DERIVADAS e INTEGRALES

1. Halla la derivada de la función: $f(x)=\left(1+2\cdot 3^x\right)^{4-5\cdot\log_6(7x+8)}$
2. Halla la primitiva de la función: $g(x)=\cos(3x+\pi)$ que pasa por el punto $P(\pi/2\ ,\ 5)$
3. Halla el área de la región comprendida entre los ejes de coordenadas, la recta de ecuación $x=3$ y la curva cuya fórmula es $h(x)=x^3-2x^2-x+2$

1. $$f(x)=\left(1+2\cdot 3^x\right)^{4-5\cdot\log_6(7x+8)}$$

Se trata de una función "potencial" (tiene x en la base) – "exponencial" (tiene x en el exponente). Además en ambos casos es compuesta.

Su derivada es la suma de la derivada como potencial y la derivada como exponencial, es decir:

$$f(x)=u^v \quad\Rightarrow\quad f'(x)=v\cdot u^{v-1}\cdot u'+u^v\cdot\ln u\cdot v'$$

En este caso: $\begin{cases} u=1+2\cdot 3^x \\ v=4-5\cdot\log_6(7x+8)\end{cases} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} u'=2\cdot 3^x\cdot\ln 3 \\ v'=-5\cdot\dfrac{1}{(7x+8)\cdot\ln 6}\cdot 7\end{cases}$

Por lo tanto:

$$f'(x)=\left[4-5\cdot\log_6(7x+8)\right]\left(1+2\cdot 3^x\right)^{4-5\cdot\log_6(7x+8)-1}\cdot 2\cdot 3^x\cdot\ln 3\ +$$

$$+\left(1+2\cdot 3^x\right)^{4-5\cdot\log_6(7x+8)}\cdot\ln\left(1+2\cdot 3^x\right)\cdot(-5)\cdot\frac{1}{(7x+8)\cdot\ln 6}\cdot 7$$

2. Primitiva de $g(x)=\cos(3x+\pi)$ que pasa por $P(\pi/2\ ,\ 5)$

La función G que nos piden tiene que cumplir:

I. Por ser primitiva de g: $\quad G(x)=\int g(x)dx$

$$G(x)=\int g(x)dx=\int\cos(3x+\pi)\cdot dx=\int\frac{1}{3}\cdot\cos(3x+\pi)\cdot 3\cdot dx=\frac{1}{3}\cdot\int\cos(3x+\pi)\cdot 3\cdot dx=$$

$$=\frac{1}{3}\cdot sen(3x+\pi)+\mathrm{C}\quad(\text{con } \mathrm{C}\in\Re)$$

Comprobamos que $G'(x)=g(x)$: $\ G'(x)=\dfrac{1}{3}\cdot\cos(3x+\pi)\cdot 3=\cos(3x+\pi)=g(x)$

II. Por pasar por $P(\pi/2\ ,\ 5)$: $\quad G(\frac{\pi}{2})=5\ \Rightarrow\ \frac{1}{3}\cdot sen(3\frac{\pi}{2}+\pi)+\mathrm{C}=5\ \Rightarrow\ \frac{1}{3}\cdot 1+\mathrm{C}=5$

$$\Rightarrow \mathrm{C}=\frac{14}{3}$$

Respuesta:

$$\boxed{G(x) = \frac{1}{3}\cdot sen(3x+\pi)+\frac{14}{3}}$$

3. Nos piden el área de la región delimitada por la curva $h(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$ y las rectas $y = 0$ (eje de abscisas), $x = 0$ (eje de ordenadas) y $x = 3$ (paralela al eje de ordenadas).

   Para un intervalo de valores de x, el área comprendida entre una curva y el eje de abscisas coincide con el valor de la integral definida de la curva o con el de su opuesta, según sean las ordenadas de los puntos de la curva, positivas o negativas, respectivamente, en dicho intervalo. En cualquier caso, el área coincidirá con el valor absoluto de la integral definida en los intervalos en que no se produzca cambio de signo en las imágenes.

   Valores que hacen $h(x) = 0$

   $$x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0 \;\Rightarrow\; (x-1)(x-2)(x+1) = 0 \;\Rightarrow\; x = 1,\; x = 2 \text{ y } x = -1$$

   Lo que significa que entre $x = 0$ y $x = 1$ $h(x)$ no cambia de signo y lo mismo ocurre entre $x = 1$ y $x = 2$ y a partir de $x = 2$. Por lo tanto, el área pedida es:

   $$\text{A} = \left|\int_0^1 h(x)dx\right| + \left|\int_1^2 h(x)dx\right| + \left|\int_2^3 h(x)dx\right|$$

   Para hallar los valores de estas integrales definidas, calculamos previamente una primitiva de $h(x)$ y aplicamos la regla de Barrow:

   $$\text{A} = \left|[H(x)]_0^1\right| + \left|[H(x)]_1^2\right| + \left|[H(x)]_2^3\right| = |H(1) - H(0)| + |H(2) - H(1)| + |H(3) - H(2)| \quad (*)$$

   Siendo $H(x)$ una primitiva de $h(x)$ es decir, se cumple que $H'(x) = h(x)$

   $H(x) = \int h(x)dx = \int \left(x^3 - 2x^2 - x + 2\right)dx = \frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 2x$ (como nos sirve una primitiva cualquiera tomamos 0 como término independiente)

   Hallando los valores de $H(x)$ en los extremos de los intervalos y sustituyendo obtenemos el área:

   $$\left.\begin{aligned} H(0) &= \frac{1}{4}\cdot 0^4 - \frac{2}{3}\cdot 0^3 - \frac{1}{2}\cdot 0^2 + 2\cdot 0 = 0 \\ H(1) &= \frac{1}{4}\cdot 1^4 - \frac{2}{3}\cdot 1^3 - \frac{1}{2}\cdot 1^2 + 2\cdot 1 = \frac{13}{12} \\ H(2) &= \frac{1}{4}\cdot 2^4 - \frac{2}{3}\cdot 2^3 - \frac{1}{2}\cdot 2^2 + 2\cdot 2 = \frac{2}{3} = \frac{8}{12} \\ H(3) &= \frac{1}{4}\cdot 3^4 - \frac{2}{3}\cdot 3^3 - \frac{1}{2}\cdot 3^2 + 2\cdot 3 = \frac{15}{4} = \frac{45}{12} \end{aligned}\right\} \text{Sustituyendo en } (*)$$

   $$\text{A} = \left|\frac{13}{12} - 0\right| + \left|\frac{8}{12} - \frac{13}{12}\right| + \left|\frac{45}{12} - \frac{8}{12}\right| =$$

   $$= \left|\frac{13}{12}\right| + \left|-\frac{5}{12}\right| + \left|\frac{37}{12}\right| = \frac{13}{12} + \frac{5}{12} + \frac{37}{12} = \frac{55}{12}$$

   $$\boxed{\text{Área} = \frac{55}{12}\,(\text{u.l})^2 \cong 4'58\,(\text{u.l.})^2}$$