

DESCOMPOSICIÓN FACTORIAL

1

RAÍCES DE UN POLINOMIO. TEOREMA DEL FACTOR

Se dice que el valor $x = a$ es una **raíz de un polinomio** $P(x)$ si el valor numérico de $P(x)$ para $x = a$ es 0, es decir:

$$x = a \text{ es raíz de } P(x) \text{ si } P(a) = 0$$

Un polinomio $P(x)$ se dice que es **divisible** por $x - a$ cuando a es una raíz de $P(x)$:

$$x = a \text{ es raíz de } P(x) \Leftrightarrow P(a) = 0 \Leftrightarrow P(x) : (x - a) \text{ es exacta} \Leftrightarrow x - a \text{ es un factor de } P(x)$$

□ Ejemplos:

1) Sea el polinomio $P(x) = x^2 - 5x + 6$.

Decimos que $x = 2$ es **raíz** de $P(x)$ porque se cumple que $P(2) = 0$

$$P(2) = 2^2 - 5 \cdot 2 + 6 = 4 - 10 + 6 = 0.$$

En tal caso, diremos que el polinomio $P(x)$ es divisible por $x - 2$.

Vamos a demostrarlo empleando la regla de Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrr} & 1 & -5 & 6 \\ 2 & & 2 & -6 \\ \hline & 1 & -3 & 0 \end{array} \Rightarrow \text{El resto es 0, } P(x) \text{ es divisible por } x - 2$$

2) Demuestra que $x = 2$ es raíz del polinomio $P(x) = x^2 - 5x + 6$, pero $x = 1$ no lo es.

Para ello, vamos a comprobar que $P(2) = 0$ y $P(1) \neq 0$

$$P(2) = 2^2 - 5 \cdot 2 + 6 = 4 - 10 + 6 = 0 \Rightarrow x = 2 \text{ es raíz de } P(x)$$

$$P(1) = 1^2 - 5 \cdot 1 + 6 = 1 - 5 + 6 = 2 \Rightarrow x = 1 \text{ no es raíz de } P(x)$$

3) ¿Es $x = 1$ raíz del polinomio $P(x) = x^2 - 2x + 1$?

Demostramos que es raíz del polinomio empleando la regla de Ruffini

$$\begin{array}{r|rrr} & 1 & -2 & 1 \\ 1 & & 1 & -1 \\ \hline & 1 & -1 & 0 \end{array} \Rightarrow P(1) = 0 \Rightarrow x = 1 \text{ es raíz de } P(x)$$

Las raíces de un polinomio $P(x)$ son las soluciones de la ecuación $P(x) = 0$.

Si “a” es una raíz de un polinomio $P(x)$, podemos expresar $P(x)$ como producto de dos factores

$$P(x) = Q(x) \cdot (x - a), \text{ siendo uno de ellos de primer grado.}$$

Si repitiéramos este proceso hasta llegar a un polinomio $T(x)$ sin raíces reales, tendríamos expresado el polinomio $P(x)$ como producto de factores:

$$P(x) = (x - a) \cdot Q(x) = (x - a) \cdot (x - b) \cdot \dots \cdot T(x).$$

Esta expresión es la **descomposición factorial de $P(x)$** .

Vamos a ver distintos procedimientos para descomponer un polinomio:

MÉTODOS DE DESCOMPOSICIÓN

2.1. Buscar divisores de la forma $x - a$, aplicando la regla de Ruffini

En el apartado anterior, obtuvimos las siguientes conclusiones:

- a) Si “a” es una raíz entera del polinomio, entonces “a” es un divisor del término independiente. Por tanto, las raíces enteras de un polinomio se busca entre los divisores del término independiente.
- b) Si “a” es raíz del polinomio $P(x)$, entonces $(x - a)$ es un factor de $P(x)$.
- c) El número máximo de raíces de un polinomio es igual a su grado.

Para descomponer factorialmente un polinomio empleando la regla de Ruffini se procede así:

- a) Si el polinomio no tiene término independiente, se saca factor común
- b) Si el polinomio tiene término independiente, se busca sus raíces enteras entre los divisores del término independiente.

□ Ejemplos:

1. Descomponer el polinomio $x^2 + x - 12$

Buscamos las posibles raíces entre los divisores de 12. Probamos con $x = 3$

$$\begin{array}{r|rrr} & 1 & 1 & -12 \\ 3 & & 3 & 12 \\ \hline & 1 & 4 & 0 \end{array} \Rightarrow P(3) = 0 \Rightarrow x = 3 \text{ es raíz de } x^2 + x - 12$$

Al ser el resto cero, podemos expresar el polinomio como producto de dos:

$$x^2 + x - 12 = (x - 3) \cdot (x + 4)$$

La segunda raíz es - 4, el valor que anula el factor $x + 4$.

2. Descomponer el polinomio $2x^3 - 7x^2 - 19x + 60$

	2	-7	-19	60
-3		-6	39	-60
	2	-13	20	0
4		8	-20	
	2	-5	0	

Por tanto, se tiene:

$$2x^3 - 7x^2 - 19x + 60 = (x + 3)(x - 4)(2x - 5)$$

¡ OJO!!!!!! DIFERENCIA RAÍCES Y FACTORES

¿Cuáles son las raíces del polinomio? Los valores que anula el polinomio:

$$x_1 = -3 \quad x_2 = 4 \quad x_3 = \frac{5}{2}$$

¿Cuáles son los factores del polinomio? Al ser el polinomio de grado 3, el polinomio se puede expresar como producto de tres binomios de grado 1:

$$x + 3 \quad x - 4 \quad 2x - 5$$

3. Descomponer el polinomio $x^3 - 2x^2 - 2x - 3$

	1	-2	-2	-3
3		3	3	3
	1	1	1	0

Por tanto:

$$x^3 - 2x^2 - 2x - 3 = (x - 3)(x^2 + x + 1)$$

2.2. Extraer factor común

Observa la siguiente expresión: $a \cdot b + a \cdot c - a \cdot d$, se trata de una suma cuyos sumandos son productos y estos productos contienen un factor común a .

Podemos transformar la suma, extrayendo dicho factor común y colocando entre paréntesis los factores de cada sumando que quedarían al suprimir dicho factor común:

$$a \cdot b + a \cdot c - a \cdot d = a \cdot (b + c - d)$$

□ Ejemplos:

a) $3x + 3y = 3 \cdot (x + y)$

b) $4x + 6x^2 = 2 \cdot 2 \cdot x + 2 \cdot 3 \cdot x \cdot x = 2x \cdot (2 + 3x)$

- La transformación no es otra cosa que la aplicación de la propiedad distributiva.
- Cuando el factor común coincide con uno de los sumandos, en su lugar queda la unidad:

$$a + a \cdot b = a \cdot 1 + a \cdot b = a \cdot (1 + b)$$

□ Ejemplos:

a) $2x + 4x^2 = 2 \cdot x \cdot 1 + 2 \cdot 2 \cdot x \cdot x = 2x \cdot (1 + 2x)$

b) $ab + 2b^2 = ab \cdot (1 + 2b)$

2.3. Aplicando las identidades notables

Otro procedimiento para descomponer polinomios de 2º grado es empleando las identidades notables:

$$x^2 + 2ax + a^2 = (x + a)^2 \quad \text{--->} x^2 + 4x + 4 = (x + 2)^2$$

$$x^2 - 2ax + a^2 = (x - a)^2 \quad \text{--->} x^2 - 6x + 9 = (x - 3)^2$$

$$x^2 - a^2 = (x - a)(x + a) \quad \text{--->} x^2 - 16 = (x - 4)(x + 4)$$

□ Ejemplos:

a) $9 - 4x^2 = (3 - 2x)(3 + 2x)$

b) $9x^4 + 6x^2 + 1 = (3x^2 + 1)^2$

c) $x^4 - 2x^2 + 1 = (x^2 - 1)^2 = (x - 1)^2(x + 1)^2$

- Si tenemos el caso de una expresión con todos los términos negativos, extraemos factor común -1 y a continuación aplicamos el algoritmo.
- La misma operación haríamos si tenemos dos términos negativos en el trinomio.

□ Ejemplos:

a) $-x^2 - 2x - 1 = -(x^2 + 2x + 1) = -(x + 1)^2$

b) $-x^2 + 6x - 9 = -(x^2 - 6x + 9) = -(x - 3)^2$

Para saber cuál de las tres identidades hay que aplicar podrías ayudarnos el siguiente algoritmo:

Nº de términos	Signos de los términos	Identidad	Descomposición	Ejemplo
2		$x^2 - a^2$	Obtenemos los dos términos, calculando la raíz cuadrada de los términos de la diferencia	$4x^2 - 9 = (2x - 3) \cdot (2x + 3)$ $\sqrt{4x^2} = 2x$; $\sqrt{9} = 3$
3	Uno de ellos es negativo $x^2 - 2ax + a^2$	$(x - a)^2$	Para determinar los dos términos de la resta calculamos la raíz cuadrada de los términos positivos	$4x^2 - 12x + 9 = (2x - 3)^2$ $\sqrt{4x^2} = 2x$; $\sqrt{9} = 3$
	Todos son positivos $x^2 + 2ax + a^2$	$(x + a)^2$	En expresiones con una sola variable, calculamos la raíz cuadrada del término de mayor grado y del término independiente	$4x^2 + 12x + 9 = (2x + 3)^2$ $\sqrt{4x^2} = 2x$; $\sqrt{9} = 3$

En muchas ocasiones para descomponer un polinomio en factores se emplean más de un procedimiento, de todos ellos, se aplica en primer lugar la extracción de factor común:

□ Ejemplos:

a) $8x^2 - 8x + 2 = 2 \cdot (4x^2 - 4x + 1) = 2(2x - 1)^2$

b) $x^3 - 10x^2 + 25x = x(x^2 - 10x + 25) = x(x - 5)^2$

c) $x^4 - 1 = (x^2 + 1)(x^2 - 1) = (x^2 + 1)(x - 1)(x + 1)$

d) $a^3 - ab^2 = a(a^2 - b^2) = a(a - b)(a + b)$

Actividades resueltas

1.- Descomponer el polinomio $P(x) = x^3 - 7x + 6$

Buscamos sus posibles raíces entre los divisores del término independiente: $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$

$$\begin{array}{r|rrrr}
 1 & 1 & 0 & -7 & 6 \\
 & & 1 & 1 & -6 \\
 \hline
 & 1 & 1 & -6 & 0
 \end{array}
 \Rightarrow P(1) = 0 \Rightarrow x = 1 \text{ es raíz de } P(x)$$

Luego $P(x) = (x - 1) \cdot (x^2 + x - 6)$

Vamos a descomponer ahora el polinomio $Q(x) = (x^2 + x - 6)$

$$\begin{array}{r|rrr}
 1 & 1 & 1 & -6 \\
 & & 1 & 2 \\
 \hline
 & 1 & 2 & 4
 \end{array}
 \Rightarrow P(1) = 4 \Rightarrow x = 1 \text{ no es raíz de } Q(x)$$

Probamos con otros divisores:

$$\begin{array}{r|rrr}
 2 & 1 & 1 & -6 \\
 & & 2 & 6 \\
 \hline
 & 1 & 3 & 0
 \end{array}
 \Rightarrow Q(2) = 0 \Rightarrow x = 2 \text{ es raíz de } Q(x)$$

Luego $Q(x) = (x - 2) \cdot (x + 3)$

Por tanto, tenemos la descomposición de $P(x)$: $P(x) = x^3 - 7x + 6 = (x - 1) \cdot (x - 2) \cdot (x + 3)$

2.- Descomponer factorialmente el polinomio $P(x) = 3x^3 - 6x^2 - 15x + 18$

Buscamos sus posibles raíces entre los divisores del término independiente: $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6, \pm 9, \pm 18$

$$\begin{array}{r|rrrrr}
 1 & 3 & -6 & -15 & 18 \\
 & \downarrow & & & & \\
 & 3 & -6 & -15 & 18 \\
 \hline
 & 3 & -3 & -18 & 0 \\
 -2 & & -6 & 18 \\
 \hline
 & 3 & -9 & 0
 \end{array}
 \Rightarrow P(x) = (x - 1) \cdot (3x^2 - 3x - 18)$$

$\Rightarrow P(x) = (x - 1) \cdot (x + 2) \cdot (3x - 9)$

Por tanto, $P(x) = (x - 1) \cdot (x + 2) \cdot 3 \cdot (x - 3)$

3.- Descomponer factorialmente el polinomio $P(x) = x^3 + x^2 - 12x$

En primer lugar extraemos factor común ya que no tenemos término independiente para aplicar directamente Ruffini.

$$x^3 + x^2 - 12x = x(x^2 + x - 12)$$

$$\begin{array}{r|rrr}
 3 & 1 & 1 & -12 \\
 & & 3 & 12 \\
 \hline
 & 1 & 4 & 0
 \end{array}
 \Rightarrow (x^2 + x - 12) = (x - 3) \cdot (x + 4)$$

Luego $P(x) = x(x - 3)(x + 4)$