

1 Números reales

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Ejercicio resuelto.

2. Halla la fracción irreducible que corresponde a los siguientes números racionales.

- a) $25,25$ b) $25,\overline{25}$ c) $25,2\overline{5}$ d) $25,25 + 25,\overline{25} + 25,2\overline{5}$

$$\text{a) } 25,25 = \frac{2525}{100} = \frac{101}{4}$$

$$\text{b) } N = 25,\overline{25} = 25,252\,525\dots \Rightarrow \begin{cases} 100N = 2525,252\,525\dots \\ N = 25,252\,525\,2\dots \end{cases} \Rightarrow 99N = 2500 \Rightarrow N = \frac{2500}{99}$$

$$\text{c) } N = 25,2\overline{5} = 25,2555\dots \Rightarrow \begin{cases} 100N = 2525,555\dots \\ 10N = 252,555\dots \end{cases} \Rightarrow 90N = 2273 \Rightarrow N = \frac{2273}{90}$$

$$\text{d) } 25,25 + 25,\overline{25} + 25,2\overline{5} = \frac{101}{4} + \frac{2500}{99} + \frac{2273}{90} = \frac{150001}{1980}$$

3. Realiza las siguientes operaciones y simplifica el resultado.

$$\text{a) } \frac{15}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}}$$

$$\text{b) } \frac{14}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3}}}$$

$$\text{a) } \frac{15}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}} = \frac{15}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}} = \frac{15}{1 + \frac{2}{3}} = \frac{15}{\frac{5}{3}} = \frac{3 \cdot 15}{5} = 9$$

$$\text{b) } \frac{14}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3}}} = \frac{14}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3}}} = \frac{14}{1 + \frac{3}{4}} = \frac{14}{\frac{7}{4}} = \frac{4 \cdot 14}{7} = 8$$

4. Razona con ejemplos si son ciertas las siguientes afirmaciones.

- a) La suma de dos irracionales es siempre irracional.
 b) El producto de dos irracionales es siempre un número irracional.
- a) Es falso. Por ejemplo, $\sqrt{2}$ y $-\sqrt{2}$ son dos números irracionales, y su suma es 0, número racional.
 b) Es falso. Por ejemplo, $\sqrt{2}$ y $-\sqrt{2}$ son dos números irracionales, y su producto es -2 , número racional.

5. Se quiere vallar un campo rectangular. Se sabe que uno de sus lados mide tres quintas partes de la medida del otro. Además, la diagonal mide 30 m. Calcula el precio que se deberá pagar por hacer el vallado si cada metro de valla cuesta 25 € y se desperdicia un 10 % del material empleado.

$$\text{Los lados miden } a \text{ y } \frac{3a}{5}, \text{ por tanto la diagonal es: } D = \sqrt{a^2 + \left(\frac{3a}{5}\right)^2} = \sqrt{a^2 + \frac{9a^2}{25}} = \sqrt{\frac{34a^2}{25}} = 30 \Rightarrow a = 25,725 \text{ m}$$

El perímetro mide $2\left(a + \frac{3a}{5}\right) = 82,32 \text{ m}$, pero como se desperdicia el 10 % del material, necesitamos comprar $82,32 : 0,90 = 91,47 \text{ m}$, con un coste de $91,47 \cdot 25 = 2286,75 \text{ €}$.

6 y 7. Ejercicios resueltos.

8. Ordena de menor a mayor en cada caso.

a) $\frac{11}{4}, \frac{68}{25}, \frac{14}{5}$ y $\frac{27}{10}$ c) $\sqrt[4]{4}, \sqrt[3]{3}$ y $\sqrt{2}$

b) $1,23, 1,2\bar{3}$ y $1,\bar{2}3$ d) $2,\bar{9}, 3$ y $3,0\bar{1}$

a) $\frac{11}{4} = \frac{275}{100}, \frac{68}{25} = \frac{272}{100}, \frac{14}{5} = \frac{280}{100}$ y $\frac{27}{10} = \frac{270}{100} \Rightarrow \frac{27}{10} < \frac{68}{25} < \frac{11}{4} < \frac{14}{5}$

b) $1,23 < 1,232323... < 1,2333... \Rightarrow 1,23 < 1,2\bar{3} < 1,\bar{2}3$

c) $\sqrt[4]{4} = \sqrt[4]{2^2} = \sqrt{2} = 1,4142..., \sqrt[3]{3} = 1,4422... \Rightarrow \sqrt[4]{4} = \sqrt{2} < \sqrt[3]{3}$

d) $2,\bar{9} = \frac{29-2}{9} = 3 \Rightarrow 2,\bar{9} = 3 < 3,0\bar{1}$

9. Sean a y b dos números reales negativos. Si $a \leq b$, demuestra que el inverso de a es mayor o igual que el inverso de b . ¿Qué pasaría si a fuera negativo y b positivo?

$$a \leq b \Rightarrow a \cdot \frac{1}{a} \geq b \cdot \frac{1}{a} \Rightarrow 1 \geq \frac{b}{a} \Rightarrow 1 \cdot \frac{1}{b} \leq \frac{b}{a} \cdot \frac{1}{b} \Rightarrow \frac{1}{b} \leq \frac{1}{a}$$

Si $a < 0$ y $b > 0$, entonces:

$$a < b \Rightarrow a \cdot \frac{1}{a} > b \cdot \frac{1}{a} \Rightarrow 1 > \frac{b}{a} \Rightarrow 1 \cdot \frac{1}{b} > \frac{b}{a} \cdot \frac{1}{b} \Rightarrow \frac{1}{b} > \frac{1}{a}$$

Es decir, si a es negativo y b positivo y, por tanto, $a < b$, entonces el inverso de a es menor que el inverso de b .

Esto se podría haber deducido más fácilmente teniendo en cuenta que el inverso de a es negativo y el de b positivo y un número negativo es siempre menor que uno positivo.

10. A partir del desarrollo de $(x - y)^2$, siendo x e y dos números reales y $xy > 0$, demuestra que $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$.

$$(x - y)^2 = x^2 + y^2 - 2xy \geq 0 \Rightarrow x^2 + y^2 \geq 2xy \Rightarrow \frac{x^2 + y^2}{xy} = \frac{x^2}{xy} + \frac{y^2}{xy} = \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$$

11. Tres números reales positivos a, b y c pueden representar las medidas de los tres lados de un triángulo si y solo si verifican que la suma de los dos menores es mayor que el mayor. Indica los valores que puede tomar a para que los números naturales $a, 2a + 1$ y 10 sean las medidas de un triángulo.

Se distinguen dos posibilidades:

Si el lado mayor es $2a + 1$. Entonces

$$\begin{cases} 2a + 1 \geq 10 \\ a + 10 > 2a + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \geq 4,5 \\ a < 9 \end{cases} \Rightarrow 4,5 \leq a < 9$$

Si el lado mayor es 10 . Entonces

$$\begin{cases} 2a + 1 \leq 10 \\ a + 2a + 1 > 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \leq 4,5 \\ a > 3 \end{cases} \Rightarrow 3 < a \leq 4,5$$

Luego $3 < a < 9$

12. Sean p , q y M números reales positivos con $q < 100$. Demuestra que el número obtenido al aumentar M en un $p\%$ y, posteriormente, disminuir el resultado en un $q\%$ es mayor que M si y solo si: $p > \frac{100q}{100-q}$

Para aumentar la cantidad M en un $p\%$ se multiplica dicha cantidad por $1 + \frac{p}{100}$:

$$M \rightarrow M \left(1 + \frac{p}{100} \right)$$

Para disminuir la cantidad $M \left(1 + \frac{p}{100} \right)$ en un $q\%$ se multiplica dicha cantidad por $1 - \frac{q}{100}$:

$$M \left(1 + \frac{p}{100} \right) \rightarrow M \left(1 + \frac{p}{100} \right) \left(1 - \frac{q}{100} \right) = M \left(1 - \frac{q}{100} + \frac{p}{100} - \frac{pq}{10000} \right)$$

$$\begin{aligned} \text{Por tanto, } M \left(1 - \frac{q}{100} + \frac{p}{100} - \frac{pq}{10000} \right) > M &\Leftrightarrow 1 - \frac{q}{100} + \frac{p}{100} - \frac{pq}{10000} > 1 \Leftrightarrow \frac{pq}{10000} < \frac{p-q}{100} \Leftrightarrow pq < 100p - 100q \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 100p - pq > 100q \Leftrightarrow p(100 - q) > 100q \end{aligned}$$

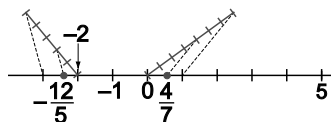
Y ya que $100 - q$ es un número positivo:

$$M \left(1 - \frac{q}{100} + \frac{p}{100} - \frac{pq}{10000} \right) > M \Leftrightarrow p(100 - q) > 100q \Leftrightarrow p > \frac{100q}{100 - q}$$

13 y 14. Ejercicios resueltos.

15. Representa en la recta real los siguientes números.

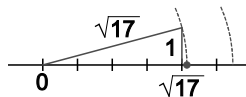
- a) 5 b) $\frac{4}{7}$ c) -2 d) $-\frac{12}{5}$



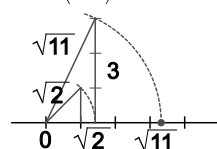
16. Representa en la recta real:

- a) $\sqrt{17}$ c) $\sqrt{11}$
b) $\sqrt{29}$ d) $\sqrt{20}$

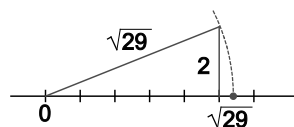
a) $17 = 4^2 + 1^2$



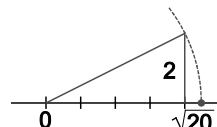
c) $11 = (\sqrt{2})^2 + 3^2$



b) $29 = 5^2 + 2^2$



d) $20 = 2^2 + 4^2$



17 a 19. Ejercicios resueltos.

20. Desarrolla el valor de las expresiones.

a) $2x - 3 + |2x - 3|$

b) $2 - 3x - |2 - 3x|$

Calcula el valor de las expresiones anteriores para los casos $x = -1$, $x = 0$ y $x = 2$.

$$a) \quad 2x - 3 + |2x - 3| = \begin{cases} 2x - 3 - (2x - 3) & \text{si } 2x - 3 < 0 \\ 2x - 3 + (2x - 3) & \text{si } 2x - 3 \geq 0 \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{si } x < \frac{3}{2} \\ 4x - 6 & \text{si } x \geq \frac{3}{2} \end{cases}$$

$$b) \quad 2 - 3x - |2 - 3x| = \begin{cases} 2 - 3x - (2 - 3x) & \text{si } 2 - 3x > 0 \\ 2 - 3x + (2 - 3x) & \text{si } 2 - 3x \leq 0 \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{si } x < \frac{2}{3} \\ -6x + 4 & \text{si } x \geq \frac{2}{3} \end{cases}$$

Para $x = -1$, el valor de ambas expresiones es 0. Para $x = 0$, el valor de ambas expresiones es 0. Para $x = 2$, el valor de la primera expresión es 2, y el de la segunda es -8.

21. Desarrolla el valor de las siguientes expresiones.

a) $|x + 2| + |x - 3|$

b) $x + |x + 2| + |x + 3|$

Calcula el valor de las expresiones anteriores para los casos $x = -2$, $x = 0$ y $x = 3$.

a) Los valores absolutos que intervienen se anulan para $x = -2$ y $x = 3$.

$$|x + 2| + |x - 3| = \begin{cases} -(x + 2) - (x - 3) & \text{si } x < -2 \\ x + 2 - (x - 3) & \text{si } -2 \leq x < 3 \\ x + 2 + x - 3 & \text{si } x \geq 3 \end{cases} = \begin{cases} -2x + 1 & \text{si } x < -2 \\ 5 & \text{si } -2 \leq x < 3 \\ 2x - 1 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$

b) Los valores absolutos que intervienen se anulan para $x = -3$ y $x = -2$.

$$x + |x + 2| + |x + 3| = \begin{cases} x - (x + 2) - (x + 3) & \text{si } x < -3 \\ x - (x + 2) + (x + 3) & \text{si } -3 \leq x < -2 \\ x + (x + 2) + (x + 3) & \text{si } x \geq -2 \end{cases} = \begin{cases} -x - 5 & \text{si } x < -3 \\ x + 1 & \text{si } -3 \leq x < -2 \\ 3x + 5 & \text{si } x \geq -2 \end{cases}$$

Para $x = -2$, el valor de la primera expresión es 5, y el de la segunda es -1. Para $x = 0$, el valor de ambas expresiones es 5. Para $x = 3$, el valor de la primera expresión es 5, y el de la segunda es 14.

22 y 23. Ejercicios resueltos.

24. Dados $A = (2, 4)$, $B = (-2, 6]$ y $C = [-3, +\infty)$, calcula:

a) $A \cup B \cup C$

b) $A \cap B \cap C$

c) $(A \cap B) \cup C$

d) $(A \cup B) \cap C$

a) $A \cup B \cup C = C = [-3, +\infty)$

c) $(A \cap B) \cup C = [-3, +\infty)$

b) $A \cap B \cap C = A = (2, 4)$

d) $(A \cup B) \cap C = B = (-2, 6]$

25. Expresa como entorno los intervalos $(-5, 2)$ y $[-5, 2]$.

$(-5, 2)$ es el entorno abierto de centro $-\frac{3}{2}$ y radio $\frac{7}{2}$ $E\left(-\frac{3}{2}, \frac{7}{2}\right)$

$[-5, 2]$ Es el entorno cerrado de centro $-\frac{3}{2}$ y radio $\frac{7}{2}$ $E\left[-\frac{3}{2}, \frac{7}{2}\right]$

26. Expresa mediante intervalos y gráficamente los siguientes conjuntos de números reales.

a) $|x - 2| < 2$

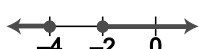
b) $|x + 3| \geq 1$

c) $|x + 1| \leq 2$

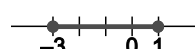
a) $(0, 4)$



b) $(-\infty, -4] \cup [-2, +\infty)$



c) $[-3, 1]$



27. Ejercicio interactivo.

28 y 29. Ejercicios resueltos.

30. Calcula las mejores aproximaciones por defecto y por exceso y el redondeo de $\sqrt{2}$ a la unidad, la centésima y la diezmilésima.

	Unidad	Centésima	Diezmilésima
Defecto	1	1,41	1,4142
Exceso	2	1,42	1,4143
Redondeo	1	1,41	1,4142

31. Halla los errores absoluto y relativo que se cometen al utilizar 1,7 como aproximación de $\frac{12}{7}$.

Error absoluto: $E_a = \left| \frac{12}{7} - 1,7 \right| = \left| \frac{12}{7} - \frac{17}{10} \right| = \frac{1}{70}$

Error relativo: $E_r = \frac{\frac{1}{70}}{\frac{12}{7}} = \frac{1}{120}$

32. Halla aproximaciones por defecto y por exceso con una, dos y tres cifras decimales de:

a) $\sqrt{5}$

b) π

Utilizando las aproximaciones anteriores calcula $\sqrt{5} + \pi$. ¿En cuál de ellas el error absoluto es mayor?

$\sqrt{5}$	1 cifra	2 cifras	3 cifras
Defecto	2,2	2,23	2,236
Exceso	2,3	2,24	2,237

π	1 cifra	2 cifras	3 cifras
Defecto	3,1	3,14	3,141
Exceso	3,2	3,15	3,142

$\sqrt{5} + \pi$	1 cifra	2 cifras	3 cifras
Defecto	5,3	5,37	5,377
Exceso	5,5	5,39	5,379

El error absoluto es obviamente mayor en las aproximaciones con una cifra decimal.

33 y 34. Ejercicios resueltos.

35. Calcula las siguientes operaciones y da el resultado en notación científica.

a) $0,000\ 48 + 0,000\ 059$

e) $1,2 \cdot 10^8 + 5000 \cdot 2,4 \cdot 10^5$

b) $35\ 000\ 000 - 720\ 000\ 000$

f) $\frac{2,2 \cdot 10^9 - 7,8 \cdot 10^8}{7,1 \cdot 10^{11}}$

c) $250\ 000 \cdot 5,5 \cdot 10^5$

g) $\frac{0,000\ 16(25 \cdot 10^3 + 2000)}{0,0025}$

d) $0,000\ 000\ 15 : 0,000\ 003$

h) $\frac{10^{23} \cdot 5,5 \cdot 10^{-12}}{3,5 \cdot 10^{22} + 4,3 \cdot 10^{21}}$

a) $0,000\ 48 + 0,000\ 059 = 4,8 \cdot 10^{-4} + 5,9 \cdot 10^{-5} = 48 \cdot 10^{-5} + 5,9 \cdot 10^{-5} = 53,9 \cdot 10^{-5} = 5,39 \cdot 10^{-4}$

b) $35\ 000\ 000 - 720\ 000\ 000 = 3,5 \cdot 10^7 - 7,2 \cdot 10^8 = 3,5 \cdot 10^7 - 72 \cdot 10^7 = -68,5 \cdot 10^7 = -6,85 \cdot 10^8$

c) $250\ 000 \cdot 5,5 \cdot 10^5 = 2,5 \cdot 10^5 \cdot 5,5 \cdot 10^5 = 13,75 \cdot 10^{10} = 1,375 \cdot 10^{11}$

d) $0,000\ 000\ 15 : 0,000\ 003 = 1,5 \cdot 10^{-7} : 3 \cdot 10^{-6} = 0,5 \cdot 10^{-1} = 5 \cdot 10^{-2}$

e) $1,2 \cdot 10^8 + 5000 \cdot 2,4 \cdot 10^5 = 1,2 \cdot 10^8 + 5 \cdot 10^3 \cdot 2,4 \cdot 10^5 = 1,2 \cdot 10^8 + 12 \cdot 10^8 = 13,2 \cdot 10^8 = 1,32 \cdot 10^9$

f) $\frac{2,2 \cdot 10^9 - 7,8 \cdot 10^8}{7,1 \cdot 10^{11}} = \frac{22 \cdot 10^8 - 7,8 \cdot 10^8}{7,1 \cdot 10^{11}} = \frac{14,2 \cdot 10^8}{7,1 \cdot 10^{11}} = 2 \cdot 10^{-3}$

g) $\frac{0,000\ 16(25 \cdot 10^3 + 2000)}{0,0025} = \frac{1,6 \cdot 10^{-4}(25 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^3)}{2,5 \cdot 10^{-3}} = \frac{1,6 \cdot 10^{-4} \cdot 27 \cdot 10^3}{2,5 \cdot 10^{-3}} = 17,28 \cdot 10^2 = 1,728 \cdot 10^3$

h) $\frac{10^{23} \cdot 5,5 \cdot 10^{-12}}{3,5 \cdot 10^{22} + 4,3 \cdot 10^{21}} = \frac{5,5 \cdot 10^{11}}{35 \cdot 10^{21} + 4,3 \cdot 10^{21}} = \frac{5,5 \cdot 10^{11}}{39,3 \cdot 10^{21}} = 0,13995 \cdot 10^{-10} = 1,3995 \cdot 10^{-11}$

36. Un átomo de hidrógeno (H) tiene una masa de $1,66 \cdot 10^{-24}$ g aproximadamente.

a) ¿Cuántos átomos de H se necesitan para obtener 20 kg de ese gas?

b) ¿Cuál es, aproximadamente, la masa de $2,524 \cdot 10^{26}$ átomos de H?

c) Si 2 g de hidrógeno molecular ocupan un volumen de 22,4 L a 0 °C y a la presión de 1 atm, ¿cuántas moléculas de hidrógeno contendría un recipiente de 5 L en estas condiciones?

a) $\frac{20000}{1,66 \cdot 10^{-24}} = 1,205 \cdot 10^{28}$ átomos de H serán necesarios para obtener una masa de 20 kg.

b) $2,524 \cdot 10^{26} \cdot 1,66 \cdot 10^{-24} = 419\text{ g} = 0,419\text{ kg}$

c) El recipiente de 5 litros contiene $\frac{2,5}{22,4}$ gramos de hidrógeno, es decir, $\frac{10}{22,4} : (1,66 \cdot 10^{-24}) = 2,689 \cdot 10^{23}$ átomos de hidrógeno. Como cada molécula está compuesta por dos átomos, habrá $1,345 \cdot 10^{23}$ moléculas en total.

37. La masa de la Tierra es de $5,97 \cdot 10^{24}$ kg, y la de Plutón, de $1,29 \cdot 10^{22}$ kg.

a) ¿Cuál es la relación entre ambas masas?

b) Suponiendo que ambos cuerpos fueran esferas perfectas con radios de 6371 y 1160 km, respectivamente, calcula la densidad aproximada de cada uno de ellos.

a) La masa de la tierra es $5,97 \cdot 10^{24} : 1,29 \cdot 10^{22} = 463$ veces mayor que la de Plutón.

b) Densidad de la Tierra = $\frac{\text{Masa}}{\text{Volumen}} = \frac{5,97 \cdot 10^{24}\text{ kg}}{\frac{4}{3} \pi \cdot 6371^3\text{ km}^3} = 5,5 \cdot 10^{12}\text{ kg/km}^3 = \frac{5,5 \cdot 10^{12} \cdot 1000}{10^{15}} = 5,5\text{ g/cm}^3$

Densidad de Plutón = $\frac{\text{Masa}}{\text{Volumen}} = \frac{1,29 \cdot 10^{22}\text{ kg}}{\frac{4}{3} \pi \cdot 1160^3\text{ km}^3} = 1,97 \cdot 10^{12}\text{ kg/km}^3 = 1,97\text{ g/cm}^3$

38. Ejercicio resuelto.

39. Simplifica las siguientes expresiones.

$$a) \sqrt{2} + \frac{3}{2}\sqrt{8} - \frac{1}{4}\sqrt{18}$$

$$c) \frac{\sqrt{8} + 2\sqrt{32} + 2\sqrt{128}}{\sqrt{2}}$$

$$e) \frac{a^4 \cdot \sqrt[3]{a^2} \cdot (\sqrt{a})^3}{\sqrt[3]{a^5}}$$

$$b) \sqrt[4]{144a^2} - 2\sqrt{\frac{27}{16}a} + \sqrt{3a}$$

$$d) \sqrt{\sqrt{\frac{\sqrt{2} + \sqrt{8}}{\sqrt{20} + \sqrt{5}}}}$$

$$f) \frac{\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt{a^3} \sqrt{a}}{\sqrt[6]{a} \sqrt{a^3}} : \sqrt[3]{\frac{1}{a}}$$

$$a) \sqrt{2} + \frac{3}{2}\sqrt{8} - \frac{1}{4}\sqrt{18} = \sqrt{2} + \frac{3 \cdot 2}{2}\sqrt{2} - \frac{3}{4}\sqrt{2} = \sqrt{2} + 3\sqrt{2} - \frac{3}{4}\sqrt{2} = \frac{13}{4}\sqrt{2}$$

$$b) \sqrt[4]{144a^2} - 2\sqrt{\frac{27}{16}a} + \sqrt{3a} = \sqrt{12a} - 2 \cdot \frac{3}{4}\sqrt{3a} + \sqrt{3a} = 2\sqrt{3a} - \frac{3}{2}\sqrt{3a} + \sqrt{3a} = \frac{3}{2}\sqrt{3a}$$

$$c) \frac{\sqrt{8} + 2\sqrt{32} + 2\sqrt{128}}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2} + 8\sqrt{2} + 16\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{26\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 26$$

$$d) \sqrt{\sqrt{\frac{\sqrt{2} + \sqrt{8}}{\sqrt{20} + \sqrt{5}}}} = \sqrt[4]{\frac{\sqrt{2} + 2\sqrt{2}}{2\sqrt{5} + \sqrt{5}}} = \sqrt[4]{\frac{3\sqrt{2}}{3\sqrt{5}}} = \sqrt[4]{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}} = \frac{\sqrt[8]{2}}{\sqrt[8]{5}} = \frac{\sqrt[8]{2 \cdot 5^7}}{\sqrt[8]{5^7}} = \frac{\sqrt[8]{2 \cdot 5^7}}{5}$$

$$e) \frac{a^4 \sqrt[3]{a^2} (\sqrt{a})^3}{\sqrt[3]{a^5}} = \frac{a^4 a^{\frac{2}{3}} a^{\frac{3}{2}}}{a^{\frac{5}{6}}} = a^{4 + \frac{2}{3} + \frac{3}{2} - \frac{5}{6}} = a^{\frac{16}{3}} = \sqrt[3]{a^{16}}$$

$$f) \frac{\sqrt[3]{a} \sqrt{a^3} \sqrt{a}}{\sqrt[6]{a} \sqrt{a^3}} : \sqrt[3]{\frac{1}{a}} = \frac{a^{\frac{1}{3}} a^{\frac{3}{2}} a^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{6}} a^{\frac{3}{2}}} : \frac{1}{a^{\frac{1}{3}}} = \frac{a^{\frac{1}{3} + \frac{3}{2} + \frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{6} + \frac{3}{2}}} \cdot a^{\frac{1}{3}} = \frac{a^{\frac{1}{3} + \frac{7}{4} + \frac{1}{3}}}{a^{\frac{5}{4}}} = \frac{a^{\frac{29}{12}}}{a^{\frac{5}{4}}} = a^{\frac{24}{12}} = a^2$$

40. Opera y simplifica las siguientes expresiones.

$$a) 128^{\frac{1}{2}} + 162^{\frac{3}{2}}$$

$$b) \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}$$

$$a) 128^{\frac{1}{2}} + 162^{\frac{3}{2}} = \sqrt{128} + \sqrt{162^3} = \sqrt{2^7} + \sqrt{2^3 \cdot 3^{12}} = 2^3\sqrt{2} + 2 \cdot 3^6\sqrt{2} = 8\sqrt{2} + 1458\sqrt{2} = 1466\sqrt{2}$$

$$b) \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}} = \sqrt{\sqrt{2^3}\sqrt{2}} = \sqrt{\sqrt{2^7}} = \sqrt[8]{2^7}$$

41. Halla una expresión más simple para las siguientes.

$$a) \frac{\sqrt{a}}{1 - \frac{\sqrt{a}}{1 + \sqrt{a}}} - \frac{\sqrt{a}}{1 + \frac{\sqrt{a}}{1 - \sqrt{a}}}$$

$$b) \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{2} + 2\sqrt{a}} - \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{2} - 2\sqrt{a}}$$

$$a) \frac{\sqrt{a}}{1 - \frac{\sqrt{a}}{1 + \sqrt{a}}} - \frac{\sqrt{a}}{1 + \frac{\sqrt{a}}{1 - \sqrt{a}}} = \frac{\sqrt{a}}{\frac{1 + \sqrt{a} - \sqrt{a}}{1 + \sqrt{a}}} - \frac{\sqrt{a}}{\frac{1 - \sqrt{a} + \sqrt{a}}{1 - \sqrt{a}}} = \sqrt{a}(1 + \sqrt{a}) - \sqrt{a}(1 - \sqrt{a}) = \sqrt{a} + a - \sqrt{a} + a = 2a$$

$$b) \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{2} + 2\sqrt{a}} - \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{2} - 2\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a}(\sqrt{2} - 2\sqrt{a})}{(\sqrt{2} + 2\sqrt{a})(\sqrt{2} - 2\sqrt{a})} - \frac{\sqrt{a}(\sqrt{2} + 2\sqrt{a})}{(\sqrt{2} - 2\sqrt{a})(\sqrt{2} + 2\sqrt{a})} = \frac{\sqrt{2a} - 2a}{2 - 4a} - \frac{\sqrt{2a} + 2a}{2 - 4a} = \frac{\sqrt{2a} - 2a - \sqrt{2a} - 2a}{2 - 4a} = \frac{-4a}{2 - 4a} = \frac{2a}{2a - 1}$$

42. Racionaliza los siguientes denominadores.

a) $\frac{5}{2\sqrt{5}}$

c) $\frac{5}{2\sqrt{5}+1}$

e) $\frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{3}-3\sqrt{2}}$

b) $\frac{5}{2\sqrt[4]{5}}$

d) $\frac{3}{\sqrt{3}-2\sqrt{6}}$

f) $\frac{2\sqrt{3}-3\sqrt{2}}{\sqrt{8}-\sqrt{27}}$

a) $\frac{5}{2\sqrt{5}} = \frac{5\sqrt{5}}{2\sqrt{5}\sqrt{5}} = \frac{5\sqrt{5}}{10} = \frac{\sqrt{5}}{2}$

b) $\frac{5}{2\sqrt[4]{5}} = \frac{5 \cdot \sqrt[4]{5^3}}{2\sqrt[4]{5} \cdot \sqrt[4]{5^3}} = \frac{5 \cdot \sqrt[4]{5^3}}{2 \cdot 5} = \frac{\sqrt[4]{5^3}}{2}$

c) $\frac{5}{2\sqrt{5}+1} = \frac{5(2\sqrt{5}-1)}{(2\sqrt{5}+1)(2\sqrt{5}-1)} = \frac{10\sqrt{5}-5}{(2\sqrt{5})^2-1^2} = \frac{10\sqrt{5}-5}{4 \cdot 5-1} = \frac{10\sqrt{5}-5}{19}$

d) $\frac{3}{\sqrt{3}-2\sqrt{6}} = \frac{3(\sqrt{3}+2\sqrt{6})}{(\sqrt{3}-2\sqrt{6})(\sqrt{3}+2\sqrt{6})} = \frac{3\sqrt{3}+6\sqrt{6}}{3-4 \cdot 6} = -\frac{3\sqrt{3}+6\sqrt{6}}{21} = -\frac{\sqrt{3}+2\sqrt{6}}{7}$

e) $\frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{3}-3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}(2\sqrt{3}+3\sqrt{2})}{(2\sqrt{3}-3\sqrt{2})(2\sqrt{3}+3\sqrt{2})} = \frac{2\sqrt{18}+3\sqrt{12}}{4 \cdot 3-9 \cdot 2} = -\frac{6\sqrt{2}+6\sqrt{3}}{6} = -\sqrt{2}-\sqrt{3}$

f) $\frac{2\sqrt{3}-3\sqrt{2}}{\sqrt{8}-\sqrt{27}} = \frac{2\sqrt{3}-3\sqrt{2}}{2\sqrt{2}-3\sqrt{3}} = \frac{(2\sqrt{3}-3\sqrt{2})(2\sqrt{2}+3\sqrt{3})}{(2\sqrt{2}-3\sqrt{3})(2\sqrt{2}+3\sqrt{3})} = \frac{4\sqrt{6}+18-12-9\sqrt{6}}{8-27} = \frac{5\sqrt{6}-6}{19}$

43. Ejercicio interactivo.

44 a 48. Ejercicios resueltos.

49. Aplicando la definición, halla el valor de los logaritmos:

a) $\log_2 16$

c) $\log_7 \frac{1}{49}$

e) $\log_3 3\sqrt{3}$

g) $\log_3 0, \hat{3}$

b) $\log_5 \sqrt[3]{25}$

d) $\log_9 \sqrt[3]{3}$

f) $\log_{\frac{1}{2}} \sqrt{8}$

h) $\log_8 0,125$

a) $\log_2 16 = \log_2 2^4 = 4$

b) $\log_5 \sqrt[3]{25} = \log_5 \sqrt[3]{5^2} = \log_5 5^{\frac{2}{3}} = \frac{2}{3}$

c) $\log_7 \frac{1}{49} = x \Rightarrow 7^x = \frac{1}{49} = 7^{-2} \Rightarrow x = -2 \Rightarrow \log_7 \frac{1}{49} = -2$

d) $\log_9 \sqrt[3]{3} = x \Rightarrow 9^x = \sqrt[3]{3} = 3^{\frac{1}{3}} \Rightarrow 3^{2x} = 3^{\frac{1}{3}} \Rightarrow 2x = \frac{1}{3} \Rightarrow x = \frac{1}{6} \Rightarrow \log_9 \sqrt[3]{3} = \frac{1}{6}$

e) $\log_3 3\sqrt{3} = x \Rightarrow 3^x = 3\sqrt{3} = 3 \cdot 3^{\frac{1}{2}} = 3^{\frac{3}{2}} \Rightarrow x = \frac{3}{2} \Rightarrow \log_3 3\sqrt{3} = \frac{3}{2}$

f) $\log_{\frac{1}{2}} \sqrt{8} \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^x = \sqrt{8} \Rightarrow 2^{-x} = \sqrt{2^3} = 2^{\frac{3}{2}} \Rightarrow x = -\frac{3}{2} \Rightarrow \log_{\frac{1}{2}} \sqrt{8} = -\frac{3}{2}$

g) $\log_3 0, \hat{3} = x \Rightarrow 3^x = 0, \hat{3} = \frac{1}{3} = 3^{-1} \Rightarrow x = -1 \Rightarrow \log_3 0, \hat{3} = -1$

h) $\log_8 0,125 = x \Rightarrow 8^x = 0,125 \Rightarrow 2^{3x} = \frac{1}{8} = 2^{-3} \Rightarrow 3x = -3 \Rightarrow x = -1 \Rightarrow \log_8 0,125 = -1$

50. Tomando $\log 2 = 0,301$ y que $\log 3 = 0,477$, halla:

a) $\log_3 8$

b) $\log 60$

c) $\log \sqrt{0,012}$

a) $\log_3 8 = \frac{\log 8}{\log 3} = \frac{\log 2^3}{\log 3} = \frac{3 \log 2}{\log 3} = 1,893$

b) $\log 60 = \log (2 \cdot 3 \cdot 10) = \log 2 + \log 3 + \log 10 = 0,301 + 0,477 + 1 = 1,778$

c) $\log \sqrt{0,012} = \log \sqrt{\frac{12}{1000}} = \log \left(\frac{12}{1000} \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \log \frac{12}{1000} = \frac{1}{2} (\log 12 - \log 1000) = \frac{1}{2} (\log (2^2 \cdot 3) - \log 10^3) =$
 $= \frac{1}{2} (2 \log 2 + \log 3 - 3) = \frac{1}{2} (2 \cdot 0,301 + 0,477 - 3) = -0,9605$

51. Toma logaritmos en la expresión $A = (x^x)^x$.

$$\log A = \log \left[(x^x)^x \right] = x \log (x^x) = x \cdot x \log x = x^2 \log x$$

52. Escribe en la forma algebraica las siguientes expresiones.

a) $\log A = 2 + 2 \log x - \log y$

c) $\log C = 2 \log \sqrt{x} - \log x - \log y + 3 \log \sqrt[3]{y}$

b) $\log B = 3(\log x - 1) - 2(1 - \log y)$

d) $\log D = \log x^3 + 3 \log y - \log x^4$

a) $\log A = \log 100 + \log x^2 - \log y \Rightarrow \log A = \log \frac{100x^2}{y} \Rightarrow A = \frac{100x^2}{y}$

b) $\log B = 3 \log x + 2 \log y - 5 = \log \frac{x^3 y^2}{10^5} \Rightarrow B = \frac{x^3 y^2}{10^5}$

c) $\log C = \log x - \log x - \log y + \log y = 0 = \log 1 \Rightarrow C = 1$

d) $\log D = \log x^3 + \log y^3 - \log x^4 = \log \frac{x^3 y^3}{x^4} = \log \frac{y^3}{x} \Rightarrow D = \frac{y^3}{x}$

53. Halla el valor de los siguientes logaritmos utilizando para ello la calculadora.

a) $\log_3 21$

b) $\log_{0,01} 12$

c) $\log_{\sqrt{3}} 19$

a) $\log_3 21 = \frac{\ln 21}{\ln 3} = 2,771$

b) $\log_{0,01} 12 = \frac{\ln 12}{\ln 0,01} = -0,540$

c) $\log_{\sqrt{3}} 19 = \frac{\ln 19}{\ln \sqrt{3}} = 5,360$

54 a 56. Ejercicios resueltos.

57. En un cultivo de bacterias, el número se duplica cada dos días. Un día se contabilizan 3000 bacterias.

- Calcula el número de bacterias que habrá 15 días después.
- ¿Cuántos días han de pasar para que haya el triple de bacterias? ¿Y si el número inicial fuera de 6000 bacterias?
- Se supone que la población se estabiliza al alcanzar las 20 000 bacterias. ¿Cuánto tiempo ha de pasar para ello?

El número de bacterias cuando han pasado t días es $N = 3000 \cdot 2^{\frac{t}{2}}$.

a) Para $t = 15 \Rightarrow N = 3000 \cdot 2^{7,5} = 543\,058$ bacterias

b) $3N = N \cdot 2^{\frac{t}{2}} \Rightarrow 2^{\frac{t}{2}} = 3 \Rightarrow \log 2^{\frac{t}{2}} = \log 3 \Rightarrow \frac{t}{2} \log 2 = \log 3 \Rightarrow t = 2 \cdot \frac{\log 3}{\log 2} = 3,17$ días

El resultado anterior es independiente del número inicial de bacterias.

c) $20000 = 3000 \cdot 2^{\frac{t}{2}} \Rightarrow 2^{\frac{t}{2}} = \frac{20000}{3000} \Rightarrow \log 2^{\frac{t}{2}} = \log \frac{20}{3} \Rightarrow \frac{t}{2} \log 2 = \log \frac{20}{3} \Rightarrow t = 2 \cdot \frac{\log \frac{20}{3}}{\log 2} = 5,47$ días

58. Cierta sustancia radiactiva tiene un período de semidesintegración de 1600 años. Calcula la cantidad de masa a la que se habrá reducido 1 kilogramo de esta sustancia al cabo de 10 000 años.

La masa al cabo de 10 000 años será: $1 \cdot 0,5^{\frac{10000}{1600}} = 0,01314$ kg = 13,14 g

59. Se depositan en un banco 5000 € durante 2 años. El banco informa de que el interés es del 3,5 % anual.

- Calcula el capital acumulado suponiendo que la capitalización es anual.
- ¿A cuánto asciende si es mensual?
- ¿Cuál sería el capital acumulado con una capitalización diaria?
- Interpreta los resultados obtenidos.

a) $C = 5000 \cdot 1,035^2 = 5356$ €

b) $C = 5000 \left(1 + \frac{3,5}{1200} \right)^{2 \cdot 12} = 5362$ €

c) $C = 5000 \left(1 + \frac{3,5}{36500} \right)^{2 \cdot 365} = 5362,5$ €

- No se aprecian grandes diferencias al cambiar la acumulación anual por la mensual, y son casi insignificantes al cambiarla por acumulación diaria.

60. Ejercicio interactivo.

61 a 75. Ejercicios resueltos.

EJERCICIOS

Números reales

76. Escribe dos números comprendidos entre:

a) $\frac{19}{23}$ y $\frac{20}{23}$

b) $\frac{22}{7}$ y π

a) Respuesta abierta. $\frac{19}{23} = \frac{57}{69}$ y $\frac{20}{23} = \frac{60}{69}$. Entre estos dos números están $\frac{58}{69}$ y $\frac{59}{69}$.

b) Respuesta abierta. $\frac{22}{7} = 3,1428\dots$, $\pi = 3,1415\dots$. Entre ambos están 3,1416 y 3,1417.

77. Clasifica los siguientes números en racionales e irracionales. En el caso de los racionales, indica su expresión mediante una fracción irreducible.

a) 12,121 314 15...

c) 12,012 121 2...

e) 1,123 123 123...

b) 12,121 212...

d) 1,010 010 001...

f) 0,001 002 003 004...

a) 12,121 314 15... Irracional

b) $12,121\ 212\dots = 12,\overline{12}$ Racional $\begin{cases} 100N = 1212,1212\dots \\ N = 12,121212\dots \end{cases} \Rightarrow 99N = 1200 \Rightarrow N = \frac{1200}{99} = \frac{400}{33}$

c) $12,012\ 121\ 2\dots = 12,0\overline{12}$ Racional $\begin{cases} 1000N = 12012,1212\dots \\ 10N = 120,121212\dots \end{cases} \Rightarrow 990N = 11892 \Rightarrow N = \frac{11892}{990} = \frac{1982}{165}$

d) ,010010001... Irracional

e) $1,123\ 123\ 123\dots = 1,\overline{123}$ Racional $\begin{cases} 1000N = 1123,123123\dots \\ N = 1,123123\dots \end{cases} \Rightarrow 999N = 1122 \Rightarrow N = \frac{1122}{999} = \frac{374}{333}$

f) 0,001 002 003 004... Irracional

78. Clasifica estos números indicando a qué conjuntos numéricos pertenecen.

a) 25,012 345 6...

c) -4

e) 2

g) $-\sqrt{0,0625}$

b) 25,425 252 5...

d) $\frac{3}{7}$

f) $\sqrt{2,3}$

h) $-\frac{65}{13}$

a) 25,012 345 6... es irracional y real.

e) 2 es natural, entero, racional y real.

b) 25,425 252 5... es racional y real.

f) $\sqrt{2,3}$ es irracional y real.

c) -4 es entero, racional y real.

g) $-\sqrt{0,0625} = -0,25$ es racional y real.

d) $\frac{3}{7}$ es racional y real.

h) $-\frac{65}{13} = -5$ es entero, racional y real.

79. Ordena de menor a mayor estos números.

25,0111...

$\frac{126}{5}$

25,01

$\frac{226}{9}$

$$\frac{126}{5} = 25,2 \text{ y } \frac{226}{9} = 25,111\dots$$

$$\text{El orden es: } 25,01 < 25,0111\dots < \frac{226}{9} < \frac{126}{5}$$

80. Calcula el valor de las expresiones y expresa el resultado mediante números decimales periódicos.

a) $\frac{2,23 + 2,2333...}{2,232323...}$

b) $1 + 1,12 + 1,1\overline{2} + 1,1\overline{2}$

a) $\frac{2,23 + 2,2333...}{2,232323...} = \frac{\frac{223}{100} + \frac{223-22}{90}}{\frac{223-2}{99}} = \frac{\frac{300}{99}}{\frac{221}{99}} = \frac{300}{221} = \frac{132561}{66300} = \frac{3399}{1700} = 1,999411764705882352$

b) $1 + 1,12 + 1,1\overline{2} + 1,1\overline{2} = 1 + \frac{112}{100} + \frac{112-11}{90} + \frac{112-1}{99} = \frac{21599}{4950} = 4,363\overline{4}$

81. Representa los siguientes números reales.

a) $\frac{12}{5}$

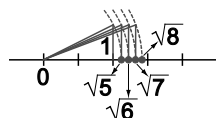
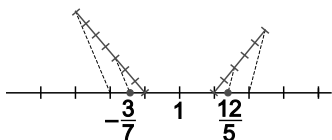
c) $\sqrt{5}$

e) $\sqrt{7}$

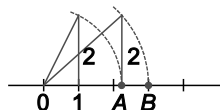
b) $-\frac{3}{7}$

d) $\sqrt{6}$

f) $\sqrt{8}$



82. Indica qué números reales representan los puntos A y B de la figura.



$A = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$

$B = \sqrt{2^2 + (\sqrt{5})^2} = \sqrt{4+5} = 3$

Valor absoluto e intervalos

83. Desarrolla las siguientes expresiones.

a) $|2x - 4| + x$

b) $|x| + |2x|$

c) $|x - 1| + |x + 1|$

d) $x + |x| + |x + 2|$

a) $|2x - 4| + x = \begin{cases} -2x + 4 + x & \text{si } x < 2 \\ 2x - 4 + x & \text{si } x \geq 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4 - x & \text{si } x < 2 \\ 3x - 4 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

b) $|x| + |2x| = \begin{cases} -x - 2x & \text{si } x < 0 \\ x + 2x & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3x & \text{si } x < 0 \\ 3x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

Se podía haber hecho $|x| + |2x| = |x| + 2|x| = 3|x|$

c) $|x - 1| + |x + 1| = \begin{cases} -(x - 1) - (x + 1) & \text{si } x \leq -1 \\ -(x - 1) + x + 1 & \text{si } -1 < x < 1 \\ x - 1 + x + 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases} = \begin{cases} -2x & \text{si } x \leq -1 \\ 2 & \text{si } -1 < x < 1 \\ 2x & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

d) $x + |x| + |x + 2| = \begin{cases} x - x - x - 2 & \text{si } x < -2 \\ x - x + x + 2 & \text{si } -2 \leq x \leq 0 \\ x + x + x + 2 & \text{si } x > 0 \end{cases} = \begin{cases} -x - 2 & \text{si } x < -2 \\ x + 2 & \text{si } -2 \leq x \leq 0 \\ 3x + 2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

84. Dados los conjuntos $A = (-2, +\infty)$, $B = (-2, 0]$ y $C = [0, 4)$, calcula $A \cup B \cup C$ y $A \cap B \cap C$.

$A \cup B \cup C = A = (-2, +\infty)$ $A \cap B \cap C = \{0\}$

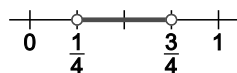
85. Expresa mediante un intervalo los siguientes conjuntos de números reales x y represéntalos en la recta real.

a) $\left|x - \frac{1}{2}\right| < \frac{1}{4}$

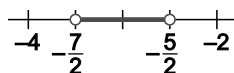
b) $|2x + 6| < 1$

c) $|x| < \frac{1}{3}$

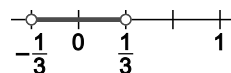
a) $\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right)$



b) $|x + 3| < \frac{1}{2} \Rightarrow \left(-\frac{7}{2}, -\frac{5}{2}\right)$



c) $\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$



Aproximaciones y errores

86. Da la expresión aproximada que se pide en cada caso.

a) $\frac{23}{7}$ por exceso con tres cifras decimales

b) $\sqrt{5} + \sqrt{125}$ por defecto con dos cifras decimales

c) $2\pi - 1$ redondeado a tres cifras decimales

a) $\frac{23}{7} \approx 3,286$

b) $\sqrt{5} + \sqrt{125} \approx 13,41$

c) $2\pi - 1 \approx 5,283$

87. Acota el error relativo que se comete al tomar como aproximación del número áureo $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ el número racional 1,618.

$$\text{Error relativo: } E_r = \frac{\left|\frac{1+\sqrt{5}}{2} - 1,618\right|}{1,618} < \frac{0,000\,034}{1,618} < 0,000\,022$$

88. Escribe las aproximaciones hasta las milésimas, por exceso y por defecto, de los números $\sqrt{3}$ y 3π . Posteriormente, obtén aproximaciones por defecto y por exceso del producto $3\pi \cdot \sqrt{3}$.

Acota el error absoluto cometido en ambos casos.

$\sqrt{3}$	1 cifra	2 cifras	3 cifras
Defecto	1,7	1,73	1,732
Exceso	1,8	1,74	1,733

3π	1 cifra	2 cifras	3 cifras
Defecto	9,4	9,42	9,424
Exceso	9,5	9,43	9,425

$3\pi\sqrt{3}$	1 cifra	2 cifras	3 cifras
Defecto	16,3	16,32	16,324
Exceso	16,4	16,33	16,325

Aproximando con tres decimales por defecto tenemos:

para $\sqrt{3} = 1,732\ 050\ 8\dots$: $E_a = 0,000\ 050\ 8\dots < 0,000\ 051$

para $3\pi = 9,424\ 777\ 9\dots$: $E_a = 0,000\ 777\ 9\dots < 0,0008$

para $3\pi\sqrt{3} = 16,324\ 194\ 2\dots$: $E_a = 0,000\ 194\ 2\dots < 0,0002$

Aproximando con tres decimales por exceso tenemos:

para $\sqrt{3} = 1,732\ 050\ 8\dots$: $E_a = 0,000\ 949\ 1\dots < 0,000\ 95$

para $3\pi = 9,424\ 777\ 9\dots$: $E_a = 0,000\ 222\ 0\dots < 0,000\ 23$

para $3\pi\sqrt{3} = 16,324\ 194\ 2\dots$: $E_a = 0,000\ 825\ 7\dots < 0,000\ 83$

Notación científica

89. Realiza las siguientes operaciones y expresa el resultado en notación científica.

a) $10^8 - 4 \cdot 10^6$

b) $0,000\ 25 \cdot 0,0015$

c) $235\ 000 \cdot 0,000\ 25$

d) $15\ 000\ 000 : 45\ 000$

e) $0,000\ 06 : 45\ 000\ 000$

f) $0,0025 \cdot 10^{-13} : 10^{-23}$

g) $\frac{1,2 \cdot 10^8 - 1,5 \cdot 10^7 + 6 \cdot 10^9}{0,000\ 003}$

h) $\frac{7 \cdot 10^{-20} + 5 \cdot 10^{-18}}{0,000\ 000\ 004}$

a) $10^8 - 4 \cdot 10^6 = 9,6 \cdot 10^7$

b) $0,000\ 25 \cdot 0,0015 = 3,75 \cdot 10^{-7}$

c) $235\ 000 \cdot 0,000\ 25 = 5,875 \cdot 10$

d) $15\ 000\ 000 : 45\ 000 = 3,333\dots \cdot 10^2$

e) $0,000\ 06 : 45\ 000\ 000 = 1,333\dots \cdot 10^{-12}$

f) $0,0025 \cdot 10^{-13} : 10^{-23} = 2,5 \cdot 10^7$

g) $\frac{1,2 \cdot 10^8 - 1,5 \cdot 10^7 + 6 \cdot 10^9}{0,000\ 003} = 2,035 \cdot 10^{15}$

h) $\frac{7 \cdot 10^{-20} + 5 \cdot 10^{-18}}{0,000\ 000\ 004} = 1,2675 \cdot 10^{-9}$

Potencias y radicales

90. Simplifica las expresiones siguientes.

a) $\frac{3^{3+\sqrt{9}}\sqrt{2^2+5}}{2(-3)-5}$

f) $\sqrt[4]{390625 a^5 b^{16}}$

k) $16^{\frac{1}{2}} + 9^{\frac{3}{2}}$

b) $\frac{\left(2-\frac{3}{2}\right)^{-2} (4^3-4^2)^{-1}}{6^{-2}}$

g) $\sqrt{x} \sqrt[3]{x} \sqrt[4]{x^3}$

l) $\sqrt[3]{81a^3} + 2a\sqrt[3]{24}$

c) $\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^{-2} \left(\frac{4}{3}\right)^{-3}}{2^{-4} \cdot 3^{-3}}$

h) $\sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3}}}$

m) $\sqrt[3]{\sqrt{2} \sqrt[3]{4}}$

d) $\frac{27^{-15} (-75)^{40}}{45^{35} (-15)^{60}}$

i) $\left(\frac{1}{2} - \sqrt{2 - \frac{1}{2}}\right)^2$

n) $\sqrt{\frac{2}{3}} + \sqrt{\frac{3}{2}}$

e) $\sqrt{3} + 2\sqrt{27} - \sqrt{12}$

j) $\frac{\sqrt{x\sqrt{x}}}{\sqrt[3]{x}}$

a) $\frac{3^{3+\sqrt{9}}\sqrt{2^2+5}}{2(-3)-5} = \frac{3^6 \cdot 3}{-11} = -\frac{3^7}{11}$

b) $\frac{\left(2-\frac{3}{2}\right)^{-2} (4^3-4^2)^{-1}}{6^{-2}} = \frac{2^2 \cdot \frac{1}{48}}{2^{-2} \cdot 3^{-2}} = \frac{2^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2}{2^4 \cdot 3} = 3$

c) $\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^{-2} \left(\frac{4}{3}\right)^{-3}}{2^{-4} \cdot 3^{-3}} = \frac{\frac{2^2}{3^2} \cdot \frac{3^3}{2^6}}{2^{-4} \cdot 3^{-3}} = \frac{2^2 \cdot 3^3 \cdot 2^4 \cdot 3^3}{3^2 \cdot 2^6} = 3^4 = 81$

d) $\frac{27^{-15} \cdot (-75)^{40}}{45^{35} \cdot (-15)^{60}} = \frac{(3^3)^{-15} (3 \cdot 5^2)^{40}}{(3^2 \cdot 5)^{35} (3 \cdot 5)^{60}} = \frac{3^{-45} \cdot 3^{40} \cdot 5^{80}}{3^{70} \cdot 5^{35} \cdot 3^{60} \cdot 5^{60}} = 3^{-135} \cdot 5^{-15}$

e) $\sqrt{3} + 2\sqrt{27} - \sqrt{12} = \sqrt{3} + 2 \cdot 3\sqrt{3} - 2\sqrt{3} = 5\sqrt{3}$

f) $\sqrt[4]{390625 a^5 b^{16}} = \sqrt[4]{5^8 a^5 b^{16}} = 5^2 a b^4 \sqrt[4]{a} = 25ab^4 \sqrt[4]{a}$

g) $\sqrt{x} \sqrt[3]{x} \sqrt[4]{x^3} = \sqrt[12]{x^6 x^4 x^9} = \sqrt[12]{x^{19}} = x \sqrt[12]{x^7}$

h) $\sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3}}} = \sqrt[8]{3^4 3^2 3} = \sqrt[8]{3^7}$

i) $\left(\frac{1}{2} - \sqrt{2 - \frac{1}{2}}\right)^2 = \frac{1}{4} + 2 - \frac{1}{2} - 2 \cdot \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{7}{4} - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{7}{4} - \frac{\sqrt{6}}{2}$

j) $\frac{\sqrt{x\sqrt{x}}}{\sqrt[3]{x}} = \frac{\sqrt[4]{x^3}}{\sqrt[3]{x}} = \sqrt[12]{\frac{(x^3)^3}{x^4}} = \sqrt[12]{x^5}$

k) $16^{\frac{1}{2}} + 9^{\frac{3}{2}} = \sqrt{16} + \sqrt{3^6} = 4 + 27 = 31$

l) $\sqrt[3]{81a^3} + 2a\sqrt[3]{24} = 3a\sqrt[3]{3} + 4a\sqrt[3]{3} = 7a\sqrt[3]{3}$

m) $\sqrt[3]{\sqrt{2} \sqrt[3]{4}} = \sqrt[3]{\sqrt[6]{2^3 \cdot 4^2}} = \sqrt[18]{2^7}$

n) $\sqrt{\frac{2}{3}} + \sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2} \sqrt{2} + \sqrt{3} \sqrt{3}}{\sqrt{6}} = \frac{2+3}{\sqrt{6}} = \frac{5}{\sqrt{6}} = \frac{5\sqrt{6}}{6}$

91. Opera y simplifica.

a) $(-2)^0 + (-2)^1 + (-2)^2 + \dots + (-2)^8$ b) $\frac{1}{3}\sqrt[4]{80} - \frac{1}{2}\sqrt[4]{405} - \sqrt[4]{5}$ c) $2(2-3\sqrt{2})^2 + (2-3\sqrt{2})(2+3\sqrt{2})$

a) $(-2)^0 + (-2)^1 + (-2)^2 + \dots + (-2)^8 = 1 - 2 + 4 - 8 + 16 - 32 + 64 - 128 + 256 = 171$

b) $\frac{1}{3}\sqrt[4]{80} - \frac{1}{2}\sqrt[4]{405} - \sqrt[4]{5} = \frac{1}{3} \cdot 2\sqrt[4]{5} - \frac{1}{2} \cdot 3\sqrt[4]{5} - \sqrt[4]{5} = -\frac{11}{6}\sqrt[4]{5}$

c) $2(2-3\sqrt{2})^2 + (2-3\sqrt{2})(2+3\sqrt{2}) = 2(4+18-12\sqrt{2}) + 4-18 = 30-24\sqrt{2}$

92. Racionaliza los denominadores.

a) $\frac{a}{a\sqrt[6]{a^8}}$ d) $\frac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}$ g) $\frac{1}{1-\sqrt{2}-\sqrt{3}}$

b) $\frac{3y}{2\sqrt[5]{y^2}}$ e) $\frac{2\sqrt{6}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ h) $\frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{8}+\sqrt{3}+\sqrt{2}}$

c) $\frac{x+2}{2\sqrt{x+2}}$ f) $\frac{6\sqrt{6}}{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}}$ i) $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}}$

a) $\frac{a}{a\sqrt[6]{a^8}} = \frac{a}{a^2 \sqrt[6]{a^2}} = \frac{1}{a\sqrt[6]{a^2}} = \frac{\sqrt[3]{a^2}}{a\sqrt[3]{a}\sqrt[3]{a^2}} = \frac{\sqrt[3]{a^2}}{a^2}$

b) $\frac{3y}{2\sqrt[5]{y^2}} = \frac{3y\sqrt[5]{y^3}}{2\sqrt[5]{y^2} \cdot \sqrt[5]{y^3}} = \frac{3y\sqrt[5]{y^3}}{2y} = \frac{3\sqrt[5]{y^3}}{2}$

c) $\frac{x+2}{2\sqrt{x+2}} = \frac{(x+2)\sqrt{x+2}}{2\sqrt{x+2}\sqrt{x+2}} = \frac{(x+2)\sqrt{x+2}}{2(x+2)} = \frac{\sqrt{x+2}}{2}$

d) $\frac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}(1-\sqrt{2})}{(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})} = \frac{\sqrt{2}-2}{1-2} = 2-\sqrt{2}$

e) $\frac{2\sqrt{6}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{6}(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})} = \frac{2\sqrt{18}+2\sqrt{12}}{3-2} = 6\sqrt{2}+4\sqrt{3}$

f) $\frac{6\sqrt{6}}{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}} = \frac{6\sqrt{6}(2\sqrt{3}-3\sqrt{2})}{(2\sqrt{3}+3\sqrt{2})(2\sqrt{3}-3\sqrt{2})} = \frac{12\sqrt{18}-18\sqrt{12}}{12-18} = 3\sqrt{12}-2\sqrt{18} = 6\sqrt{3}-6\sqrt{2}$

g) $\frac{1-\sqrt{2}+\sqrt{3}}{(1-\sqrt{2}-\sqrt{3})(1-\sqrt{2}+\sqrt{3})} = \frac{1-\sqrt{2}+\sqrt{3}}{(1-\sqrt{2})^2-3} = \frac{1-\sqrt{2}+\sqrt{3}}{1+2-2\sqrt{2}-3} = \frac{1-\sqrt{2}+\sqrt{3}}{-2\sqrt{2}} = -\frac{(1-\sqrt{2}+\sqrt{3})\sqrt{2}}{2\sqrt{2}\sqrt{2}} = \frac{2-\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$

h) $\frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{8}+\sqrt{3}+\sqrt{2}} = \frac{1+\sqrt{2}}{2\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{2}} = \frac{1+\sqrt{2}}{3\sqrt{2}+\sqrt{3}} = \frac{(1+\sqrt{2})(3\sqrt{2}-\sqrt{3})}{(3\sqrt{2}+\sqrt{3})(3\sqrt{2}-\sqrt{3})} = \frac{3\sqrt{2}-\sqrt{3}+6-\sqrt{6}}{18-3} = \frac{3\sqrt{2}-\sqrt{3}+6-\sqrt{6}}{15}$

i) $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}} = \frac{(\sqrt{2}+\sqrt{3})(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{6})}{(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6})(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{6})} = \frac{2+\sqrt{6}-\sqrt{12}+\sqrt{6}+3-\sqrt{18}}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2-6} = \frac{5+2\sqrt{6}-2\sqrt{3}-3\sqrt{2}}{2+3+2\sqrt{6}-6} =$
 $= \frac{5+2\sqrt{6}-2\sqrt{3}-3\sqrt{2}}{2\sqrt{6}-1} = \frac{(5+2\sqrt{6}-2\sqrt{3}-3\sqrt{2})(2\sqrt{6}+1)}{(2\sqrt{6}-1)(2\sqrt{6}+1)} =$
 $= \frac{10\sqrt{6}+5+24+2\sqrt{6}-4\sqrt{18}-2\sqrt{3}-6\sqrt{12}-3\sqrt{2}}{24-1} = \frac{12\sqrt{6}+29-15\sqrt{2}-14\sqrt{3}}{23}$

Logaritmos

93. Aplicando la definición, calcula el valor de los siguientes logaritmos.

- | | | |
|-------------------------------------|---|--------------------------------------|
| a) $\log_2 \frac{1}{8}$ | d) $\log_{\frac{1}{3}} \sqrt{27}$ | g) $\log_{\sqrt{2}} (2\sqrt{2})^3$ |
| b) $\log_{\frac{1}{9}} \frac{1}{3}$ | e) $\log_{\sqrt{8}} (2\sqrt{2})$ | h) $\log_{\frac{1}{2}} \sqrt[3]{64}$ |
| c) $\log \frac{1}{1000}$ | f) $\log_{\sqrt{3}} \left(\frac{1}{9}\right)$ | i) $\log_{0,001} 10\,000$ |

a) $\log_2 \frac{1}{8} = x \Rightarrow 2^x = \frac{1}{8} = 2^{-3} \Rightarrow x = -3$

b) $\log_{\frac{1}{9}} \frac{1}{3} = x \Rightarrow \left(\frac{1}{9}\right)^x = \frac{1}{3} \Rightarrow 9^{-x} = 3^{-1} \Rightarrow 3^{-2x} = 3^{-1} \Rightarrow 2x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$

c) $\log \frac{1}{1000} = x \Rightarrow 10^x = 10^{-3} \Rightarrow x = -3$

d) $\log_{\frac{1}{3}} \sqrt{27} = x \Rightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^x = 27^{\frac{1}{2}} \Rightarrow 3^{-x} = 3^{\frac{3}{2}} \Rightarrow x = -\frac{3}{2}$

e) $\log_{\sqrt{8}} (2\sqrt{2}) = x \Rightarrow (\sqrt{8})^x = 2\sqrt{2} \Rightarrow 2^{\frac{3x}{2}} = 2^{\frac{3}{2}} \Rightarrow \frac{3x}{2} = \frac{3}{2} \Rightarrow x = 1$

f) $\log_{\sqrt{3}} \left(\frac{1}{9}\right) = x \Rightarrow (\sqrt{3})^x = \frac{1}{9} = 3^{-2} \Rightarrow 3^{\frac{x}{2}} = 3^{-2} \Rightarrow \frac{x}{2} = -2 \Rightarrow x = -4$

g) $\log_{\sqrt{2}} (2\sqrt{2})^3 = x \Rightarrow (\sqrt{2})^x = (2\sqrt{2})^3 = (\sqrt{2^3})^3 \Rightarrow 2^{\frac{x}{2}} = 2^{\frac{9}{2}} \Rightarrow x = 9$

h) $\log_{\frac{1}{2}} \sqrt[3]{64} = x \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^x = 2^{\frac{6}{3}} \Rightarrow 2^{-x} = 2^2 \Rightarrow x = -2$

i) $\log_{0,001} 10\,000 = x \Rightarrow 0,001^x = 10\,000 = 10^4 \Rightarrow 10^{-3x} = 10^4 \Rightarrow x = -\frac{4}{3}$

94. Calcula, si es posible, el valor de x en cada una de las siguientes expresiones.

- | | | | |
|----------------------|---------------------------------------|--------------------------|---------------------------------|
| a) $\log_x 8 = -3$ | c) $\log_3 (-81) = x$ | e) $\log_x \sqrt{2} = 0$ | g) $\log_3 x = -1$ |
| b) $\log_{-3} x = 9$ | d) $\log_{\frac{1}{\sqrt{2}}} x = -2$ | f) $\log_1 2 = x$ | h) $\log_{\frac{1}{a}} a^2 = x$ |

a) $\log_x 8 = -3 \Rightarrow x^{-3} = 8 = 2^3 = \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} \Rightarrow x = \frac{1}{2}$

e) $\log_x \sqrt{2} = 0$. No existe x .

b) $\log_{-3} x = 9$. No está definido.

f) $\log_1 2 = x$. No está definido.

c) $\log_3 (-81) = x$. No está definido.

g) $\log_3 x = -1 \Rightarrow x = 3^{-1} = \frac{1}{3}$

d) $\log_{\frac{1}{\sqrt{2}}} x = -2 \Rightarrow x = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{-2} = (\sqrt{2})^2 = 2$

h) $\log_{\frac{1}{a}} a^2 = x \Rightarrow \left(\frac{1}{a}\right)^x = a^2 \Rightarrow a^{-x} = a^2 \Rightarrow x = -2$

95. Considerando $\log 2 = 0,301$ y que $\log 3 = 0,477$ y $\log k = 0,778$, calcula los siguientes logaritmos.

- a) $\log 50$ c) $\log_k 3$ e) $\log_2 \sqrt[3]{6k}$
 b) $\log 0,3$ d) $\log \sqrt{12k}$ f) $\log 7,2$

a) $\log 50 = \log \frac{100}{2} = \log 100 - \log 2 = 2 - 0,301 = 1,699$

b) $\log 0,3 = \log \frac{1}{3} = \log 1 - \log 3 = 0 - 0,477 = -0,477$

c) $\log_k 3 = \frac{\log 3}{\log k} = \frac{0,477}{0,778} = 0,613$

d) $\log \sqrt{12k} = \frac{\log 12 + \log k}{2} = \frac{\log(2^2 \cdot 3) + \log k}{2} = \frac{2\log 2 + \log 3 + \log k}{2} = \frac{2 \cdot 0,301 + 0,477 + 0,778}{2} = 0,9285$

e) $\log_2 \sqrt[3]{6k} = \frac{\log \sqrt[3]{6k}}{\log 2} = \frac{\frac{\log 2 + \log 3 + \log k}{3}}{\log 2} = \frac{0,301 + 0,477 + 0,778}{3 \cdot 0,301} = 1,723$

f) $\log 7,2 = \log \frac{72}{10} = \log 72 - \log 10 = \log(2^3 \cdot 3^2) - 1 = 3\log 2 + 2\log 3 - 1 = 3 \cdot 0,301 + 2 \cdot 0,477 - 1 = 0,857$

96. Tomando $\log_3 2 = 0,631$ y $\log_3 5 = 1,465$, calcula el valor del logaritmo en base 3 de 150.

$$\log_3 150 = \log_3 (2 \cdot 3 \cdot 5^2) = \log_3 2 + \log_3 3 + 2\log_3 5 = 0,631 + 1 + 2 \cdot 1,465 = 4,561$$

97. Calcula el valor de x en cada caso.

- a) $2500 = 2000 \cdot 1,05^x$ c) $2 \cdot 10^6 = x^{12}$ e) $3 \cdot 10^{-5} = 2^{-50x}$ g) $\log_x 5 + 1 = \log_x 2$
 b) $20 = \log_x 5 + 15$ d) $0,025 = 0,5e^x$ f) $\ln \frac{x}{2e} = -\ln 2$ h) $\ln 3e^{2x} = 2$

a) $1,05^x = \frac{2500}{2000} = \frac{5}{4} \Rightarrow \log 1,05^x = \log 1,25 \Rightarrow x \log 1,05 = \log 1,25 \Rightarrow x = \frac{\log 1,25}{\log 1,05} = 4,574$

b) $5 = \log_x 5 \Rightarrow x^5 = 5 \Rightarrow x = \sqrt[5]{5} = 1,38$

c) $x = \sqrt[12]{2 \cdot 10^6} = 3,35$

d) $e^x = \frac{0,025}{0,5} = 0,05 \Rightarrow x = \ln 0,05 = -2,996$

e) $\log(3 \cdot 10^{-5}) = -50x \log 2 \Rightarrow x = \frac{\log(3 \cdot 10^{-5})}{-50 \log 2} = 0,3$

f) $\ln x - \ln 2 - \ln e = -\ln 2 \Rightarrow \ln x = \ln e \Rightarrow x = e$

g) $\log_x 5 + \log_x x = \log_x 2 \Rightarrow \log_x 5x = \log_x 2 \Rightarrow 5x = 2 \Rightarrow x = \frac{2}{5}$

h) $\ln 3 + 2x \ln e = 2 \Rightarrow 2x = 2 - \ln 3 \Rightarrow x = \frac{2 - \ln 3}{2} = 0,451$

98. Toma logaritmos decimales en las siguientes igualdades y desarrolla las expresiones.

a) $P = 10x^3yz^3$

c) $R = \sqrt[3]{\frac{2x^2y^5}{3z^3}}$

e) $y = \frac{\sqrt[3]{x^2}}{ax}$

b) $Q = \frac{100x^2}{x+y}$

d) $x = a^4 b^3 c^{\frac{3}{2}}$

f) $xy = \frac{(m+2n)n^2}{m-2n}$

a) $P = 10x^3yz^3 \Rightarrow \log P = 1 + 3\log x + \log y + 3\log z$

b) $Q = \frac{100x^2}{x+y} \Rightarrow \log Q = 2 + 2\log x - \log(x+y)$

c) $R = \sqrt[3]{\frac{2x^2y^5}{3z^3}} \Rightarrow \log R = \frac{\log 2 + 2\log x + 5\log y - \log 3 - 3\log z}{3}$

d) $x = a^4 b^3 c^{\frac{3}{2}} \Rightarrow \log x = 4\log a + 3\log b + \frac{3}{2}\log c$

e) $y = \frac{\sqrt[3]{x^2}}{ax} \Rightarrow \log y = \frac{2}{3}\log x - \log a - \log x = -\log a - \frac{1}{3}\log x$

f) $xy = \frac{(m+2n)n^2}{m-2n} \Rightarrow \log x + \log y = \log(m+2n) + 2\log n - \log(m-2n)$

99. Expresa el valor de E en cada caso sin que aparezcan logaritmos.

a) $\log E = 2 - 3\log x + \log y - 5\log z$

c) $\log E = \log(x-2y) + \log(x+2y)$

b) $\log E = 3\log 2 - 4\log x + 3\log y - 2\log z$

d) $\log E = 3\log(x+10) - \log \frac{2x+20}{3} + \log \frac{3}{2}$

a) $\log E = \log 100 - \log x^3 + \log y - \log z^5 = \log \frac{100y}{x^3z^5} \Rightarrow E = \frac{100y}{x^3z^5}$

b) $\log E = \log 2^3 - \log x^4 + \log y^3 - \log z^2 = \log \frac{8y^3}{x^4z^2} \Rightarrow E = \frac{8y^3}{x^4z^2}$

c) $\log E = \log(x-2y)(x+2y) \Rightarrow E = (x-2y)(x+2y) = x^2 - 4y^2$

d) $\log E = \log(x+10)^3 - \log \frac{2x+20}{3} + \log \frac{3}{2} = \log \frac{(x+10)^3 \cdot 3}{2x+20} \Rightarrow E = \frac{9(x+10)^3}{2(2x+20)} = \frac{9}{4}(x+10)^2$

100. Con la ayuda de la calculadora, obtén aproximaciones decimales hasta las milésimas de los siguientes logaritmos.

a) $\log_3 20$

c) $\log_{0,5} 60$

e) $\log_{\frac{2}{5}} \sqrt[3]{2}$

b) $\log_{\frac{1}{4}} \frac{7}{5}$

d) $\log_{\sqrt{2}} 3$

f) $\log_{\sqrt{2}} \sqrt{3}$

a) $\log_3 20 = \frac{\log 20}{\log 3} = 2,727$

c) $\log_{0,5} 60 = \frac{\log 60}{\log 0,5} = -5,907$

e) $\log_{\frac{2}{5}} \sqrt[3]{2} = \frac{\log \sqrt[3]{2}}{\log \frac{2}{5}} = -0,252$

b) $\log_{\frac{1}{4}} \frac{7}{5} = \frac{\log \frac{7}{5}}{\log \frac{1}{4}} = -0,243$

d) $\log_{\sqrt{2}} 3 = \frac{\log 3}{\log \sqrt{2}} = 3,17$

f) $\log_{\sqrt{2}} \sqrt{3} = \frac{\log \sqrt{3}}{\log \sqrt{2}} = 1,585$

Síntesis

101. a) Demuestra que la suma de un número real positivo más su inverso es superior o igual a 2.

b) ¿En qué caso es exactamente 2?

c) Sin utilizar la calculadora, demuestra que $\log_2 3 + \log_3 2 > 2$.

a) Sea $a > 0$, $\left(\sqrt{a} - \frac{1}{\sqrt{a}}\right)^2 \geq 0 \Rightarrow a + \frac{1}{a} - 2 \geq 0 \Rightarrow a + \frac{1}{a} \geq 2$

b) Vale 2 cuando $a = 1$.

c) $\log_2 3 = \frac{\log 3}{\log 2} = \frac{1}{\frac{\log 2}{\log 3}} = \frac{1}{\log_3 2} \Rightarrow \log_2 3$ y $\log_3 2$ son números inversos y, por el apartado a, $\log_2 3 + \log_3 2 > 2$.

102. Calcula el valor de x en cada una de las expresiones dadas a continuación.

a) $\log_{\sqrt{3}} x + \log_{\sqrt{3}} x^2 = 9$

b) $\log_{\frac{1}{9}} x \cdot \log_{\frac{1}{27}} x^4 \cdot \log_{\frac{1}{81}} x^2 = -1$

a) $\log_{\sqrt{3}} x + \log_{\sqrt{3}} x^2 = 9 \Rightarrow \log_{\sqrt{3}} x^3 = 9 \Rightarrow (\sqrt{3})^9 = x^3 \Rightarrow x = \sqrt[3]{3^9} = 3^3 = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$

b) $\log_{\frac{1}{9}} x \cdot \log_{\frac{1}{27}} x^4 \cdot \log_{\frac{1}{81}} x^2 = -1 \Rightarrow \frac{\log x}{\log \frac{1}{9}} \cdot \frac{\log x^4}{\log \frac{1}{27}} \cdot \frac{\log x^2}{\log \frac{1}{81}} = \frac{\log x \cdot 4 \log x \cdot 2 \log x}{(-2 \log 3)(-3 \log 3)(-4 \log 3)} = -\frac{8(\log x)^3}{24(\log 3)^3} = -1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left(\frac{\log x}{\log 3}\right)^3 = 3 \Rightarrow (\log_3 x)^3 = 3 \Rightarrow \log_3 x = \sqrt[3]{3} \Rightarrow x = 3^{\sqrt[3]{3}}$$

103. Clasifica los siguientes números reales.

a) $\sqrt{5^{-\log_5 10}} - \frac{\sqrt{10}}{10}$ **b)** $\frac{(1+\sqrt{5})^3}{8} - \frac{3+\sqrt{5}}{\sqrt{5}-1}$ **c)** $\frac{1 - \left(\frac{3}{2}\right)^{-\log_2 8}}{\left(3^2 + 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{-2}\right)^{-1}}$ **d)** $\sqrt{2 \sqrt{2 \sqrt{\log_2 \left(\frac{0,16}{10^{-2}}\right)}}$

a) $\sqrt{5^{-\log_5 10}} - \frac{\sqrt{10}}{10} = \sqrt{\frac{1}{5^{\log_5 10}}} - \frac{\sqrt{10}}{10} = \sqrt{\frac{1}{10}} - \frac{\sqrt{10}}{10} = \frac{1}{\sqrt{10}} - \frac{\sqrt{10}}{10} = \frac{\sqrt{10}}{10} - \frac{\sqrt{10}}{10} = 0 \Rightarrow$ Se trata de un número natural.

b) $\frac{(1+\sqrt{5})^3}{8} - \frac{3+\sqrt{5}}{\sqrt{5}-1} = \frac{1+3\sqrt{5}+15+5\sqrt{5}}{8} - \frac{(3+\sqrt{5})(\sqrt{5}+1)}{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)} = \frac{16+8\sqrt{5}}{8} - \frac{3\sqrt{5}+3+5+\sqrt{5}}{4} = 2+\sqrt{5} - (2+\sqrt{5}) = 0$

Por tanto, se trata de un número natural.

c) $\frac{1 - \left(\frac{3}{2}\right)^{-\log_2 8}}{\left(3^2 + 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{-2}\right)^{-1}} = \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^3}{27^{-1}} = 3^3 \cdot \left(1 - \frac{2^3}{3^3}\right) = 3^3 - 2^3 = 27 - 8 = 19 \Rightarrow$ Se trata de un número natural.

d) $\sqrt{2 \sqrt{2 \sqrt{\log_2 \left(\frac{0,16}{10^{-2}}\right)}}} = \sqrt{2 \sqrt{2 \sqrt{\log_2 16}}} = \sqrt{2 \sqrt{2 \sqrt{4}}} = 2 \Rightarrow$ Se trata de un número natural.

104. Calcula el valor de:

a) $\log_{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{16\sqrt{5}}{\sqrt{125} + \sqrt{45}}}$

c) $\sqrt[3]{(2 + \sqrt{2})^{-\log_3 \frac{1}{27}}}$

b) $-\log_2 (\log_2 \sqrt{\sqrt{2}})$

d) $\sqrt[6]{\frac{\log 2 + \log 4 + \log 8}{\log 2}}$

a) $\log_{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{16\sqrt{5}}{\sqrt{125} + \sqrt{45}}} = \log_{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{16\sqrt{5}}{5\sqrt{5} + 3\sqrt{5}}} = \log_{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{16\sqrt{5}}{8\sqrt{5}}} = \log_{\frac{1}{2}} \sqrt{2} = -\frac{1}{2}$

b) $-\log_2 (\log_2 \sqrt{\sqrt{2}}) = -\log_2 (\log_2 2^{\frac{1}{8}}) = -\log_2 \frac{1}{8} = -\log_2 2^{-3} = 3$

c) $\sqrt[3]{(2 + \sqrt{2})^{-\log_3 \frac{1}{27}}} = \sqrt[3]{(2 + \sqrt{2})^{-\log_3 3^{-3}}} = \sqrt[3]{(2 + \sqrt{2})^3} = 2 + \sqrt{2}$

d) $\sqrt[6]{\frac{\log 2 + \log 4 + \log 8}{\log 2}} = \sqrt[6]{\frac{\log 2 + 2\log 2 + 3\log 2}{\log 2}} = \sqrt[6]{\frac{6\log 2}{\log 2}} = \sqrt[6]{6}$

105. Para a y b positivos y diferentes de la unidad, demuestra que $\log_a b \cdot \log_b a = 1$.

$$\log_a b \cdot \log_b a = \frac{\log b}{\log a} \cdot \frac{\log a}{\log b} = 1$$

CUESTIONES

106. Indica, razonadamente, si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

- a) La suma de dos números irracionales es siempre un número irracional.
 - b) La suma de un número irracional con uno racional da como resultado un número irracional.
 - c) La suma de dos números racionales puede ser irracional.
-
- a) Es falso. Por ejemplo, $\sqrt{2}$ y $-\sqrt{2}$ son dos números irracionales, y su suma es 0, número racional.
 - b) Verdadero, ya que si la suma de un irracional I más uno racional R diera como resultado otro racional R' , tendríamos que $I = R' - R$ y esto no es posible, la resta de dos racionales es racional.
 - c) Falso, la suma de dos fracciones da siempre como resultado otra fracción.

107. Con la ayuda de ejemplos estudia si siempre se verifica las siguientes relaciones.

$$|a + b| \geq |a| + |b|$$

$$|a - b| \leq |a| - |b|$$

No siempre son verdaderas:

$$a = 3 \quad b = -4 \Rightarrow \begin{cases} |a + b| = |3 + (-4)| = 1 \\ |a| + |b| = |3| + |-4| = 7 \end{cases} \Rightarrow |a + b| < |a| + |b|$$

$$a = 3 \quad b = -4 \Rightarrow \begin{cases} |a - b| = |3 - (-4)| = 7 \\ |a| - |b| = |3| - |-4| = -1 \end{cases} \Rightarrow |a - b| > |a| - |b|$$

108. Encuentra el error en el siguiente razonamiento.

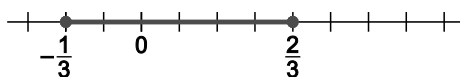
$$16 > 8 \Rightarrow 2^4 > 2^3 \Rightarrow \frac{1}{2^3} > \frac{1}{2^4} \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^3 > \left(\frac{1}{2}\right)^4 \Rightarrow \log_2\left(\frac{1}{2}\right)^3 > \log_2\left(\frac{1}{2}\right)^4 \Rightarrow 3\log_2\left(\frac{1}{2}\right) > 4\log_2\left(\frac{1}{2}\right)$$

y simplificando: $3 > 4$.

Como $\log_2\left(\frac{1}{2}\right) < 0$ al simplificar esta cantidad negativa en los dos miembros de la inecuación, se debe cambiar su sentido, por lo que la conclusión válida sería $3\log_2\left(\frac{1}{2}\right) > 4\log_2\left(\frac{1}{2}\right) \Rightarrow 3 < 4$

109. Representa en la recta real el conjunto de valores reales x tales que $\left|2x - \frac{1}{3}\right| \leq 1$ y determinala mediante un intervalo.

$$\left|2x - \frac{1}{3}\right| \leq 1 \Rightarrow \left|x - \frac{1}{6}\right| \leq \frac{1}{2} \Rightarrow x \in \left[-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]$$



PROBLEMAS

110. Al realizar una encuesta sobre el interés de los habitantes de una localidad en relación con los equipos informáticos, se observó que exactamente el número de encuestados que contestaron que en su casa había más de un ordenador era el 40,454545... % del total.

¿Cuántas personas formaban parte de la muestra si se sabe que eran menos de 300?

$$N = \frac{40,4545...}{100} = 0,404\,545\,45... = 0,40\overline{45} \Rightarrow \begin{cases} 10\,000N = 4045,454\,545... \\ 100N = 40,454\,545... \end{cases} \Rightarrow N = \frac{4005}{9900} = \frac{89}{220}$$

Para calcular el número de encuestados que contestaron que tenían más de un ordenador, se debe multiplicar el total por la fracción irreducible $\frac{89}{220}$.

Por tanto, el número total de encuestados debe ser múltiplo de 220 y, al ser menor que 300, es exactamente 220.

111. Juan ha comprado 2,320 kg de patatas a 0,65 €/kg, 4,035 kg de naranjas, a 2,15 €/kg, y 1,475 kg de manzanas, a 3,25 €/kg. Al hacer la cuenta, obviamente se debe redondear a los céntimos de euro.

- ¿A cuánto ascenderá dicha cuenta si primero se suman los precios y después se redondea el precio total?
- ¿Y si se hace a la inversa; es decir, se redondea cada precio parcial y después se suman los redondeos?
- ¿Cuál es el porcentaje de aumento en el precio total al realizar la cuenta de la segunda forma con respecto a realizarla de la primera manera?

a) $2,320 \cdot 0,65 + 4,035 \cdot 2,15 + 1,475 \cdot 3,25 = 1,508 + 8,67525 + 4,79375 = 14,977 \approx 14,98 \text{ €}$

b) $2,320 \cdot 0,65 + 4,035 \cdot 2,15 + 1,475 \cdot 3,25 \approx 1,51 + 8,68 + 4,79 = 14,98 \text{ €}$

c) No hay variación de precio.

- 112.** La máxima distancia de la Tierra a la Luna es de $4,07 \cdot 10^8$ m y el radio de la Luna mide 1737,5 km. Calcula la distancia de la Tierra a la Luna tomando como unidad el diámetro de la Luna.

$$\frac{4,07 \cdot 10^8 \text{ m}}{2 \cdot 1737,5 \text{ km}} = \frac{4,07 \cdot 10^8 \text{ m}}{3\,475\,000 \text{ m}} = 117,12$$

La distancia de la Tierra a la Luna es de aproximadamente 117,12 diámetros lunares.

- 113.** El nivel de intensidad del sonido puede ser expresado en decibelios mediante la fórmula $\beta = 10 \log \left(\frac{I}{I_0} \right)$

donde β es el número de decibelios del sonido, I es la intensidad del sonido estudiado medido en vatios/cm² e I_0 indica la intensidad del sonido mínimo que puede ser oído por el ser humano (10^{-12} vatios/m²)

- Calcula los decibelios (dB) de una conversación normal que presenta una intensidad de 10^{-7} vatios/m².
- ¿Cuántos decibelios corresponden al sonido mínimo que puede oír el ser humano?
- ¿Cuál es la intensidad en vatios/cm² del umbral de dolor en el oído humano sabiendo que se corresponde con 120 dB?
- Un sonido es de 30 dB. ¿Cuántas veces es más intenso que un sonido de 20 dB? ¿Y si se compara un sonido de 40 dB con uno de 30 dB?

$$\text{a) } \beta = 10 \log \left(\frac{10^{-7}}{10^{-12}} \right) = 10 \log 10^5 = 10 \cdot 5 = 50 \text{ dB}$$

$$\text{b) } \beta = 10 \log \left(\frac{10^{-12}}{10^{-12}} \right) = 10 \log 1 = 10 \cdot 0 = 0 \text{ dB}$$

$$\text{c) } 120 = 10 \log \left(\frac{I}{10^{-12}} \right) \Rightarrow \log \left(\frac{I}{10^{-12}} \right) = 12 \Rightarrow \frac{I}{10^{-12}} = 10^{12} \Rightarrow I = 10^0 = 1 \text{ vatio/m}^2 = 10^{-4} \text{ vatio/cm}^2$$

$$\text{d) } \beta = 10 \log \left(\frac{I}{10^{-12}} \right) \Rightarrow \log \left(\frac{I}{10^{-12}} \right) = \frac{\beta}{10} \Rightarrow 10^{\frac{\beta}{10}} = \frac{I}{10^{-12}} \Rightarrow I = 10^{\frac{\beta}{10}} \cdot 10^{-12} \Rightarrow I = 10^{\frac{\beta}{10}-12}$$

$$\begin{cases} \beta = 30 \Rightarrow I(30) = 10^{\frac{30}{10}-12} = 10^{-9} \\ \beta = 20 \Rightarrow I(20) = 10^{\frac{20}{10}-12} = 10^{-10} \end{cases} \Rightarrow \frac{I(30)}{I(20)} = \frac{10^{-9}}{10^{-10}} = 10, \text{ el sonido de 30 dB es 10 veces más intenso que el de 20 dB.}$$

De igual manera, el sonido de 40 dB es 10 más intenso que el de 30 dB.

- 114.** La población de bacterias inicial de un cultivo es de 6000. Se estima que dicha población aumenta en un 100 % cada 4 días. Calcula la población que habrá a los 12 días.

- Si se cambia la estimación de crecimiento y se supone que cada dos días aumenta en un 50 %, ¿cuál será la población a los 12 días?
- ¿Y si se supone que cada día aumenta en un 25 %?

El número de bacterias cuando han pasado t días es $P = 6000 \cdot 2^{\frac{t}{4}}$, por tanto, para $t = 12$ días tendremos

$$P = 6000 \cdot 2^{\frac{12}{4}} = 6000 \cdot 2^3 = 48\,000 \text{ bacterias.}$$

$$\text{a) Ahora } P = 6000 \cdot 1,5^{\frac{t}{2}}, \text{ con lo que si } t = 12 \text{ tenemos } P = 6000 \cdot 1,5^{\frac{12}{2}} = 6000 \cdot 1,5^6 = 68\,344 \text{ bacterias.}$$

$$\text{b) } P = 6000 \cdot 1,25^t \Rightarrow P(12) = 6000 \cdot 1,25^{12} = 87\,311 \text{ bacterias.}$$

115. Javier pretende colocar césped artificial en un jardín cuadrado, sabiendo que su lado tiene una longitud, en metros, comprendida entre 15 y 16.

El coste de cada metro cuadrado de dicho césped asciende a 30 € y 10 CENT, y el presupuesto con el que cuenta es de 7000 €.

Calcula los costes máximo y mínimo, y decide si habrá presupuesto para la obra.

$$15 \leq \text{lado} \leq 16 \Rightarrow 225 \leq \text{área} \leq 256 \Rightarrow 6772,5 \leq \text{coste} \leq 7705,6$$

Por tanto, el presupuesto podría ser insuficiente.

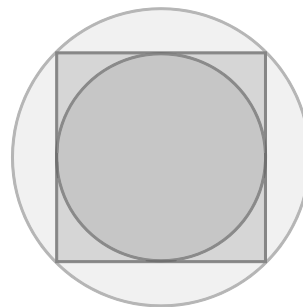
116. El área de un cuadrado es de $10,5 \text{ cm}^2$. Calcula las áreas de sus círculos inscrito y circunscrito, redondeando los resultados con dos cifras decimales.

El lado del cuadrado mide $x = \sqrt{10,5} = 3,24 \text{ cm}$.

La diagonal del cuadrado mide $\sqrt{2 \cdot 10,5} = 4,58 \text{ cm}$.

$$\text{Área del círculo inscrito: } S = \pi r^2 = \pi \left(\frac{3,24}{2} \right)^2 = 8,24 \text{ cm}^2$$

$$\text{Área del círculo circunscrito: } S = \pi r^2 = \pi \left(\frac{4,58}{2} \right)^2 = 16,47 \text{ cm}^2$$



117. Se han obtenido experimentalmente las siguientes fórmulas, que expresan el porcentaje P de altura de los niños y adolescentes de 6 a 15 años de edad en relación con la altura media de un adulto:

Para niñas $P = 31,1 \ln(\text{Edad}) + 16,3$

Para niños $P = 18,6 \ln(\text{Edad}) + 37$

- Calcula el porcentaje de altura de los y las adolescentes de 6, 10 y 15 años de edad.
- ¿Qué edad aproximada se puede esperar que, según este modelo, tenga una niña con 75 % de altura media de la edad adulta? ¿Y un niño?
- Si este modelo fuera válido para los varones de 6 a 18 años, ¿qué edad tendrían al alcanzar la altura máxima del 100 %? Critica el resultado.

a) Para niñas $P(6)=72 \%$ $P(10)=88 \%$ $P(15)=100 \%$

Para niños $P(6)=70 \%$ $P(10)=80 \%$ $P(15)=87 \%$

b) Para niñas $\text{Edad} = e^{\frac{P-16,3}{31,1}} \Rightarrow \text{Edad} = e^{\frac{75-16,3}{31,1}} = 6,6 \text{ años}$

Para niños $\text{Edad} = e^{\frac{P-37}{18,6}} \Rightarrow \text{Edad} = e^{\frac{75-37}{18,6}} = 7,7 \text{ años}$

c) $\text{Edad} = e^{\frac{100-37}{18,6}} = 29,6 \text{ años}$.

Obviamente, el modelo no sirve para los varones mayores de 15 años.

118. Demuestra que el número áureo $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ verifica las siguientes propiedades.

a) $\Phi^2 = \Phi + 1$ b) $\Phi - 1 = \frac{1}{\Phi}$ c) $\Phi^3 = \frac{\Phi + 1}{\Phi - 1}$

a) $\Phi^2 = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{1+5+2\sqrt{5}}{4} = \frac{6+2\sqrt{5}}{4} = \frac{3+\sqrt{5}}{2} = 1 + \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1 + \Phi$

b) $\Phi^2 = 1 + \Phi \Rightarrow \frac{\Phi^2}{\Phi} = \frac{1+\Phi}{\Phi} \Rightarrow \Phi = \frac{1}{\Phi} + 1 \Rightarrow \Phi - 1 = \frac{1}{\Phi}$

c) $\Phi^3 = \Phi^2 \Phi = (1 + \Phi)\Phi = \frac{1+\Phi}{\frac{1}{\Phi}} = \frac{\Phi + 1}{\Phi - 1}$

119. La escala cromática del piano está formada por las doce notas (doce semitonos) que aparecen en la figura.

El número de vibraciones por segundo de cada nota es igual al producto del número de vibraciones de la nota anterior por el número irracional $\sqrt[12]{2}$.

- a) Encuentra una expresión que determine el número de vibraciones por segundo según el lugar que ocupe en la escala (por ejemplo el Do ocupa el lugar 0, el Si bemol, el lugar 10, y el Si, el lugar 11) y suponiendo que el número de vibraciones por segundo correspondientes a la nota Do es n .
- b) Escribe las vibraciones por segundo correspondientes a cada nota sabiendo que las correspondientes a La son 440.

a) $N(k) = n \sqrt[12]{2^k}$ b) $N(9) = n \sqrt[12]{2^9} = 440 \Rightarrow n = \frac{440}{\sqrt[12]{2^9}} \approx 262 \Rightarrow N(k) = 440 \sqrt[12]{2^{k-9}}$

Do	Do sostenido	Re	Mi bemol	Mi	Fa	Fa sostenido	Sol	La bemol	La	Si bemol	Si
262	277	294	311	330	349	370	392	415	440	466	494

120. En una disolución de 5 L de HClO_4 hemos encontrado 0,2 moles de iones hidronio.

- a) Calcula cuál es el pH de la disolución anterior.
- b) Si queremos que el pH de la disolución anterior quede multiplicado por 2, ¿cuántos litros de disolvente necesitaríamos?

a) $\text{pH} = -\log[\text{H}_3\text{O}^+] = -\log\left(\frac{0,2}{5}\right) = -\log 0,04 = 1,4$

b) $\text{pH} = -\log[\text{H}_3\text{O}^+] = 2,8 \Rightarrow [\text{H}_3\text{O}^+] = 10^{-2,8} = 1,6 \cdot 10^{-3} \text{ mol/L}$, luego necesitaremos $\frac{0,2}{1,6 \cdot 10^{-3}} = 125 \text{ L}$.

121. Un automóvil que costó 14 425 € se deprecia un 15 % anual.

- a) ¿Cuánto valdrá a los 6 años?
- b) ¿Cuántos años deben pasar para que su valor sea inferior a 3600 €?

a) A los 6 años, el coche valdrá $14\,425 \cdot 0,85^6 = 5\,440,38 \text{ €}$.

b) Para calcular dentro de cuántos años su valor será inferior a 3600 € se resuelve la siguiente inecuación:

$$14\,425 \cdot 0,85^t < 3600 \Rightarrow 0,85^t < \frac{3600}{14\,425} \Rightarrow t \log 0,85 < \log \frac{3600}{14\,425} \Rightarrow t > 8,54 \text{ . Deberán pasar al menos 9 años.}$$

122. Una población de conejos aumenta anualmente en un 50 %. Si en el momento inicial había 100 conejos:

- a) ¿Cuántos habrá al cabo de 10 años?
- b) ¿Cuánto tiempo debe transcurrir para que su número sea de 30 000?
- c) Si debido a una enfermedad, la tasa de crecimiento cayera al 10 %, ¿cuánto tiempo tardaría la población inicial en triplicarse?

a) $t = 10 \Rightarrow P(10) = 100 \cdot 1,5^{10} = 5766,5$. Habrá 5767 conejos.

b) $100 \cdot 1,5^t = 30\,000 \Rightarrow 1,5^t = 300 \Rightarrow t = \frac{\log 300}{\log 1,5} = 14,06$ años

c) $100 \cdot 1,1^t = 300 \Rightarrow 1,1^t = 3 \Rightarrow t = \frac{\log 3}{\log 1,1} = 11,53$ años

123. Debido a una fuerte crisis económica, el valor de una vivienda, cuando han pasado t años desde su adquisición, es $V = ke^{\alpha t}$. La vivienda se compró por 350 000 €, y a los 5 años valía 225 000 €.

- a) Calcula el valor de k y α .
- b) Calcula el valor de la vivienda a los 20 años si sigue la misma depreciación.
- c) ¿Cuánto tiempo debe pasar desde la compra, para que el valor de la vivienda se haya reducido a la tercera parte?
- d) Un trabajador que gana el salario medio puede comprar una vivienda de 90 metros cuadrados. Si el salario medio aumenta un 3 % cada año, al cabo de 10 años, ¿cuál será la superficie de la vivienda que podría comprar el mismo trabajador? (supón que el resto de sus condiciones de vida no han variado.)

a) $t = 0 \Rightarrow 350\,000 = ke^{0\alpha} \Rightarrow k = 350\,000$

$t = 5 \Rightarrow 225\,000 = ke^{5\alpha} \Rightarrow e^{5\alpha} = \frac{225\,000}{350\,000} = \frac{9}{14} \Rightarrow \alpha = \frac{1}{5} \ln \frac{9}{14}$

Por tanto, $V = 350\,000 e^{\frac{t}{5} \ln \left(\frac{9}{14} \right)}$

b) $V = 350\,000 e^{\frac{20}{5} \ln \left(\frac{9}{14} \right)} \approx 59\,776$ €

c) $\frac{V}{3} = Ve^{\frac{t}{5} \ln \left(\frac{9}{14} \right)} \Rightarrow \frac{t}{5} \ln \left(\frac{9}{14} \right) = \ln \left(\frac{1}{3} \right) \Rightarrow t = \frac{5 \ln \left(\frac{1}{3} \right)}{\ln \left(\frac{9}{14} \right)} = 12,43$ años

- d) Sea x € el precio inicial de cada m^2 de la vivienda.

El trabajador paga $90x$, es decir el $\frac{90x}{S} \cdot 100 = \frac{9000x}{S}$ % de su salario. Se supone que este porcentaje se mantiene en el tiempo.

Al cabo de 10 años el trabajador gana $S \cdot 1,03^{10}$ por lo que puede dedicar $\frac{90x}{S} S \cdot 1,03^{10} = 90x \cdot 1,03^{10}$ € para adquirir la vivienda.

Como el precio de cada metro cuadrado ha pasado a ser $xe^{\frac{10}{5} \ln \left(\frac{9}{14} \right)} = x \left(\frac{9}{14} \right)^2 = \frac{81}{196} x$, podrá comprar una vivienda de:

$$\frac{90x \cdot 1,03^{10}}{\frac{81}{196} x} = \frac{90 \cdot 196 \cdot 1,03^{10}}{81} = 293 \text{ m}^2$$

124. En la tabla siguiente aparecen las medidas de una niña y de una torre.

Altura	
Real	Obtenida con instrumento de medida
92 cm	90 cm
38 m	37 m

Indica cuál de las dos medidas ha sido más precisa y justifica tu respuesta.

En el primer caso, el error relativo es $\frac{2}{92} = \frac{1}{46}$. En el segundo, el error relativo es $\frac{1}{38}$. Por tanto, la medida de la niña es más precisa, ya que el error relativo es menor.

125. Se llama unidad astronómica (UA) a la distancia media que separa la Tierra del Sol y que equivale a $1,49598 \cdot 10^8$ km.

- Sabiendo que el 1 de enero la distancia entre la Tierra y el Sol es de $1,471 \cdot 10^8$ km, exprésala en unidades astronómicas.
- Sabiendo que la distancia media entre Júpiter y el Sol es de 5,2 UA, exprésala en kilómetros.

a) $\frac{1,471 \cdot 10^8}{1,49598 \cdot 10^8} = 0,9833$ UA

b) $5,2 \cdot 1,49598 \cdot 10^8 = 7,779 \cdot 10^8$ km

PARA PROFUNDIZAR

126. Demuestra que si a , b y c son números positivos y diferentes, entonces se verifica la siguiente desigualdad.

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) > 9$$

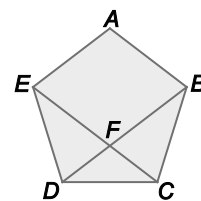
Utilizando el resultado del ejercicio 101.a):

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) = \frac{a}{a} + \frac{a}{b} + \frac{a}{c} + \frac{b}{a} + \frac{b}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} + \frac{c}{b} + \frac{c}{c} = 1+1+1 + \frac{a}{b} + \frac{b}{a} + \frac{a}{c} + \frac{c}{a} + \frac{b}{c} + \frac{c}{b} > 3+2+2+2 = 9$$

127. Calcula de forma exacta el número irracional que representa la relación entre la diagonal de un pentágono regular y su lado. Comprueba que se trata del número áureo.

Para ello, sigue los siguientes pasos:

- Demuestra que los triángulos DFC y DBC son semejantes calculando sus ángulos.
- Demuestra que el triángulo BFC es isósceles.
- Aplicando el teorema de Tales, calcula la relación entre los lados que corresponden a la diagonal y el lado del pentágono.



- a) El ángulo interior de un pentágono regular es $\frac{(2 \cdot 5 - 4) \cdot 90^\circ}{5} = 108^\circ$.

El triángulo DBC es isósceles, y sus ángulos miden 108° , 36° y 36° .

El triángulo DFC es también isósceles, y sus ángulos miden 36° , 36° y 108° . DFC y DBC son semejantes.

- b) El ángulo BCF mide $108^\circ - 36^\circ = 72^\circ$, el ángulo BFC también mide $180^\circ - 108^\circ = 72^\circ$. BFC es isósceles.
- c) Suponiendo un pentágono regular de lado 1 y aplicando el teorema de Tales a los triángulos semejantes:

$$\frac{DB}{DC} = \frac{DC}{DF} \Rightarrow \frac{x}{1} = \frac{1}{x-1} \Rightarrow x^2 - x = 1 \Rightarrow x^2 - x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1 + \sqrt{1+4}}{2} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \Rightarrow x = \frac{DB}{DC} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \Phi$$

(En la ecuación de segundo grado, la otra solución es negativa y no tiene sentido)

128. Racionaliza el denominador de la expresión: $\frac{1}{2-\sqrt[3]{2}}$

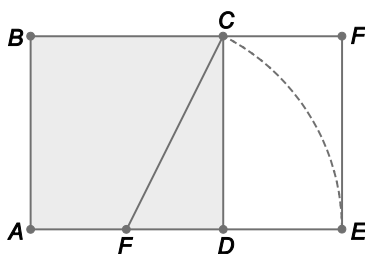
$$\frac{1}{2-\sqrt[3]{2}} = \frac{4+2\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}}{(2-\sqrt[3]{2}) \cdot (4+2\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4})} = \frac{4+2\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}}{8+4\sqrt[3]{2}+2\sqrt[3]{4}-4\sqrt[3]{2}-2\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{8}} = \frac{4+2\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}}{8-2} = \frac{4+2\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}}{6}$$

Se ha utilizado que $a^3 - b^3 = (a - b) \cdot (a^2 + ab + b^2)$.

ENTORNO MATEMÁTICO

Una piscina con estética

Mario y Priscila son una pareja muy moderna, con un buen nivel económico, una buena vida social y una familia envidiable; pero últimamente se encuentran algo aburridos. Deciden gastarse la herencia de la tía Edurne en la construcción de una piscina en la azotea de su ático del centro de la ciudad. Pero, ¡claro! no puede ser una piscina cualquiera.



Priscila se acuerda de haber leído que las proporciones para que un rectángulo sea lo más estético posible son aquellas que si al rectángulo total le quitas un cuadrado de lado la dimensión menor, el rectángulo pequeño que queda es proporcional a dicho rectángulo inicial. Esta propiedad, si mal no recuerda, la cumplen objetos tan cotidianos como el DNI o las innumerables tarjetas del banco con las que cuentan.

Mario no se lo cree mucho y mide su carnet de identidad. Resulta tener 8,6 cm de largo por 5,4 cm de ancho. Haz tú las cuentas que creas convenientes para comprobar si efectivamente Priscila tiene o no razón.

La piscina que quieren construir debe tener estas estéticas proporciones y su dimensión mayor debe ser de $2+2\sqrt{5}$ m. Además, quieren poner una franja de 1,5 m de césped artificial alrededor de todo el perímetro.

- Calcula la dimensión menor de la piscina.
- Calcula el área de césped que quieren poner.
- Calcula el tiempo que tardarán en llenar la piscina si la altura en todos sus puntos es de $\sqrt{5}$ metros y el grifo surte 30 L cada minuto.

Si llamamos a y b al lado mayor y menor, respectivamente, de un rectángulo que cumpla las condiciones del enunciado tendremos:

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{a-b} \Rightarrow a^2 - ab = b^2 \Rightarrow a^2 - ab - b^2 = 0 \Rightarrow \left(\frac{a}{b}\right)^2 - \frac{a}{b} - 1 = 0$$

Por tanto, el cociente entre el lado mayor y el menor debe ser $\frac{1+\sqrt{5}}{2} = \Phi \approx 1,618$, por ello, los rectángulos que cumplen esta condición se llaman rectángulos áureos.

El cociente de las dimensiones del DNI es $\frac{8,6}{5,4} = 1,593$ y, aunque se acerca, no es exactamente un rectángulo áureo.

a) $\frac{2+2\sqrt{5}}{b} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \Rightarrow b = \frac{4(1+\sqrt{5})}{1+\sqrt{5}} = 4$ m.

b) La superficie del césped será: $S = 7(5+2\sqrt{5}) - 4(2+2\sqrt{5}) = 35 + 14\sqrt{5} - 8 - 8\sqrt{5} = 27 + 6\sqrt{5}$ m².

c) El volumen de la piscina es $V = \sqrt{5} \cdot 4 \cdot (2+2\sqrt{5}) = 8\sqrt{5} + 40$ m³ = $(8\sqrt{5} + 40)1000$ L.

El tiempo que se tardará en llenar será $\frac{(8\sqrt{5} + 40)1000}{30} \approx 1930$ minutos ≈ 32 horas.

Pinturas prehistóricas

La conservación en buenas condiciones de las pinturas prehistóricas de las cuevas exige, entre otros aspectos, el control de la temperatura en el interior de la gruta.

Para que dicha temperatura se mantenga entre unos límites aceptables, un equipo de ingenieros ha ideado un sistema de compuertas en el pasadizo que da la entrada a la cueva. La longitud total de dicho pasadizo se dividirá en compartimentos de 30 m de largo separados por puertas de cierre hermético de forma que la temperatura de cada compartimento será un 5 % más baja que la temperatura del compartimento inmediatamente anterior.

- Calcula la temperatura del cuarto compartimento sabiendo que en el primero hay 25 °C.
- Calcula la temperatura en el octavo compartimento si en el quinto hay 21 °C. En este caso, ¿cuál será la temperatura del primer compartimento?
- Diseña una hoja de cálculo en el que se obtengan las temperaturas de los diferentes compartimentos en relación con la temperatura inicial.
- ¿Cuántos compartimentos se han debido construir para que la temperatura del último baje por primera vez a la cuarta parte de la temperatura del compartimento inicial? En este caso, ¿cuál es la longitud total del pasadizo de entrada?

- La temperatura en el compartimento k será $T_k = 25 \cdot 0,95^{k-1}$.

Por tanto: $T_4 = 25 \cdot 0,95^3 = 20,43$ °C

- $T_8 = T_5 \cdot 0,95^{8-5} = 21 \cdot 0,95^3 = 18$ °C

$$T_5 = T_1 \cdot 0,95^{5-1} \Rightarrow T_1 = \frac{T_5}{0,95^4} = \frac{21}{0,95^4} = 25,78$$
 °C

c)

	A	B
1	COMPARTIMENTO	TEMPERATURA
2	1	T_1
3	$=A2+1$	$=B2*0,95$
4	Copiar celda inmediatamente superior	Copiar celda inmediatamente superior
5	Copiar celda inmediatamente superior	Copiar celda inmediatamente superior
...	...	...

- $\frac{T}{4} = T \cdot 0,95^{k-1} \Rightarrow 0,95^{k-1} = 0,25 \Rightarrow k = 1 + \frac{\log 0,25}{\log 0,95} \approx 28$ compartimentos.

Por tanto, el pasadizo mide $28 \cdot 30 = 840$ m.

AUTOEVALUACIÓN

Comprueba qué has aprendido

1. Calcula el valor y simplifica.

a) $\frac{2,4555... + 2,555...}{1,222...}$

b) $\frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{4 + \frac{1}{5}}}}$

a) $\frac{2,4555... + 2,555...}{1,222...} = \frac{\frac{221}{90} + \frac{23}{9}}{\frac{11}{9}} = \frac{41}{10} = 4,1$

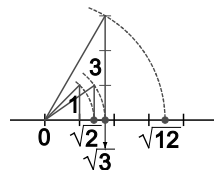
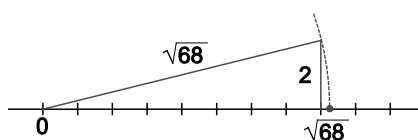
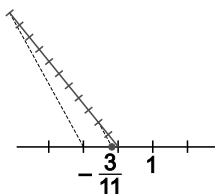
b) $\frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{4 + \frac{1}{5}}}} = \frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \frac{5}{21}}} = \frac{1}{2 + \frac{21}{68}} = \frac{68}{157}$

2. Representa los números $-\frac{3}{11}$, $\sqrt{68}$ y $\sqrt{12}$ en la recta real:

$-\frac{3}{11}$

$\sqrt{68} = \sqrt{8^2 + 2^2}$

$\sqrt{12} = \sqrt{3^2 + (\sqrt{3})^2}$



3. Desarrolla la expresión: $2x - \frac{1}{2} - 3\left|x + \frac{1}{2}\right|$

$$2x - \frac{1}{2} - 3\left|x + \frac{1}{2}\right| = \begin{cases} 2x - \frac{1}{2} + 3x + \frac{3}{2} & \text{si } x < -\frac{1}{2} \\ 2x - \frac{1}{2} - 3x - \frac{3}{2} & \text{si } x \geq -\frac{1}{2} \end{cases} = \begin{cases} 5x + 1 & \text{si } x < -\frac{1}{2} \\ -x - 2 & \text{si } x \geq -\frac{1}{2} \end{cases}$$

4. Expresa mediante unión de intervalos el conjunto:

$$\{x \in \mathbb{R} / |x + 2| < 1\} \cup \{x \in \mathbb{R} / |x - 5| < 1\}$$

$(-3, -1) \cup (4, 6)$

5. La masa de la Tierra es aproximadamente de $6 \cdot 10^{24}$ kg, la de un átomo de oxígeno es, aproximadamente, de $2,65 \cdot 10^{-23}$ g, y la de Jorge, 75 kg. Calcula las relaciones entre las masas de la Tierra y de Jorge y entre las masas de Jorge y del átomo de oxígeno. ¿Cuál es mayor?

$$\frac{m_T}{m_J} = \frac{6 \cdot 10^{24}}{75} = 8 \cdot 10^{22}$$

$$\frac{m_J}{m_O} = \frac{75}{2,65 \cdot 10^{-23}} = 2,83 \cdot 10^{24}$$

Por tanto, es superior la relación entre la masa de Jorge y la masa del átomo de oxígeno.

6. Halla los errores absoluto y relativo que se cometen al utilizar 2,5 como aproximación de $2,\bar{5}$.

$$\text{Error absoluto: } E_a = |2,\bar{5} - 2,5| = \left| \frac{23}{9} - \frac{5}{2} \right| = \frac{1}{18}$$

$$\text{Error relativo: } E_r = \frac{|2,\bar{5} - 2,5|}{2,\bar{5}} = \frac{1}{18} : \frac{23}{9} = \frac{1}{46}$$

7. Simplifica las siguientes expresiones.

a) $\frac{10^{-24} \cdot 5^{-12} \cdot 8^7}{25^{-18}}$

b) $\sqrt{\frac{3}{\sqrt{5} + \sqrt{20}}}$

c) $\sqrt{\frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{8} \sqrt{1024}}}$

a) $\frac{10^{-24} \cdot 5^{-12} \cdot 8^7}{25^{-18}} = \frac{(2 \cdot 5)^{-24} \cdot 5^{-12} \cdot (2^3)^7}{(5^2)^{-18}} = \frac{2^{-24} \cdot 5^{-24} \cdot 5^{-12} \cdot 2^{21}}{5^{-36}} = 2^{-3} \cdot 5^0 = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$

b) $\sqrt{\frac{3}{\sqrt{5} + \sqrt{20}}} = \sqrt{\frac{3}{\sqrt{5} + 2\sqrt{5}}} = \sqrt{\frac{3}{3\sqrt{5}}} = \sqrt{\frac{1}{\sqrt{5}}} = \frac{1}{\sqrt[4]{5}} = \frac{\sqrt[4]{5^3}}{\sqrt[4]{5} \cdot \sqrt[4]{5^3}} = \frac{\sqrt[4]{5^3}}{5} = \frac{\sqrt[4]{125}}{5}$

c) $\sqrt{\frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{8} \sqrt{1024}}} = \sqrt{\sqrt{\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{2^3}\right)^2 \cdot 2^{10}}} = \sqrt[8]{\frac{2^{10}}{2^4 \cdot 2^6}} = \sqrt[8]{\frac{2^{10}}{2^{10}}} = \sqrt[8]{1} = 1$

8. Racionaliza los denominadores y simplifica todo lo que puedas las expresiones resultantes.

a) $\frac{2\sqrt{3} - 1}{\sqrt{54}}$

b) $\frac{1}{\sqrt[4]{54}}$

c) $\frac{\sqrt{54}}{2\sqrt{3} - 1}$

a) $\frac{2\sqrt{3} - 1}{\sqrt{54}} = \frac{(2\sqrt{3} - 1)\sqrt{54}}{\sqrt{54}\sqrt{54}} = \frac{2\sqrt{162} - \sqrt{54}}{54} = \frac{2 \cdot 9\sqrt{2} - 3\sqrt{6}}{54} = \frac{18\sqrt{2} - 3\sqrt{6}}{54} = \frac{6\sqrt{2} - \sqrt{6}}{18}$

b) $\frac{1}{\sqrt[4]{54}} = \frac{1}{\sqrt[4]{2 \cdot 3^3}} = \frac{\sqrt[4]{2^3 \cdot 3}}{\sqrt[4]{2 \cdot 3^3} \cdot \sqrt[4]{2^3 \cdot 3}} = \frac{\sqrt[4]{2^3 \cdot 3}}{\sqrt[4]{2^4 \cdot 3^4}} = \frac{\sqrt[4]{24}}{2 \cdot 3} = \frac{\sqrt[4]{24}}{6}$

c) $\frac{\sqrt{54}}{2\sqrt{3} - 1} = \frac{3\sqrt{6}(2\sqrt{3} + 1)}{(2\sqrt{3} - 1)(2\sqrt{3} + 1)} = \frac{6\sqrt{18} + 3\sqrt{6}}{12 - 1} = \frac{18\sqrt{2} + 3\sqrt{6}}{11}$

9. Calcula el valor de x en:

a) $\log_{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2}} = x$

b) $\log_x \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$

c) $\log_{\frac{1}{8}} \frac{1}{4 \cdot 2^x} = \frac{5}{3}$

a) $\log_{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2}} = x \Rightarrow (\sqrt{2})^x = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow (\sqrt{2})^x = (\sqrt{2})^{-1} \Rightarrow x = -1$

b) $\log_x \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \Rightarrow x^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3} \Rightarrow x = \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}$

c) $\log_{\frac{1}{8}} \frac{1}{4 \cdot 2^x} = \frac{5}{3} \Rightarrow \left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{5}{3}} = \frac{1}{2^2 \cdot 2^x} \Rightarrow 2^{-3 \cdot \frac{5}{3}} = 2^{-2-x} \Rightarrow 5 = 2 + x \Rightarrow x = 3$

10. Sabiendo que $\log 2 = a$, calcula, en función de a el valor de $\log \frac{50}{0,08}$.

$$\begin{aligned}\log \frac{50}{0,08} &= \log 50 - \log 0,08 = \log \frac{100}{2} - \log \frac{8}{100} = \log 100 - \log 2 - \log 8 + \log 100 = 2 - \log 2 - \log 2^3 + 2 = \\ &= 4 - \log 2 - 3 \log 2 = 4 - 4 \log 2 = 4 - 4a\end{aligned}$$

11. Calcula el tiempo necesario para que un capital colocado al 5 % de interés anual compuesto aumente en un 50 %.

$$1,5C = C \cdot 1,05^t \Rightarrow 1,05^t = 1,5 \Rightarrow \log 1,05^t = \log 1,5 \Rightarrow t \cdot \log 1,05 = \log 1,5 \Rightarrow t = \frac{\log 1,5}{\log 1,05} = 8,31 \text{ años.}$$

Relaciona y contesta

Elige la única respuesta correcta en cada caso

1. Si a y b son números reales estrictamente positivos y diferentes de la unidad, la expresión $\frac{1 - \log_a b}{1 + \log_a b}$ vale:

- A. $\log_{ab} \left(\frac{a}{b} \right)$ B. $\log_{a+b} (ab)$ C. $\log_{ab} (ab)$ D. 1

$$\frac{1 - \log_a b}{1 + \log_a b} = \frac{1 - \frac{\log b}{\log a}}{1 + \frac{\log b}{\log a}} = \frac{\frac{\log a - \log b}{\log a}}{\frac{\log a + \log b}{\log a}} = \frac{\log a - \log b}{\log a + \log b} = \frac{\log \left(\frac{a}{b} \right)}{\log ab} = \log_{ab} \left(\frac{a}{b} \right), \text{ la respuesta A.}$$

2. Sean a y b dos números reales no nulos y tales que $a = b\sqrt{3}$. El valor de $\left(\frac{a-b}{3b-a} \right)^{-1}$ es:

- A. 3 B. $\sqrt{3}$ C. $a + b\sqrt{3}$ D. $3 - \sqrt{3}$

$$\left(\frac{a-b}{3b-a} \right)^{-1} = \left(\frac{b\sqrt{3}-b}{3b-b\sqrt{3}} \right)^{-1} = \frac{3-\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1} = \frac{(3-\sqrt{3})(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)} = \frac{3\sqrt{3}+3-3-\sqrt{3}}{3-1} = \sqrt{3}, \text{ respuesta B.}$$

3. Si $\log_2 \sqrt[n]{0,125} = x$, entonces el valor de xn es:

- A. -1 B. 2 C. -3 D. x^n

$$\log_2 \sqrt[n]{0,125} = x \Rightarrow 2^x = \sqrt[n]{0,125} \Rightarrow 2^{xn} = 0,125 = \frac{1}{8} = 2^{-3} \Rightarrow xn = -3, \text{ respuesta -3, la C.}$$

Señala, en cada caso, las respuestas correctas

4. Las siguientes igualdades son ciertas para cualesquiera valores reales estrictamente positivos:

- A. $a^{(b^c)} = (a^b)^c$ B. $(a^b)^c = (a^c)^b$ C. $a^{bc} = (a^b)^c$ D. $a^{(b^c)} = a^b$

$$(a^b)^c = a^{bc} = (a^c)^b, \text{ por lo que B y C son ciertas.}$$

En cambio A y D son falsas, por ejemplo, $2^{(2^3)} = 2^8 = 256$ no coincide con $(2^2)^3 = 4^3 = 64$ ni con $2^2 = 4$.

5. El número $\sqrt{\frac{3}{2}+\sqrt{2}} + \sqrt{\frac{3}{2}-\sqrt{2}}$ pertenece al conjunto:

A. $\mathbb{N}$

B. $\mathbb{Z}$

C. $\mathbb{Q}$

D. $\mathbb{R}$

$$\left(\sqrt{\frac{3}{2}+\sqrt{2}} + \sqrt{\frac{3}{2}-\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{3}{2} + \sqrt{2} + 2\left(\sqrt{\frac{3}{2}+\sqrt{2}}\right)\left(\sqrt{\frac{3}{2}-\sqrt{2}}\right) + \frac{3}{2} - \sqrt{2} = 3 + 2\sqrt{\frac{9}{4}-2} = 3 + 2\sqrt{\frac{1}{4}} = 3 + 1 = 4$$

Por tanto, el número dado es $\sqrt{4} = 2$, natural, y, por tanto, todas las respuestas son válidas.

Elige la relación correcta entre las dos afirmaciones dadas

6. Sean los subconjuntos $M = [-2, 3) \cup [6, 8)$, $N = [1, 5] \cup (7, 9)$ y $P = [1, 3) \cup (7, 10]$.

Se consideran las siguientes afirmaciones:

1. El número real x pertenece al conjunto $(M \cup N) \cap (M \cup P)$.

2. El número real x pertenece al conjunto $[-2, 3) \cup (6, 9)$.

A. $1 \Leftrightarrow 2$

C. 1 y 2 son excluyentes entre sí.

B. $1 \Rightarrow 2$ pero $2 \not\Rightarrow 1$

D. Nada de lo anterior.

$(M \cup N) \cap (M \cup P) = [-2, 3) \cup [6, 9)$, luego $2 \Rightarrow 1$ pero $1 \not\Rightarrow 2$ (para entender lo anterior basta pensar en $x = 6$). La respuesta es la D.

Señala el dato innecesario para contestar

7. Se desea saber el rédito al que hay que colocar un capital a interés compuesto para que se doble. Para ello se dan los datos:

1. El capital invertido asciende a 12 000 €.

2. El tiempo que va a durar la inversión es de doce años.

3. La capitalización será mensual.

A. Puede eliminarse el dato 1.

B. Puede eliminarse el dato 2.

C. Puede eliminarse el dato 3.

D. No puede eliminarse ningún dato.

Claramente necesitamos conocer el tiempo que dura la inversión (t años) y el periodo de capitalización (n capitalizaciones al año) para calcular el rédito r %, pero no es necesario conocer el capital inicial C_0 , ya que si queremos doblar el capital inicial

$$2C_0 = C_0 \left(1 + \frac{r}{100n}\right)^{nt} \Rightarrow 2 = \left(1 + \frac{r}{100n}\right)^{nt} \Rightarrow 2^{\frac{1}{nt}} = 1 + \frac{r}{100n} \Rightarrow r = 100n \cdot \left(2^{\frac{1}{nt}} - 1\right) \text{ que no depende de } C_0.$$

La solución es la A.