)^2(x+\sqrt{5})(x-\sqrt{5})$
 $x_1 = x_2 = 2, x_3 = -\sqrt{5}, x_4 = \sqrt{5}$

100. Resuelve las siguientes ecuaciones aplicando la factorización de polinomios:

- a) $x^3 - 27 = 0$ b) $x^4 + 2x^2 - 3 = 0$
 c) $x^3 - 2x^2 - 49x + 98 = 0$ d) $4x^3 - 16x^2 - x + 4 = 0$

Solución:

- a) $(x-3)(x^2+3x+9)$
 $x_1 = 3$
 b) $(x-1)(x+1)(x^2+3)$
 $x_1 = 1, x_2 = -1$
 c) $(x-2)(x-7)(x+7)$
 $x_1 = 2, x_2 = 7, x_3 = -7$
 d) $4(x-4)(x-1/2)(x+1/2)$
 $x_1 = 4, x_2 = 1/2, x_3 = -1/2$

101. Escribe un polinomio que tenga las siguientes raíces:

- a) $x_1 = 3, x_2 = -1, x_3 = -2$
 b) $x_1 = x_2 = -1, x_3 = 4$
 c) $x_1 = -2, x_2 = 2, x_3 = 1$
 d) $x_1 = -3, x_2 = x_3 = 2, x_4 = 1$

Solución:

- a) $(x-3)(x+1)(x+2) \Rightarrow x^3 - 7x - 6$
 b) $(x+1)^2(x-4) \Rightarrow x^3 - 2x^2 - 7x - 4$
 c) $(x+2)(x-2)(x-1) \Rightarrow x^3 - x^2 - 4x + 4$
 d) $(x+3)(x-2)^2(x-1) \Rightarrow x^4 - 2x^3 - 7x^2 + 20x - 12$

102. Descompón mentalmente en factores el numerador y el denominador y simplifica las siguientes fracciones algebraicas:

- a) $\frac{3x^2 - 9x}{x^2 - 6x + 9}$ b) $\frac{x^2 + 10x + 25}{x^2 - 25}$

Solución:

- a) $\frac{3x(\cancel{x-3})}{(x-3)^2} = \frac{3x}{x-3}$ b) $\frac{(x+5)^{\cancel{2}}}{(\cancel{x+5})(x-5)} = \frac{x+5}{x-5}$

103. Calcula:

- a) $\frac{4}{x} + \frac{3}{x-2} - \frac{x+1}{x^2-4}$ b) $\frac{x}{x^2-1} + \frac{x+2}{x^2-x} - \frac{3}{x}$

Solución:

- a) $\frac{6x^2 + 5x - 16}{x(x^2 - 4)}$ b) $\frac{-x^2 + 3x + 5}{x(x^2 - 1)}$

104. Efectúa:

- a) $\frac{x^2-1}{x^2-4} \cdot \frac{x^2+4x+4}{x^2+2x+1}$ b) $\frac{x^3-x^2}{x^2+5x+6} \cdot \frac{x^2-4}{x^2+x}$

Solución:

- a) $\frac{x^2+x-2}{x^2-x-2}$ b) $\frac{x^3-3x^2+2x}{x^2+4x+3}$

105. Calcula:

- a) $\frac{3x^2+6x+3}{x^4+x^3} : \frac{x^2+2x+2}{x^3+x^2}$
 b) $\frac{4x^2-1}{x^2-10x+25} : \frac{2x+1}{x^2-25}$

Solución:

- a) $\frac{3x^2+6x+3}{x^3+2x^2+2x}$ b) $\frac{2x^2+9x-5}{x-5}$

106. Resuelve los siguientes sistemas:

- a) $\left. \begin{aligned} y &= \frac{6}{x} \\ x^2 + y^2 &= 13 \end{aligned} \right\}$ b) $\left. \begin{aligned} x + 2y &= \frac{3}{x} \\ x + y &= \frac{2}{y} \end{aligned} \right\}$

Solución:

- a) $x_1 = 2, y_1 = 3; x_2 = -2, y_2 = -3;$
 $x_3 = 3, y_3 = 2; x_4 = -3, y_4 = -2$
 b) $x_1 = 1, y_1 = 1; x_2 = -1, y_2 = -1$

107. Resuelve las siguientes ecuaciones exponenciales y logarítmicas:

- a) $3^{x^2-x-6} = 1$ b) $2^{1-x^2} = \frac{1}{8}$
 c) $3^{5x-4} = 9^{2x-1}$ d) $\frac{1}{2} \log(x-16) = \log 3$

Solución:

- a) $x_1 = 3, x_2 = -2$ b) $x_1 = 2, x_2 = -2$
 c) $x = 2$ d) $x = 25$

Ejercicios y problemas

108. Resuelve las siguientes ecuaciones exponenciales y logarítmicas:

- a) $2^x = \sqrt[3]{4}$
- b) $0,5^x = 32$
- c) $\sqrt[5]{7^x} = 23$
- d) $\frac{1}{9^x} = 27$

Solución:

- a) $x = 2/3$
- b) $x = -5$
- c) $x = 8,06$
- d) $x = -3/2$

109. Resuelve los sistemas:

- a) $\begin{cases} 5^x = 25 \cdot 5^y \\ \log(x+y) - \log(x-y) = \log 2 \end{cases}$
- b) $\begin{cases} 4 \cdot 2^x = 4^y + 1 \\ \log(x+y) + \log(x-y) = \log 3 \end{cases}$

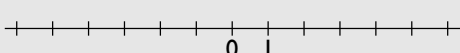
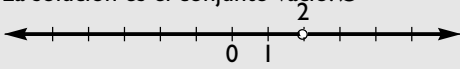
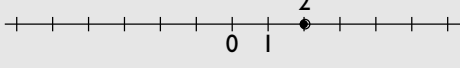
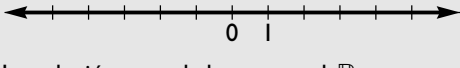
Solución:

- a) $x = 3, y = 1$
- b) $x = 2, y = 1$

110. Resuelve las siguientes inecuaciones:

- a) $x^2 - 4x + 4 < 0$
- b) $x^2 - 4x + 4 > 0$
- c) $x^2 - 4x + 4 \leq 0$
- d) $x^2 - 4x + 4 \geq 0$

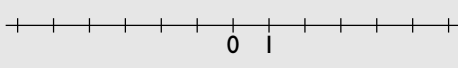
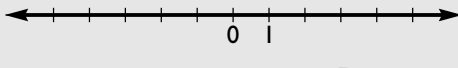
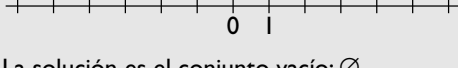
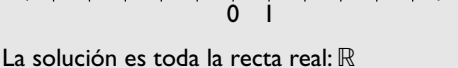
Solución:

- a) 
La solución es el conjunto vacío: $\emptyset$
- b) 
 $\mathbb{R} - \{2\} = (-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$
- c) 
La solución es el punto: $\{2\}$
- d) 
La solución es toda la recta real: $\mathbb{R}$

111. Resuelve las siguientes inecuaciones:

- a) $x^2 + 2x + 3 < 0$
- b) $x^2 + 2x + 3 > 0$
- c) $x^2 + 2x + 3 \leq 0$
- d) $x^2 + 2x + 3 \geq 0$

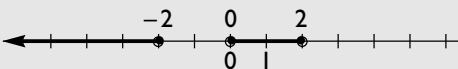
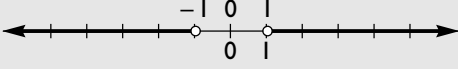
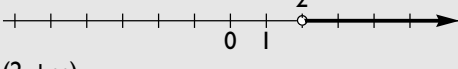
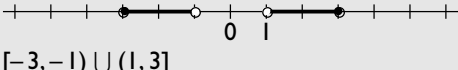
Solución:

- a) 
La solución es el conjunto vacío: $\emptyset$
- b) 
La solución es toda la recta real: $\mathbb{R}$
- c) 
La solución es el conjunto vacío: $\emptyset$
- d) 
La solución es toda la recta real: $\mathbb{R}$

112. Resuelve las siguientes inecuaciones:

- a) $x^3 - 4x \leq 0$
- b) $x^4 - x^2 > 0$
- c) $\frac{5}{(x-2)^3} > 0$
- d) $\frac{9-x^2}{x^2-1} \geq 0$

Solución:

- a) 
 $(-\infty, -2] \cup [0, 2]$
- b) 
 $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$
- c) 
 $(2, +\infty)$
- d) 
 $[-3, -1] \cup [1, 3]$

113. Dada la función $f(x) = |3x + 5|$, halla:

- a) cuándo vale cero.
- b) cuándo es positiva.
- c) cuándo es negativa.

Solución:

- a) $x = -5/3$
- b) $\mathbb{R} - \{-5/3\} = (-\infty, -5/3) \cup (-5/3, +\infty)$
- c) Nunca es negativa: $\emptyset$

114. Resuelve los siguientes sistemas:

$$\left. \begin{array}{l} \text{a) } \begin{cases} \frac{x}{3} + \frac{y}{4} + z = \frac{17}{12} \\ \frac{x+y}{3} - \frac{z}{2} = -\frac{1}{6} \\ \frac{x}{2} - \frac{y+z}{6} = 1 \end{cases} \\ \text{b) } \begin{cases} x + y + z = 18 \\ \frac{x}{3} = \frac{y}{4} \\ \frac{x}{3} = \frac{z}{5} \end{cases} \end{array} \right\}$$

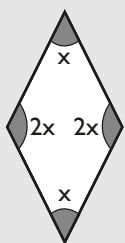
Solución:

a) $x = 2, y = -1, z = 1$

b) $x = 9/2, y = 6, z = 15/2$

115. Un ángulo de un rombo mide el doble que cada uno de los contiguos. ¿Cuánto mide cada uno de los ángulos de dicho rombo?

Solución:



Cada ángulo menor: x

Cada ángulo mayor: $2x$

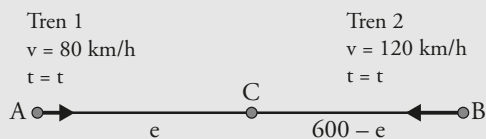
$$2x + 2 \cdot 2x = 360^\circ$$

$$x = 60^\circ$$

Cada uno de los dos ángulos menores mide 60° , y cada uno de sus contiguos, 120°

116. Un tren sale de una ciudad A hacia otra ciudad B, que dista 600 km de A, con una velocidad de 80 km/h; a la misma hora sale de la ciudad B con dirección a la ciudad A otro tren a 120 km/h. ¿Cuánto tiempo tardan en encontrarse? ¿A qué distancia de la ciudad A se encuentran?

Solución:



$$\left. \begin{array}{l} e = 80t \\ 600 - e = 120t \end{array} \right\}$$

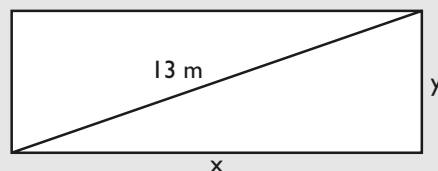
$$e = 240; t = 3 \text{ h}$$

Tardarán en encontrarse 3 horas.

Se encuentran a 240 km de A y a 360 km de B

117. Halla las longitudes de los lados de un rectángulo sabiendo que el perímetro mide 34 m, y la diagonal, 13 m

Solución:



$$\left. \begin{array}{l} x + y = 17 \\ x^2 + y^2 = 169 \end{array} \right\}$$

$$x = 5, y = 12, \text{ o bien, } x = 12, y = 5$$

Un lado mide 12 m y el otro mide 5 m

Problemas

118. Un número entero más el anterior y más el siguiente es igual a 51. ¿De qué número se trata?

Solución:

Número entero: x

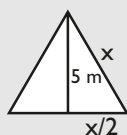
Anterior: $x - 1$

Siguiente: $x + 1$

$$x + x - 1 + x + 1 = 51 \Rightarrow x = 17$$

119. La altura de un triángulo equilátero es de 5 m. Calcula cuánto mide el lado.

Solución:



Se aplica el teorema de Pitágoras:

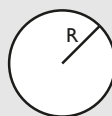
$$(x/2)^2 + 5^2 = x^2$$

$$x = \frac{10\sqrt{3}}{3} \text{ m}$$

$$x = -\frac{10\sqrt{3}}{3}; \text{ este valor no es válido.}$$

120. El área de una plaza de toros mide 2827 m^2 . Calcula el radio de la plaza.

Solución:



$$A = \pi R^2$$

$$\pi R^2 = 2827$$

$$R = 30 \text{ m}$$

$$R = -30; \text{ este valor no es válido.}$$

Ejercicios y problemas

121. Halla dos números enteros consecutivos sabiendo que su producto es 156

Solución:

Un número: x

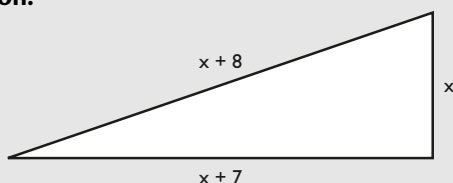
El siguiente: $x + 1$

$$x(x + 1) = 156$$

Los números pueden ser: 12 y 13, o bien -13 y -12

122. El cateto mayor de un triángulo rectángulo es 7 unidades más largo que el menor y una unidad menor que la hipotenusa. Calcula las dimensiones de los catetos y de la hipotenusa de dicho triángulo rectángulo.

Solución:



Cateto menor: x

Cateto mayor: $x + 7$

Hipotenusa: $x + 8$

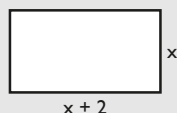
$$x^2 + (x + 7)^2 = (x + 8)^2$$

Si $x = 5$, los catetos miden 5 y 12, y la hipotenusa, 13

Si $x = -3$, se obtienen valores no válidos.

123. Halla las dimensiones de una habitación rectangular de 15 m² de superficie sabiendo que es 2 metros más larga que ancha.

Solución:



Lado menor: x

Lado mayor: $x + 2$

$$x(x + 2) = 15$$

Si $x = 3$, los lados miden 3 y 5 m

Si $x = -5$, se obtienen valores no válidos.

124. El número de días de un año no bisiesto es igual al cuadrado de un número entero, más el cuadrado del siguiente y más el cuadrado del siguiente. ¿De qué número entero se trata?

Solución:

Nº de días de un año no bisiesto: 365

Número: x

Número siguiente: $x + 1$

Número siguiente del siguiente: $x + 2$

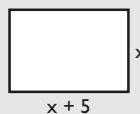
$$x^2 + (x + 1)^2 + (x + 2)^2 = 365$$

$$x = 10$$

$$x = -12$$

125. Una finca es 5 m más larga que ancha y tiene 750 m² de superficie. Calcula las dimensiones de la finca.

Solución:



Lado menor: x

Lado mayor: $x + 5$

$$x(x + 5) = 750$$

$x = 25$, los lados miden 25 y 30 m

Si $x = -30$, se obtiene valores no válidos.

126. Halla un número sabiendo que si a dicho número elevado a la cuarta potencia le restamos su cuadrado, se obtiene 72

Solución:

Número: x

$$x^4 - x^2 = 72$$

$$x = 3, x = -3$$

127. Halla un número sabiendo que si le sumamos su raíz cuadrada, se obtiene 30

Solución:

Número: x

$$x + \sqrt{x} = 30$$

$$x = 25$$

128. Halla un número sabiendo que la suma de su opuesto con su inverso es igual a 5/6

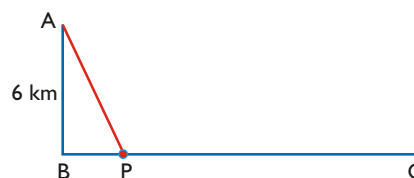
Solución:

Número: x

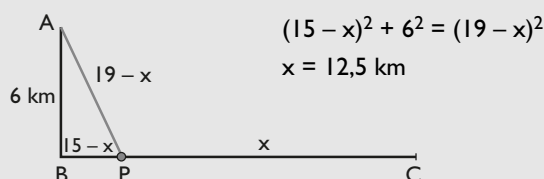
$$-x + 1/x = 5/6$$

$$x = 2/3, \text{ o bien, } x = -3/2$$

129. Para ir del punto A al punto C, hacemos el recorrido AP y luego PC, y andamos en total 19 km. Si la distancia de B a C es de 15 km, ¿a qué distancia de C está el punto P?



Solución:



$$(15 - x)^2 + 6^2 = (19 - x)^2$$

$$x = 12,5 \text{ km}$$

130. Calcula dos números cuya diferencia es 5 y la suma de sus cuadrados es 73

Solución:

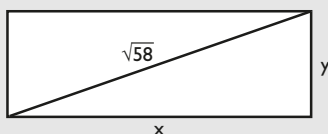
Números: x e y

$$\left. \begin{array}{l} x - y = 5 \\ x^2 + y^2 = 73 \end{array} \right\}$$

Los números son 8 y 3, o bien -3 y -8

131. Un rectángulo tiene 21 cm^2 de área y su diagonal mide $\sqrt{58}$ cm. Calcula las dimensiones del rectángulo.

Solución:



$$\left. \begin{array}{l} xy = 21 \\ x^2 + y^2 = 58 \end{array} \right\}$$

$x = 7, y = 3$; o bien $x = 3, y = 7$

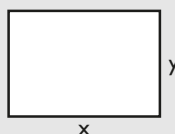
Las dimensiones del rectángulo son 7 cm y 3 cm

El resto de soluciones no son válidas.

132. Para vallar una finca rectangular de 600 m^2 se han utilizado 100 m de cerca. Calcula las dimensiones de la finca.

Solución:

$$\left. \begin{array}{l} xy = 600 \\ x + y = 50 \end{array} \right\}$$



$x = 30, y = 20$; o bien $x = 20, y = 30$

Las dimensiones de la finca son 30 m y 20 m

133. La suma de dos números es 13 y la suma de sus inversos es $13/42$. Calcula dichos números.

Solución:

$$\left. \begin{array}{l} x + y = 13 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{13}{42} \end{array} \right\}$$

$x = 6, y = 7$; o bien $x = 7, y = 6$

134. Halla dos números positivos sabiendo que su diferencia es 4 y su producto es 32

Solución:

$$\left. \begin{array}{l} x - y = 4 \\ xy = 32 \end{array} \right\}$$

$x_1 = 8, y_1 = 4$

$x_2 = -4, y_2 = -8$

Como se piden valores positivos, la solución negativa no es válida.

135. La cantidad de un medicamento en la sangre viene dada por la fórmula $c = 50 \cdot 0,85^t$, donde c se mide en miligramos y t en horas. Si cuando la cantidad baja de 14 mg se tiene que administrar una nueva dosis, ¿cada cuánto tiempo hay que administrar las dosis? Redondea el tiempo a horas.

Solución:

$$50 \cdot 0,85^t = 14$$

$$\log 50 + t \log 0,85 = \log 14$$

$$t = \frac{\log 14 - \log 50}{\log 0,85} = 7,8$$

Cada 8 horas.

136. Un cultivo de bacterias crece según la fórmula $y = 2^{t/5}$, donde y es el número de miles de bacterias y t se mide en horas. ¿Cuánto tiempo tiene que transcurrir para que haya más de 28 000 bacterias?

Solución:

$$2^{t/5} = 28\,000$$

$$\frac{t}{5} \log 2 = \log 28\,000$$

$$t = \frac{5 \cdot \log 28\,000}{\log 2} = 73,87$$

Deben transcurrir casi 74 horas.

137. La longitud de la circunferencia de un árbol crece según la fórmula $c = 0,05e^{0,2t}$, donde c es la longitud de la circunferencia medida en metros, y t , el número de años. ¿Cuántos años tardará en medir 1 m?

Solución:

$$0,05e^{0,2t} = 1$$

$$L \ 0,05 + 0,2t = 0$$

$$t = -\frac{L \ 0,05}{0,2} = 14,98$$

Tardará casi 15 años.

138. Una determinada alga cuya superficie es de $0,5 \text{ m}^2$ se duplica cada semana. Se colocan cinco de estas algas en un lago de 6 km^2 . ¿Cuánto tiempo tardarán en colonizar todo el lago?

Solución:

$$5 \cdot 0,5 \cdot 2^t = 6 \cdot 10^6$$

$$\log 2,5 + t \log 2 = 6 + \log 6$$

$$t = \frac{6 + \log 6 - \log 2,5}{\log 2} = 21,19$$

Tardarán aproximadamente 21 semanas.

Ejercicios y problemas

139. La mitad de un número más su cuadrado es menor de 39. ¿Qué valores puede tomar dicho número?

Solución:

$$x/2 + x^2 < 39$$

Los números del intervalo abierto: $(-13/2, 6)$

140. El perímetro de un rectángulo mide 24 m. ¿Qué valores pueden tomar los lados para que la superficie sea mayor de 32 m²?

Solución:

Base: x

Altura: $12 - x$

$$x(12 - x) > 32$$

Los números del intervalo abierto: $(4, 8)$

141. Halla cuándo es positiva la función: $f(x) = -x^2 + 5x - 4$

Solución:

$$-x^2 + 5x - 4 > 0$$

En el intervalo: $(1, 4)$

142. Halla cuándo es negativa la función: $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x}$

Solución:

$$\frac{x^2 - 4}{x} < 0$$

$(-\infty, -2) \cup (0, 2)$

143. En la ecuación de 2º grado $x^2 + 4x + c = 0$, determina qué valores debe tomar c para que:

a) tenga una sola raíz real.

b) tenga dos raíces reales.

c) no tenga raíces reales.

Solución:

$$\Delta = 16 - 4c$$

$$a) 16 - 4c = 0 \Rightarrow c = 4$$

$$b) 16 - 4c > 0 \Rightarrow c < 4$$

$$c) 16 - 4c < 0 \Rightarrow c > 4$$

144. En una familia de tres miembros ingresan entre los tres 3 250 € al mes. La madre gana el doble que el hijo y el hijo gana el 75% del sueldo del padre. ¿Cuál es el salario de cada uno?

Solución:

Padre: x Hijo: $0,75x$ Madre: $1,5x$

$$x + 0,75x + 1,5x = 3\,250$$

$$x = 1\,000 \text{ €}$$

Padre: 1 000 € Hijo: 750 € Madre: 1 500 €

145. Una colección de 126 discos se ha dividido en tres partes. La primera tiene el doble de discos que la segunda, y entre las dos primeras suman la mitad de la colección. ¿Cuántos discos tiene cada parte?

Solución:

Primera: $2x$

Segunda: x

$$2x + x = 63$$

$$x = 21$$

Primera: 42 discos.

Segunda: 21 discos.

Tercera: 63 discos.

146. Se han comprado 2 500 acciones de tres empresas a 12 €, 10 € y 15 €, respectivamente, cada acción. Si el capital invertido es de 30 000 € y el número de acciones de la primera empresa supone un 40% del total, ¿cuántas acciones se han comprado de cada empresa?

Solución:

De 12 €: x	De 10 €: y	De 15 €: z
$x + y + z = 2\,500$		
$12x + 10y + 15z = 30\,000$		
$x = 0,4 \cdot 2\,500$		

$$x = 1\,000 \text{ acciones de } 12 \text{ €}$$

$$y = 900 \text{ acciones de } 10 \text{ €}$$

$$z = 600 \text{ acciones de } 15 \text{ €}$$

147. De una cierta cantidad de dinero se ha gastado primero la mitad, y luego la tercera parte de lo que quedaba, y aún quedan 4 000 €. ¿Cuánto dinero había inicialmente?

Solución:

$$\frac{x}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{x}{2} + 4\,000 = x$$

$$x = 12\,000 \text{ €}$$

148. Hoy la edad de un padre es 6 veces la de su hijo, y dentro de 9 años la edad del padre será el triple de la edad de su hijo. ¿Cuántos años tiene hoy cada uno?

Solución:

	Ahora	Dentro de 9 años
Hijo	x	$x + 9$
Padre	$6x$	$6x + 9$

$$6x + 9 = 3(x + 9)$$

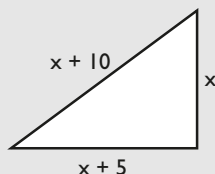
$$x = 6$$

La edad del hijo hoy: 6 años.

La edad del padre hoy: 36 años.

149. Los lados de un triángulo rectángulo son números que se diferencian en cinco unidades. Calcula las longitudes de dichos lados.

Solución:



Cateto menor: x
 Cateto mayor: $x + 5$
 Hipotenusa: $x + 10$

$$x^2 + (x + 5)^2 = (x + 10)^2$$

Si $x = 15$, los catetos miden: 15 y 20; la hipotenusa mide 25

Si $x = -5$, se obtienen valores no válidos.

Para profundizar

150. Resuelve las siguientes ecuaciones:

- $|2x + 3| = 5$
- $|-3x + 5| = |x - 7|$
- $|x^2 + 5| = 9$
- $|x^2 - 1| = 8$

Solución:

- $2x + 3 = 5 \Rightarrow x = 1$
 $2x + 3 = -5 \Rightarrow x = -4$
- $-3x + 5 = x - 7 \Rightarrow x = 3$
 $-3x + 5 = -x + 7 \Rightarrow x = -1$
- $x^2 + 5 = 9 \Rightarrow x_1 = 2, x_2 = -2$
 $x^2 + 5 = -9 \Rightarrow$ No tiene solución real.
- $x^2 - 1 = 8 \Rightarrow x_1 = 3, x_2 = -3$
 $x^2 - 1 = -8 \Rightarrow$ No tiene solución real.

151. Resuelve las siguientes ecuaciones:

- $|x^2 - 5x| = 6$
- $|x^2 + 7| = 2$
- $|x^2 - x| = 12$
- $|2x^2 + 5x| = 3$

Solución:

- $x^2 - 5x = 6 \Rightarrow x_1 = 6, x_2 = -1$
 $x^2 - 5x = -6 \Rightarrow x_1 = 2, x_2 = 3$
- $x^2 + 7 = 2 \Rightarrow$ No tiene solución real.
 $x^2 + 7 = -2 \Rightarrow$ No tiene solución real.
- $x^2 - x = 12 \Rightarrow x_1 = 4, x_2 = -3$
 $x^2 - x = -12 \Rightarrow$ No tiene solución real.
- $2x^2 + 5x = 3 \Rightarrow x_1 = -3, x_2 = 1/2$
 $2x^2 + 5x = -3 \Rightarrow x_1 = -1, x_2 = -3/2$

152. La suma de un número par más el par anterior y más el impar siguiente es 77. ¿De qué número se trata?

Solución:

Número par: $2x$

Par anterior: $2x - 2$

Impar siguiente: $2x + 1$

$$2x + 2x - 2 + 2x + 1 = 77$$

$$x = 13$$

Número par: 26 Par anterior: 24 Impar siguiente: 27

153. Dos grifos llenan un depósito en dos horas. Si uno echa el doble de agua que el otro, ¿cuánto tiempo tardaría en llenar el depósito cada grifo?

Solución:

	Caudal	Tiempo	Volumen
Grifo 1	x	t_1	xt_1
Grifo 2	$2x$	t_2	$2xt_2$

Volumen del depósito: $2(x + 2x) = 6x$

Tiempo grifo 1 del caudal menor:

$$xt_1 = 6x \Rightarrow t_1 = 6 \text{ horas.}$$

Tiempo grifo 2 del caudal mayor:

$$2xt_2 = 6x \Rightarrow t_2 = 3 \text{ horas.}$$

154. Calcula el valor numérico de las siguientes fracciones algebraicas:

$$a) \frac{x^2 - 6x + 9}{x^2 - 9} \text{ para } x = 3 \quad b) \frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 - x - 6} \text{ para } x = -2$$

Solución:

a) Se obtiene 0/0; se puede simplificar previamente.

$$\frac{x^2 - 6x + 9}{x^2 - 9} = \frac{(x - 3)^2}{(x + 3)(x - 3)} = \frac{x - 3}{x + 3}$$

Se obtiene: 0

b) Se obtiene 0/0; se puede simplificar previamente.

$$\frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 - x - 6} = \frac{(x + 1)(x + 2)}{(x - 2)(x + 3)} = \frac{x + 1}{x - 3}$$

Se obtiene: 1/5

155. Halla dos números enteros consecutivos, sabiendo que su producto dividido por su suma es igual a 6/5

Solución:

Números: $x, x + 1$

$$\frac{x(x + 1)}{x + x + 1} = \frac{6}{5} \Rightarrow x = 2$$

Los números son: 2 y 3

Aparece también la solución $x = -3/5$, pero no es un número entero.

Ejercicios y problemas

156. Halla dos números enteros consecutivos, sabiendo que su suma más la raíz cuadrada de su suma es igual a 30

Solución:

Números: $x, x + 1$

$$x + x + 1 + \sqrt{x + x + 1} = 30 \Rightarrow x = 12$$

Los números son: 12 y 13

157. Las diagonales de un rombo son proporcionales a 3 y 2. El área del rombo mide 243 cm^2 . Calcula las diagonales del rombo.

Solución:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{x}{3} = \frac{y}{2} \\ \frac{xy}{2} = 243 \end{array} \right\} \begin{array}{l} x = 27, y = 18 \\ \text{Las diagonales miden: } 27 \text{ cm y } 18 \text{ cm} \end{array}$$

Las soluciones negativas no tienen sentido.

158. La fórmula de revalorización de un sueldo viene dada por $S = s(1 + r)^t$, donde **S** es el sueldo final, **s** el sueldo inicial, **r** el tanto por uno y **t** el número de años. Calcula el número de años que tienen que transcurrir para que un sueldo anual de 20 000 €, con una revalorización del 3,5 % anual, se transforme en 30 000 €

Solución:

$$20\,000 \cdot 1,035^t = 30\,000 \Rightarrow t = 11,79 \text{ años.}$$

159. En un lago artificial se introducen 85 truchas, que se reproducen según la fórmula $N = 85e^{2t}$, donde **N** es el número de truchas y **t** el número de años. ¿Cuánto tiempo tiene que transcurrir para que haya más de un millón de truchas?

Solución:

$$85e^{2t} = 1\,000\,000 \Rightarrow t = 4,69 \text{ años.}$$

160. La población de una ciudad viene dada por la fórmula $p = 2e^{0,005t}$, donde **p** es el número de millones de habitantes, y **t**, el tiempo en años. Calcula cuántos años tienen que transcurrir para que la población sea de 2,5 millones de habitantes.

Solución:

$$2e^{0,005t} = 2,5$$

$$L\ 2 + 0,005t = L\ 2,5$$

$$t = \frac{L\ 2,5 - L\ 2}{0,005} = 44,6$$

Deben transcurrir 44,6 años.

161. La población de una cierta especie animal en peligro de extinción se reduce según la fórmula $P = 5\,000 \cdot 2^{-0,3t}$, donde **P** es la población final, y **t**, el número de años. Si

se considera que la extinción es inevitable si hay menos de 100 ejemplares, ¿en cuántos años se alcanzará el punto en el que se considera que la extinción es inevitable?

Solución:

$$5\,000 \cdot 2^{-0,3t} = 100$$

$$\log 5\,000 - 0,3t \log 2 = 2$$

$$t = \frac{\log 5\,000 - 2}{0,3 \log 2} = 18,81$$

Se alcanzará a los 18,81 años.

162. El polonio tiene un período de semidesintegración de 140 días, es decir, cada 140 días se transforma en la mitad de su peso. Si tenemos 200 g de polonio, ¿en cuánto tiempo se transformará en 25 g?

Solución:

$$200 \cdot (1/2)^t = 25$$

$$\log 200 - t \log 2 = \log 25$$

$$t = \frac{\log 200 - \log 25}{\log 2} = 3$$

Tiempo: $3 \cdot 140 = 420$ días.

Serán 3 periodos.

163. En la actualidad la edad de un padre es el triple de la de su hijo, y dentro de 15 años la edad del padre será el doble de la edad de su hijo. ¿Cuántos años tienen en este momento el padre y el hijo?

Solución:

	Ahora	Dentro de 15 años
Hijo	x	$x + 15$
Padre	$3x$	$3x + 15$

$$3x + 15 = 2(x + 15) \Rightarrow x = 15$$

Edad del hijo ahora: 15 años.

Edad del padre ahora: 45 años.

164. Halla el radio de la sección de un tronco de un árbol para que tenga 1 m^2 de área.

Solución:

$$A = \pi R^2 \Rightarrow \pi R^2 = 1 \Rightarrow R = \frac{1}{\sqrt{\pi}} = 0,56 \text{ m} = 56 \text{ cm}$$

165. Halla dos números impares consecutivos cuyo producto sea 323

Solución:

Números impares consecutivos: $2x + 1, 2x + 3$

$$(2x + 1)(2x + 3) = 323 \Rightarrow x_1 = 8, x_2 = -10$$

Los números son: 17 y 19, o bien -19 y -17

166. Una finca rectangular tiene de superficie 759 m^2 y se necesitan 112 m de cerca para vallarla. Calcula las dimensiones de la finca.

Solución:

$$\begin{cases} 2x + 2y = 112 \\ xy = 759 \end{cases} \quad \left. \begin{array}{l} x = 33, y = 23; \text{ o bien } x = 23, y = 33 \end{array} \right\}$$

La finca mide $33 \text{ m} \times 23 \text{ m}$

167. Las edades de Óscar y su madre suman 65 años, y dentro de cinco años la edad de la madre será el doble que la de Óscar. ¿Qué edad tienen en ese momento cada uno?

Solución:

	Ahora	Dentro de 5 años
Óscar	x	$x + 5$
Madre	y	$y + 5$

$$\begin{cases} x + y = 65 \\ y + 5 = 2(x + 5) \end{cases} \quad \left. \begin{array}{l} x = 20, y = 45 \end{array} \right\}$$

Edad Óscar ahora: 20 años.

Edad de la madre ahora: 45 años.

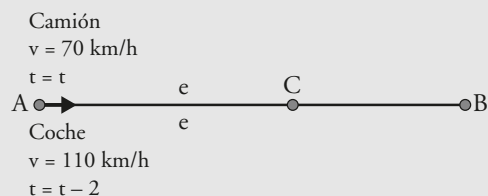
168. Se mezcla café del tipo A de 6 €/kg con café del tipo B de $4,5 \text{ €/kg}$ para obtener una mezcla de 60 kg a 5 €/kg . ¿Cuántos kilogramos de café debemos tomar de cada tipo?

Solución:

Tipo A: x a 6 €/kg Tipo B: $60 - x$ a $4,5 \text{ €/kg}$
 $6x + 4,5(60 - x) = 60 \cdot 5 \Rightarrow x = 20 \text{ kg}$
 Tipo A: 20 kg Tipo B: 40 kg

169. Un camión sale de una ciudad A hacia otra ciudad B, que distan 800 km entre sí, con una velocidad de 70 km/h ; dos horas más tarde sale de la misma ciudad A con dirección a la ciudad B un coche a 110 km/h . ¿Cuánto tiempo tardará en alcanzar el coche al camión? ¿A qué distancia de la ciudad A lo alcanzará?

Solución:



Camión	Coche
$e: e$	$e: e$
$v: 70 \text{ km/h}$	$v: 110 \text{ km/h}$
$t: t$	$t: t - 2$
$e = vt$	$e = vt$
$e = 70t$	$e = 110(t - 2)$

Hay que resolver el sistema:

$$\begin{cases} e = 70t \\ e = 110(t - 2) \end{cases}$$

$$t = 5,5 \text{ h} = 5 \text{ h } 30 \text{ min} \Rightarrow e = 70 \cdot 5,5 = 385 \text{ km}$$

Paso a paso

170. Factoriza:

$$x^4 - 2x^3 - 7x^2 + 20x - 12$$

Solución:

Resuelto en el libro del alumnado.

171. Resuelve la ecuación y haz la representación gráfica correspondiente:

$$x^4 - 5x^2 + 4 = 0$$

Solución:

Resuelto en el libro del alumnado.

172. Resuelve de manera algebraica y gráfica el siguiente sistema:

$$\left. \begin{array}{l} x^2 + y^2 = 25 \\ x - y = 1 \end{array} \right\}$$

Solución:

Resuelto en el libro del alumnado.

173. Resuelve la ecuación:

$$\log(2x + 3) - \log x = 1$$

Solución:

Resuelto en el libro del alumnado.

174. Resuelve la inecuación y haz la representación gráfica correspondiente:

$$x^2 + x - 2 \geq 0$$

Solución:

Resuelto en el libro del alumnado.

175. Internet. Abre: www.editorial-bruno.es, elige **Matemáticas, curso y tema.****Practica**

176. Resuelve las siguientes ecuaciones:

$$a) \frac{x-2}{3} - \frac{x-1}{2} + 4 = x - \frac{1}{4}$$

$$b) \frac{5x-2}{3} - \frac{3-4x}{4} = \frac{47}{12}$$

Solución:

$$a) x = \frac{7}{2}$$

$$b) x = 2$$

177. Resuelve las ecuaciones siguientes y haz la representación gráfica correspondiente:

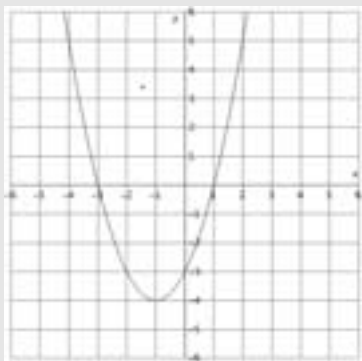
a) $x^2 + 2x - 3 = 0$

b) $x^2 + 6x + 9 = 0$

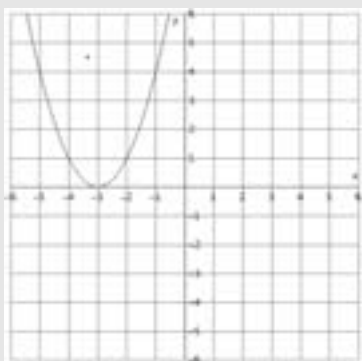
c) $x^2 - 6x + 10 = 0$

Solución:

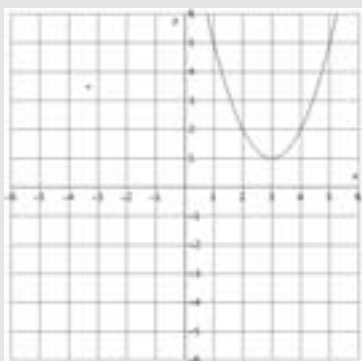
a) $x_1 = -3, x_2 = 1$



b) $x_1 = x_2 = -3$



c) No tiene raíces reales.



178. Factoriza los siguientes polinomios y halla sus raíces:

a) $x^2 + 3x - 10$

b) $x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 4$

c) $x^5 - 2x^4 - 2x^3 + 4x^2 + x - 2$

Solución:

a) $(x - 2)(x + 5)$

$x_1 = 2, x_2 = -5$

b) $(x - 1)^2(x + 2)^2$

$x_1 = x_2 = 1, x_3 = x_4 = -2$

c) $(x - 1)^2(x + 1)^2(x - 2)$

$x_1 = x_2 = 1, x_3 = x_4 = -1, x_5 = 2$

179. Calcula:

a) $\frac{x+5}{x} + \frac{2}{x^2+x} - \frac{x-1}{x+1}$

b) $\frac{x^2+2x+1}{x+2} \cdot \frac{x+3}{x-5}$

c) $\frac{x^2-x+2}{x+1} : \frac{x+2}{x-1}$

Solución:

a) $\frac{7}{x}$ b) $\frac{x^3+5x^2+7x+3}{x^2-3x-10}$ c) $\frac{x^3-2x^2+3x-2}{x^2+3x+2}$

180. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$

b) $x^6 - 9x^3 + 8 = 0$

c) $\frac{2x+1}{x+3} + \frac{x-3}{x} = \frac{1}{2}$

d) $5 + \sqrt{3x+7} = x + 6$

e) $\sqrt{2x+6} - \sqrt{3x-6} = 2x-9$

Solución:

a) $x_1 = -3, x_2 = 3, x_3 = -1, x_4 = 1$

b) $x_1 = 1, x_2 = 2$

c) $x_1 = -9/5, x_2 = 2$

d) $x = 3$

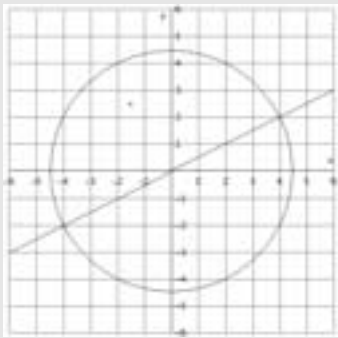
e) $x = 5$

181. Resuelve de manera algebraica y gráfica los siguientes sistemas:

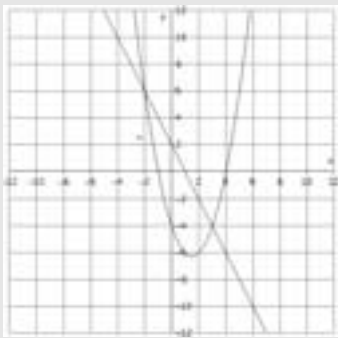
$$\begin{array}{l} \text{a) } \left. \begin{array}{l} x - 2y = 0 \\ x^2 + y^2 = 20 \end{array} \right\} \quad \text{b) } \left. \begin{array}{l} 2x + y = 2 \\ y = x^2 - 3x - 4 \end{array} \right\} \end{array}$$

Solución:

a) $x = 4, y = 2; x = -4, y = -2$



b) $x = -2, y = 6; x = 3, y = -4$



182. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $3^{x+2} + 3^x = 90$

b) $4^x - 7 \cdot 2^x - 8 = 0$

c) $7^{x-1} - 2^x = 0$

d) $\log(x+3) - \log(x-2) + 2 \log 5 = 2$

Solución:

a) $x = 2$

b) $x = 3$

c) $x = \frac{\ln 7}{\ln(7/2)} = 1.553294755$

d) $x = \frac{11}{3} = 3,6667$

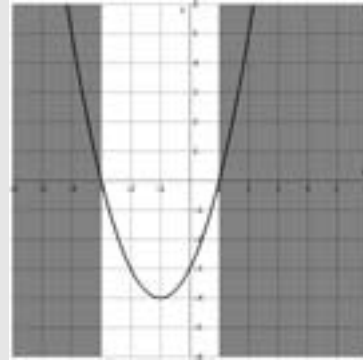
183. Resuelve la inecuación siguiente y haz la representación gráfica correspondiente:

$$x^2 + 2x - 3 > 0$$

Solución:

a) $x < -3$ o $x > 1$

Son los intervalos: $(-\infty, -3) \cup (1, +\infty)$



Plantea los siguientes problemas y resuélvelos con ayuda de Wiris o DERIVE:

184. Halla las longitudes de los lados de un triángulo rectángulo sabiendo que son tres números enteros pares consecutivos.

Solución:

$$(2x)^2 + (2x+2)^2 = (2x+4)^2$$

$$x = -1, x = 3$$

La solución $x = -1$ no vale.

Los lados miden 6, 8 y 10

185. Halla un número sabiendo que la suma de su raíz cuadrada y el doble de dicho número es igual a 21

Solución:

$$\sqrt{x} + 2x = 21$$

$$x = 9$$

186. Un rectángulo tiene 15 cm^2 de área y su diagonal mide $\sqrt{34}$. Calcula las dimensiones del rectángulo.

Solución:

$$\left. \begin{array}{l} xy = 15 \\ x^2 + y^2 = 34 \end{array} \right\}$$

b) $x_1 = 3, y_1 = 5; x_2 = -3, y_2 = -5; x_3 = 5, y_3 = 3;$
 $x_4 = -5, y_4 = -3$

Las dimensiones del rectángulo son: $5 \text{ cm} \times 3 \text{ cm}$