EXTREMOS RELATIVOS

Dada una función $y = f(x)$ y un punto $x_o \in D$ se dice que $f(x)$ tiene en x_o:

- Un **máximo relativo**, si existe un entorno de x_o en el que se cumple $f(x) \leq f(x_o)$.
- Un **mínimo relativo**, si existe un entorno de x_o en el que se cumple $f(x_o) \leq f(x)$.
- Un **extremo relativo**, si *f* tiene en x_o un máximo o un mínimo relativo.

Si las desigualdades anteriores se verifican de forma estricta para $x \neq x_o$, se dice que el máximo o mínimo es **estricto**.

Los extremos relativos también se denominan óptimos locales; dando lugar a los términos máximo local y mínimo local.

Condición necesaria de extremo relativo (condición de primer orden)

Si $f(x)$ es una función derivable en un punto $x_o \in D$ y x_o es un extremo relativo de *f*, entonces $f'(x_o) = 0$.

Esta condición es necesaria pero no es suficiente; por ejemplo, $f(x) = x^3$ tiene como derivada $f'(x) = 2x^2$ que se anula en $x = 0$ y sin embargo, es estrictamente creciente en $x = 0$ por lo que no tiene extremo en dicho punto.

Se dice que x_o **es un punto crítico** de *f* si $f'(x_o) = 0$ o no existe $f'(x_o)$.

Los extremos relativos de *f* son puntos críticos, pero no todo punto crítico es extremo relativo. Nótese que los puntos candidatos a ser extremos relativos están entre aquellos que verifican la condición necesaria anterior y aquellos donde la función derivada no existe.

Condición suficiente de extremo relativo (condición de segundo orden)

Si *f* es una función con derivada segunda continua en x_o y $f'(x_o) = 0$, se verifica:

a) $f''(x_o) > 0 \quad \Rightarrow \quad f$ tiene en x_o un mínimo relativo estricto.

b) $f''(x_o) < 0 \quad \Rightarrow \quad f$ tiene en x_o un máximo relativo estricto.

Otra forma de determinar lo que ocurre en un punto crítico x_o en el que *f* es continua, es estudiar el crecimiento y decrecimiento de la función en puntos muy próximos a x_o, situados antes y después de él. Así,

$$\left.\begin{array}{l} f \text{ estrictamente creciente en puntos } x \text{ próximos a } x_o \text{ con } x < x_o \\ f \text{ estrictamente decreciente en puntos } x \text{ próximos a } x_o \text{ con } x > x_o \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{c} f \text{ tiene en } x_o \text{ un} \\ \text{máximo relativo estricto} \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} f \text{ estrictamente decreciente en puntos } x \text{ próximos a } x_o \text{ con } x < x_o \\ f \text{ estrictamente creciente en puntos } x \text{ próximos a } x_o \text{ con } x > x_o \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{c} f \text{ tiene en } x_o \text{ un} \\ \text{mínimo relativo estricto} \end{array}$$

Ejemplo 2: Calcular los extremos relativos de las funciones:

a) $f(x) = \ln(1 + x^2)$

El dominio de definición de esta función es $D = (-\infty, +\infty)$ ya que $1 + x^2 > 0$ para cualquier valor de x.

Para hallar los puntos críticos se calcula $f'(x) = \frac{2x}{1+x^2}$ que existe siempre y se anula en $x = 0$, luego este es el único punto crítico de f. Para determinar si $x = 0$ es extremo relativo o no, se puede proceder de las dos formas siguientes.

- Si se quiere aplicar la condición suficiente se tiene que hallar $f''(x) = \frac{2(1+x^2) - 2x.2x}{(1+x^2)^2} = \frac{-2x^2+2}{(1+x^2)^2}$ y como $f''(0) = 2 > 0$, se deduce que f tiene en $x = 0$ es un mínimo relativo estricto.

- Si se quiere estudiar el crecimiento y decrecimiento de f en las proximidades de $x = 0$, es necesario estudiar el signo de $f'(x) = \frac{2x}{1+x^2}$ antes y después del 0 como se indica en la tabla que sigue:

Signo	$(-\infty, 0)$	$(0, +\infty)$
$2x$	-	+
$1+x^2$	+	+
$f'(x)$	-	+
$f(x)$	$\downarrow$	$\uparrow$

En $x = 0$ la función cambia de estrictamente decreciente a estrictamente creciente, por lo tanto, f tiene un mínimo relativo en dicho punto.

b) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 7x + 9 & \text{si} \quad x < 1 \\ 3x & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$

Al estar definida la función de forma distinta antes y después de $x = 1$, se estudia f en cada uno de los dos intervalos en que se divide el dominio.

- En $(-\infty, 1)$, $f(x) = x^2 - 7x + 9$ y su derivada $f'(x) = 2x - 7$ se anula si $2x - 7 = 0$, es decir en $x = \frac{7}{2}$, valor que no se considera ya que esta fuera del intervalo considerado.
- En $(1, +\infty)$, $f(x) = 3x$ y su derivada $f'(x) = 3$ no se anula nunca.

Por lo tanto, el único candidato a ser extremo relativo es $x = 1$, punto en el que se comprueba fácilmente que es f continua. Para determinar si es extrmo, se estudia el crecimiento y decrecimiento de f en las proximidades de $x = 1$:

- si $x < 1$, $f'(x) = 2x - 7 < 0$, entonces f es estrictamente decreciente en $(-\infty, 1)$
- si $x > 1$, $f'(x) = 3 > 0$, entonces f es estrictamente creciente en $(1, +\infty)$

Por tanto, f tiene en $x = 1$ un mínimo relativo estricto.

Generalización de las condiciones suficientes

La condición suficiente de extremo relativo vista anteriormente no da información si $f''(x_o) = 0$. A continuación se enuncia una generalización de esta condición suficiente.

Si $f(x)$ es una función que tiene derivadas continuas hasta orden n en un punto $x_o \in D$ y $f'(x_o) = f''(x_o) = \ldots = f^{(n-1)}(x_o) = 0, f^{(n)}(x_o) \neq 0$, entonces:

$$n \text{ par y } \begin{cases} f^{(n)}(x_o) > 0 \;\Rightarrow\; \text{f tiene en } x_o \text{ un mínimo relativo estricto} \\ f^{(n)}(x_o) < 0 \;\Rightarrow\; \text{f tiene en } x_o \text{ un máximo relativo estricto} \end{cases}$$

$$n \text{ impar y } \begin{cases} f^{(n)}(x_o) > 0 & \Rightarrow \; f \text{ es estrictamente creciente en } x_o \\ f^{(n)}(x_o) < 0 & \Rightarrow \; f \text{ es estrictamente decreciente en } x_o \end{cases}$$

Ejemplo 3: Calcular los extremos relativos de la función $f(x) = x^4 + 5$

La derivada de la función es $f'(x) = 4x^3$ que se anula en $x = 0$.

La derivada segunda es $f''(x) = 12x^2$ y al sustituir $x = 0$ queda $f''(0) = 0$. Como esta derivada se anula la condición suficiente de extremo no nos da información y hay que aplicar la generalización de esta.

Para ello se halla la derivada tercera, $f'''(x) = 24x$, cuyo valor en $x = 0$ es $f'''(0) = 0$; que de nuevo no nos da información al ser nula. La derivada cuarta es $f^{(4)}(x) = 24$ que es positiva y n un número par, por tanto, f tiene en $x = 0$ un mínimo relativo estricto.