

CRECIMIENTO Y DECRECIMIENTO

Dada una función real $y = f(x)$ y un punto $x_0 \in D$ se dice que $f(x)$ es:

- **Creciente** en x_0 , si existe un entorno de x_0 en el que se cumple
$$\begin{cases} f(x) \leq f(x_0) & \text{si } x < x_0 \\ f(x_0) \leq f(x) & \text{si } x_0 < x \end{cases}$$
- **Estrictamente creciente** en x_0 , si existe un entorno de x_0 en el que se verifica
$$\begin{cases} f(x) < f(x_0) & \text{si } x < x_0 \\ f(x_0) < f(x) & \text{si } x_0 < x \end{cases}$$
- **Decreciente** en x_0 , si existe un entorno de x_0 en el que se cumple
$$\begin{cases} f(x) \geq f(x_0) & \text{si } x < x_0 \\ f(x_0) \geq f(x) & \text{si } x_0 < x \end{cases}$$
- **Estrictamente decreciente** en x_0 , si existe un entorno de x_0 en el que se verifica
$$\begin{cases} f(x) > f(x_0) & \text{si } x < x_0 \\ f(x_0) > f(x) & \text{si } x_0 < x \end{cases}$$

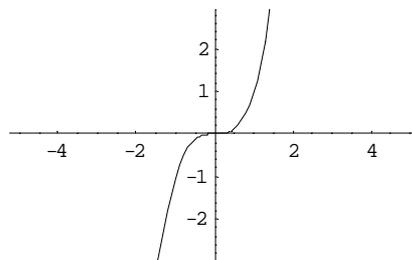
A continuación se van a dar condiciones suficientes para caracterizar estos conceptos para funciones derivables en x_0 .

Proposición

Dada $f(x)$ una función derivable en x_0 se cumple:

- Si $f'(x_0) > 0$ entonces f es estrictamente creciente en x_0 .
- Si $f'(x_0) < 0$ entonces f es estrictamente decreciente en x_0 .

Notar que los recíprocos de estas afirmaciones no son ciertos, por ejemplo, $f(x) = x^3$ es estrictamente creciente en $x_0 = 0$ (ver figura) y sin embargo, $f'(0)$ no es positiva ya que $f'(0) = 0$.



Ejemplo 1: Estudiar el crecimiento y decrecimiento de las siguientes funciones en su dominio de definición:

a) $f(x) = 2x^3 - 6x + 7$

Esta función es derivable en su dominio, $D = (-\infty, +\infty)$, por ser un polinomio y su derivada es $f'(x) = 6x^2 - 6$.

En este caso, para estudiar el signo de $f'(x)$ se factoriza el polinomio obteniéndose:

$$f'(x) = 6x^2 - 6 = 6(x^2 - 1) = 6(x+1)(x-1)$$

El signo de esta expresión depende del signo de $(x+1)$ y del signo de $(x-1)$ que cambian en los puntos $x = -1$ y $x = 1$ respectivamente, como se observa en la siguiente tabla:

Signo	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, +\infty)$
$x + 1$	-	+	+
$x - 1$	-	-	+
$f'(x) = 6x^2 - 6$	+	-	+

Al ser $f'(x) > 0$ en $(-\infty, -1)$ y en $(1, +\infty)$, se deduce que f es estrictamente creciente en dichos intervalos y al ser $f'(x) < 0$ en $(-1, 1)$, la función f es estrictamente decreciente en este intervalo.

b) $f(x) = (\ln x)^2$

Esta función es derivable en su dominio $D = (0, +\infty)$ y su derivada es $f'(x) = \frac{2 \ln x}{x}$

Para determinar el signo de $f'(x)$ se analiza el signo del numerador y del denominador:

- El signo del numerador puede cambiar en los puntos que lo anulan: $2 \ln x = 0 \Rightarrow x = 1$

Así, $2 \ln x < 0$ en $(0, 1)$ y $2 \ln x > 0$ en $(1, +\infty)$.

- El signo del denominador es siempre positivo en los puntos del dominio.

Se divide el dominio en los intervalos determinados por $x = 1$ y se estudia el signo de $f'(x)$ en cada uno de ellos, obteniéndose:

- En $(0, 1)$, $f'(x) < 0$, luego f es estrictamente decreciente.
- En $(1, +\infty)$, $f'(x) > 0$, luego f es estrictamente creciente.