

Ejercicio 1.

Calcula el valor de las expresiones:

$$a) \log_8 \left(\sqrt{\frac{9}{2}} + \sqrt[4]{324} - \frac{\sqrt{50}}{2} + \sqrt[6]{512} \right)$$

$$b) \log_{\frac{1}{3}} \sqrt[3]{9} + \log_{\sqrt{2}} \sqrt{2\sqrt{2}} - \log_5 \frac{1}{\sqrt[3]{25}}$$

$$\begin{aligned} a) \log_8 \left(\sqrt{\frac{9}{2}} + \sqrt[4]{324} - \frac{\sqrt{50}}{2} + \sqrt[6]{512} \right) &= \log_8 \left(\frac{3}{\sqrt{2}} + \sqrt[4]{2^2 \cdot 3^4} - \frac{5 \cdot \sqrt{2}}{2} + \sqrt[6]{2^9} \right) = \\ &= \log_8 \left(\frac{3 \cdot \sqrt{2}}{2} + 3 \cdot \sqrt{2} - \frac{5 \cdot \sqrt{2}}{2} + 2 \cdot \sqrt{2} \right) = \log_8 \left(\frac{3 \cdot \sqrt{2} + 6 \cdot \sqrt{2} - 5 \cdot \sqrt{2} + 4 \cdot \sqrt{2}}{2} \right) = \\ &= \log_8 (4 \cdot \sqrt{2}) = \log_8 (2^{5/2}) = \frac{5}{2} \cdot \log_8 (2) = \frac{5}{2} \cdot \log_8 (8^{1/3}) = \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{5}{6} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b) \log_{\frac{1}{3}} \sqrt[3]{9} + \log_{\sqrt{2}} \sqrt{2\sqrt{2}} - \log_5 \frac{1}{\sqrt[3]{25}} &= \log_{\frac{1}{3}} 3^{2/3} + \log_{\sqrt{2}} \sqrt[4]{2^3} - \log_5 \frac{1}{5^{2/3}} = \\ &= \log_{\frac{1}{3}} \left(\frac{1}{3} \right)^{-2/3} + \log_{\sqrt{2}} 2^{3/4} - \log_5 5^{-2/3} = -\frac{2}{3} + \log_{\sqrt{2}} (\sqrt{2})^{6/4} - \left(-\frac{2}{3} \right) = -\frac{2}{3} + \frac{6}{4} + \frac{2}{3} = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

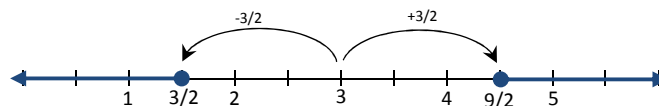
Ejercicio 2.

Escribe en forma de intervalo y representa en la recta real los siguientes conjuntos de números:

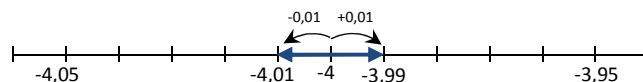
$$a) |3-x| \geq \frac{3}{2}$$

$$b) |x+4| < 10^{-2}$$

$$a) |3-x| \geq \frac{3}{2} \Rightarrow d(x, 3) \geq \frac{3}{2} \Rightarrow x \geq 3 + \frac{3}{2} \text{ y } x \leq 3 - \frac{3}{2} \Rightarrow x \in \left(-\infty, \frac{3}{2} \right] \cup \left[\frac{9}{2}, +\infty \right)$$



$$b) |x+4| < 10^{-2} \Rightarrow |x - (-4)| < 0'01 \Rightarrow d(x, -4) < 0'01 \Rightarrow -4 - 0'01 < x < -4 + 0'01 \Rightarrow x \in (-4'01, -3'99)$$



Ejercicio 3.

Calcula:

$$a) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{5}{n^2} + \frac{9}{n^2} + \dots + \frac{4n-3}{n^2} \right)$$

$$b) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4n^2 + n}{3n^2 + 1} \right)^{\frac{n+1}{n^2}}$$

$$\begin{aligned} a) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{5}{n^2} + \frac{9}{n^2} + \dots + \frac{4n-3}{n^2} \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1+5+9+\dots+(4n-3)}{n^2} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{(1+4n-3) \cdot n}{n^2} \right) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n^2-1}{n^2} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 - \frac{1}{n^2} \right) = 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4n^2 + n}{3n^2 + 1} \right)^{\frac{n+1}{n^2}} &\Rightarrow \begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4n^2 + n}{3n^2 + 1} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4 + \frac{1}{n}}{3 + \frac{1}{n^2}} \right) = \frac{4}{3} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n^2} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \right) = 0 \end{cases} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4n^2 + n}{3n^2 + 1} \right)^{\frac{n+1}{n^2}} = \left(\frac{4}{3} \right)^0 = 1 \end{aligned}$$

Ejercicio 4.

Los ángulos interiores de un pentágono convexo están en progresión aritmética. Si sabemos que el mayor de ellos mide 156° , encuentra el valor de los demás.

La suma de los ángulos interiores de un polígono convexo es $180^\circ \cdot (n-2)$, con lo que los ángulos del pentágono sumarán 540° .

Los ángulos en progresión aritmética serán $x, x+d, x+2d, x+3d, x+4d$

como el mayor mide $156^\circ \Rightarrow x = 156^\circ$ o $x+4d = 156^\circ$

Tomamos $x = 156^\circ$, entonces :

$$156 + (156 + d) + (156 + 2d) + (156 + 3d) + (156 + 4d) = 540 \Rightarrow 780 + 10d = 540 \Rightarrow d = -24$$

Los ángulos del pentágono son $156^\circ, 132^\circ, 108^\circ, 84^\circ, 60^\circ$

Ejercicio 5.

Si $A = 3,24 \cdot 10^{-15}$; $B = 8,1 \cdot 10^5$; $C = 1,8 \cdot 10^{-18}$; $D = 2,4 \cdot 10^{12}$, calcula el valor de $\left(\frac{A}{B} + C\right) \cdot D$,

dando el resultado con dos cifras significativas.

Encuentra una cota para el error relativo que se ha cometido al hacer esa aproximación.

$$\begin{aligned} \left(\frac{A}{B} + C\right) \cdot D &= \left(\frac{3,24 \cdot 10^{-15}}{8,1 \cdot 10^5} + 1,8 \cdot 10^{-18}\right) \cdot 2,4 \cdot 10^{12} = (0,4 \cdot 10^{-20} + 1,8 \cdot 10^{-18}) \cdot 2,4 \cdot 10^{12} = \\ &= (0,004 \cdot 10^{-18} + 1,8 \cdot 10^{-18}) \cdot 2,4 \cdot 10^{12} = (1,804 \cdot 10^{-18}) \cdot 2,4 \cdot 10^{12} = 4,3296 \cdot 10^{-6} \approx 4,3 \cdot 10^{-6} \end{aligned}$$

$$E_a = |4,3296 \cdot 10^{-6} - 4,3 \cdot 10^{-6}| = 2,96 \cdot 10^{-8}$$

$$E_r = \frac{2,96 \cdot 10^{-8}}{4,3296 \cdot 10^{-6}} \approx 6,84 \cdot 10^{-3} < 0,007$$

Ejercicio 6.

La suma de los infinitos términos de una progresión geométrica decreciente es 18 y la diferencia entre los dos primeros es 2. Determina la progresión.

Si puedo sumar infinitos términos de una progresión geométrica es que $|r| < 1$

$$\text{y en ese caso } S = \frac{a_1}{1-r}$$

Las condiciones que nos dan son:

$$\begin{cases} \frac{a_1}{1-r} = 18 \\ a_1 - a_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{a_1}{1-r} = 18 \\ a_1 - a_1 \cdot r = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{a_1}{1-r} = 18 \\ a_1(1-r) = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 18 \cdot \frac{2}{a_1} \\ 1-r = \frac{2}{a_1} \end{cases} \Rightarrow (a_1)^2 = 36 \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 6 \\ a_1 = -6 \end{cases}$$

Si $a_1 = -6 \Rightarrow 1-r = -\frac{1}{3} \Rightarrow r = \frac{4}{3}$ que no es posible por ser mayor que 1.

Si $a_1 = 6 \Rightarrow 1-r = \frac{1}{3} \Rightarrow r = \frac{2}{3}$; y la progresión será: $6, 4, \frac{8}{3}, \frac{16}{9}, \frac{32}{27}, \frac{64}{81}, \dots$

$$a_n = 6 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \Rightarrow a_n = \frac{2^n}{3^{n-2}}$$