EXAMEN de FUNCIONES

1. ¿Cómo son entre sí las imágenes de valores opuestos, de las funciones impares? ¿Y las de las pares? Pon un ejemplo **JUSTIFICADO** de función par y otro de función impar. (*1 punto*).
2. ¿Cuál es el punto común de las gráficas de todas las funciones exponenciales? ¿Y el de las logarítmicas? ¿Cuáles son los dominios y los recorridos de dichas funciones? Si tienen asíntotas indica cuáles son y por qué. **RAZONA TODAS LAS RESPUESTAS**. (*1 punto*).
3. Halla **RAZONADAMENTE** la expresión de la recíproca (inversa respecto a la composición) de $h(x) = 3 + \log(2x - 6)$. (*1 punto*).
4. Haz un estudio **RAZONADO** de la continuidad y las asíntotas de la función definida por $g(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x^2 - x - 2}$ indicando los tipos de discontinuidades existentes y la posición de la gráfica de g respecto a las asíntotas. **JUSTIFICA TODAS LAS RESPUESTAS**. (*3 puntos*).
5. Sea f la función definida por $f(x) = 7x - x^2 + \dfrac{9}{x}$ Halla **RAZONADAMENTE**, a partir de su derivada, los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f así como los máximos y mínimos, absolutos y relativos. **JUSTIFICA TODAS LAS RESPUESTAS**. (*2 puntos*).
6. Halla **RAZONADAMENTE** el área del recinto cerrado delimitado por el eje de abscisas y la gráfica de la curva $y = x^3 - 6x^2 + 8x$. (*2 puntos*).

SOLUCIONES

1. Las funciones impares son simétricas respecto al origen de coordenadas, por ello a valores opuestos de su dominio les corresponden imágenes opuestas; es decir para todo valor x de su dominio se cumple $f(-x) = -f(x)$. Una función impar es, por ejemplo, $f(x) = x^3 + 1/x$ porque en ella, a valores opuestos de x, les corresponden imágenes opuestas.

   Las funciones pares son simétricas respecto al eje de ordenadas, por ello a valores opuestos de su dominio les corresponde la misma imagen; es decir, para todo valor x de su dominio se cumple $f(-x) = f(x)$. Un ejemplo de función par es $f(x) = x^2+5$ ya que, a valores opuestos de x, les corresponde la misma imagen.

2. Las funciones exponenciales son de la forma $y=a^x$ (en las que a es un número positivo distinto de 1) por tanto todas ellas pasan por el punto P(0 , 1) y, como todas las potencias de base positiva son positivas, el dominio de las funciones exponenciales es todo **R** y su recorrido es **R+**. Además

   - si la base es mayor que 1,
     - cuando x tiende a $-\infty$, a^x tiende a 0 por ello la recta de ecuación $y=0$ (eje de abscisas) es asíntota horizontal por la izquierda.
     - No tiene asíntotas verticales porque a^x tiende a ∞ sólo si x tiende a $+\infty$
   - Si la base está entre 0 y 1,
     - cuando x tiende a $+\infty$, a^x tiende a 0 por lo tanto la recta de ecuación $y=0$ (eje de abscisas) es asíntota horizontal por la derecha.
     - No tiene asíntotas verticales porque a^x tiende a ∞ sólo si x tiende a $-\infty$

La función logarítmica, al ser recíproca de la exponencial, tiene los pares de valores de las variables en orden contrario a los de ésta, por ello, todas las funciones logarítmicas pasan por el punto Q(1 , 0), su dominio es **R+** (recorrido de la exponencial) y su recorrido es todo **R** (dominio de la exponencial). Además

- si la base es mayor que 1,
    - cuando x tiende a 0^+, $log_a\, x$ tiende a $-\infty$, motivo por el que la recta de ecuación $x=0$ (eje de ordenadas) es asíntota vertical por abajo.
    - No tiene asíntota horizontal porque cuando $x \to +\infty$, su imagen, $log_a x \to +\infty$
- Si la base está entre 0 y 1,
    - cuando x tiende a 0^+, $log_a\, x$ tiende a $+\infty$, lo que implica que la recta de ecuación $x=0$ (eje de ordenadas) es asíntota vertical, en este caso por arriba.
    - No tiene asíntota horizontal porque cuando $x \to +\infty$, su imagen, $log_a x \to -\infty$

3. Las funciones recíprocas (inversas respecto a la composición) tienen intercambiadas las variables; por lo tanto :

$$h(x) = 3 + \log(2x - 6) \quad \Leftrightarrow \quad y = 3 + \log(2x-6) \xleftrightarrow{\text{RECÍPROCA}} x = 3 + \log(2y - 6)$$

Despejando la variable dependiente obtenemos la expresión de la recíproca de h:

$$x = 3 + \log(2y-6) \xrightarrow{-3} x - 3 = \log(2y-6) \xrightarrow{\text{DEFINICIÓN}} 2y - 6 = 10^{x-3} \xrightarrow{+6} 2y = 10^{x-3} + 6$$

$$\xrightarrow{\cdot\ 1/2} y = \frac{10^{x-3}+6}{2}$$

La recíproca de $h(x) = 3 + \log(2x-6)$ es: $\boxed{h^{-1}(x) = \frac{10^{x-3}+6}{2}}$

Es fácil comprobar que $(h \circ h^{-1})(x) = h[h^{-1}(x)] = x$ y, también, $(h^{-1} \circ h)(x) = h^{-1}[h(x)] = x$

4. $$g(x) = \frac{x^2-4}{x^2-x-2}$$

Por tratarse de una función racional es continua en todo su dominio que es el conjunto de los números reales con excepción de los valores que anulen su denominador:

$x^2 - x - 2 = (x-2)(x+1)$ por lo tanto el denominador se anula en $x = 2$ y $x = -1$

$$\boxed{\begin{array}{c} g \text{ es continua en} \\ (-\infty\ ,\ -1) \cup (-1\ ,\ 2) \cup (2\ ,\ +\infty) \end{array}}$$

Para estudiar las asíntotas y las discontinuidades, no tenemos más que analizar los límites de $g(x)$ en los extremos de los intervalos en que está definida y, para facilitar el cálculo de estos límites, simplificamos la expresión de $g(x)$.

$$g(x) = \frac{x^2-4}{x^2-x-2} = \frac{\cancel{(x-2)}(x+2)}{\cancel{(x-2)}(x+1)} \Rightarrow g(x) = \frac{x+2}{x+1}$$ siempre que $x \neq -1$ y $x \neq 2$ (porque para estos dos valores no está definida).

- $$\lim_{x\to -1} g(x) = \lim_{x\to -1} \frac{x+2}{x+1} = \begin{cases} \xrightarrow{\frac{+1}{0^-}} -\infty & \text{cuando } x \to -1^- \\ \xrightarrow{\frac{+1}{0^+}} +\infty & \text{cuando } x \to -1^+ \end{cases} \Rightarrow$$

> En $x=-1$ la discontinuidad es inevitable de salto infinito (asintótica).
>
> La recta de ecuación $x=-1$ es doblemente asíntota vertical de g. La gráfica de la función va por la izquierda de la parte inferior de la asíntota y por la derecha de la parte superior.

- $$\lim_{x\to 2} g(x) = \lim_{x\to 2} \frac{x+2}{x+1} = \frac{4}{3} \Rightarrow$$

> En $x=2$ la discontinuidad es evitable porque g sería continua en $x=2$ haciendo
> $$g(2)=\frac{3}{4}$$

- $$\lim_{x\to -\infty} g(x) = \lim_{x\to -\infty} \frac{x+2}{x+1} = \lim_{x\to -\infty} \frac{1+\frac{2}{x}}{1+\frac{1}{x}} = 1^- \Rightarrow$$

> La recta horizontal, de ecuación $y=1$ es asíntota por la izquierda y la gráfica de g va por debajo de la misma.

- $$\lim_{x\to +\infty} g(x) = \lim_{x\to +\infty} \frac{x+2}{x+1} = \lim_{x\to +\infty} \frac{1+\frac{2}{x}}{1+\frac{1}{x}} = 1^+ \Rightarrow$$

> La recta horizontal, de ecuación $y=1$ es, también, asíntota por la derecha y la gráfica de g va, en este caso, por debajo de la misma.

5. $f(x)=7x-x^2+\frac{9}{x} \Rightarrow f'(x)=7-2x-\frac{9}{x^2}$. La función f es creciente en los intervalos en los que su derivada es positiva y decreciente en los que es negativa. Para analizar el signo de la derivada averiguamos, primero, los valores que la anulan y, además, tendremos en cuenta el hecho de que f no está definida en $x=0$ por anularse su denominador para ese valor.

$$f'(x)=0 \Rightarrow 7-2x-\frac{9}{x^2}=0 \xrightarrow{\cdot\, x^2} 7x^2-2x^3-9=0 \Rightarrow -2x^3+7x^2-9=0$$

$$(x+1)(-2x^2+9x-9)=0 \Rightarrow \begin{cases} x+1=0 & \Rightarrow \quad x=-1 \\ -2x^2+9x-9=0 & \Rightarrow \quad x=3 \text{ y } x=3/2 \end{cases}$$

Relación entre los valores de x, el signo de $f'(x)$ y el crecimiento o decrecimiento de f:

x	$-\infty$	$x<-1$	$x=-1$	$-1<x<0$	0^-	$x=0$	0^+	$0<x<3/2$	$x=3/2$	$3/2<x<3$	$x=3$	$x>3$	$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$		$\nexists$	$-$		0	$+$	0	$-$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	*máx*	$\searrow$	$-\infty$	$\nexists$	$+\infty$	$\searrow$	*mín*	$\nearrow$	*máx*	$\searrow$	$-\infty$

Conclusiones del análisis anterior:

f es creciente en $(-\infty\ ,\ -1)\cup(3/2\ ,\ 3)$ y decreciente en $(-1\ ,\ 0)\cup(0\ ,\ 3/2)\cup(3\ ,\ +\infty)$

No tiene ni máximo ni mínimo absoluto porque $f(x)$ va de $-\infty$ a $+\infty$

En $x=-1$ y en $x=3$ hay máximos relativos por pasar la función de ser creciente a ser decreciente y en $x=3/2$ hay mínimo relativo porque pasa de decreciente a creciente. Hallamos las imágenes de dichos extremos relativos:

$$f(x)=7x-x^2+\frac{9}{x}\Rightarrow\begin{cases}f(-1)=7(-1)-(-1)^2+\dfrac{9}{(-1)}=-17\\ f(3)=7\cdot3-3^2+\dfrac{9}{3}=15\\ f(3/2)=7(3/2)-(3/2)^2+\dfrac{9}{3/2}=\dfrac{57}{4}\end{cases}$$

Máximos relativos:
$(-1\ ,\ -17)$ y $(3\ ,\ 15)$

Mínimo relativo:
$(3/2\ ,\ 57/4)$

6. Área delimitada por el eje de abscisas (ecuación $y=0$), y la curva $y=x^3-6x^2+8x$

Los valores de x entre los que se encuentra el área pedida nos lo dan los puntos de corte entre el eje de abscisas y la curva:

$$x^3-6x^2+8x=0\ \Rightarrow\ x(x^2-6x+8)=0\Rightarrow\ x(x-2)(x-4)=0\ \Rightarrow\ x=0,\ x=2 \text{ o } x=4$$

En los intervalos $(0\ ,\ 2)$ y $(2\ ,\ 4)$ las imágenes de los puntos de la curva no cambian de signo. Hallamos el área pedida calculando la integral definida de la curva en dichos intervalos:

$$A = A_1 + A_2 = \left|\int_0^2 y\,dx\right| + \left|\int_2^4 y\,dx\right| = \left|[Y]_0^2\right| + \left|[Y]_2^4\right| = \left|(Y(2)-Y(0)\right| + \left|(Y(4)-Y(2)\right|\ *$$

Siendo $Y'=y$

$Y=\int(x^3-6x^2+8x)\,dx=\frac{1}{4}x^4-2x^3+4x^2$ (como nos sirve una primitiva cualquiera hemos dejado 0 como término independiente).

$$Y=\frac{1}{4}x^4-2x^3+4x^2\ \Rightarrow\begin{cases}Y(0)=0\\ Y(2)=4\\ Y(4)=0\end{cases}$$

Sustituyendo en (*)

$$A = \left|(Y(2)-Y(0)\right| + \left|(Y(4)-Y(2)\right| = |4-0| + |0-4| = 4+4 = 8$$

Área $= 8\,(\text{u.l.})^2$