CONCAVIDAD, CONVEXIDAD Y PUNTOS DE INFLEXIÓN

Dada una función $y = f(x)$ y un punto $x_o \in D$ en el que la función es derivable, se dice que $f(x)$ es:

- **Cóncava** en x_o, si existe un entorno de x_o en el que la gráfica de f no queda por encima de la recta tangente a f en x_o, es decir, si $f(x) \le f(x_o) + f'(x_o)(x - x_o)$.

Si para $x \ne x_o$ la desigualdad anterior es estricta se dice que f es **estrictamente cóncava** en x_o.

- **Convexa** en x_o, si existe un entorno de x_o en el que la gráfica de f no queda por debajo de la recta tangente a f en x_o, es decir, si $f(x) \ge f(x_o) + f'(x_o)(x - x_o)$.

Si para $x \ne x_o$ la desigualdad anterior es estricta se dice que f es **estrictamente convexa** en x_o.

La función f tiene en $x_o \in D$ **un punto de inflexión** si f es estrictamente cóncava a la izquierda de x_o y estrictamente convexa a su derecha o viceversa.

Si f es derivable en un punto de inflexión x_o, entonces la recta tangente a f en dicho punto atraviesa a la gráfica de f en $\left(x_o, f(x_o)\right)$.

A continuación, se enuncian tres resultados que caracterizan la concavidad, convexidad y la existencia de puntos de inflexión para funciones derivables.

Proposición 1 (condiciones suficientes de concavidad y convexidad)

Si f es una función con derivada segunda continua en un punto x_o, se verifica :

a) $f''(x_o) > 0 \quad \Rightarrow \quad f$ es estrictamente convexa en x_o

b) $f''(x_o) < 0 \quad \Rightarrow \quad f$ es estrictamente cóncava en x_o

Proposición 2 (condición necesaria de punto de inflexión)

Si f es una función con derivada segunda continua en un punto x_o y f tiene en x_o un punto de inflexión, entonces $f''(x_o) = 0$.

Proposición 3 (condición suficiente de punto de inflexión)

Si f es una función con derivada tercera continua en un punto x_o y $f''(x_o) = 0$, se verifica:

$$f'''(x_o) \ne 0 \quad \Rightarrow \quad x_o \text{ es un punto de inflexión de } f$$

Nota: Entre los candidatos a puntos de inflexión, hay que tener en cuenta no sólo aquellos puntos que anulan $f''(x)$ sino también donde no existe.

Ejemplo 4: Estudiar la concavidad, convexidad y hallar los puntos de inflexión de las siguientes funciones.

a) $f(x) = \ln(1 + x^2)$

Su derivada segunda se ha calculado en el ejemplo 2a) y es $f''(x) = \dfrac{-2x^2 + 2}{(1 + x^2)^2}$.

Para realizar el estudio de su signo se factoriza únicamente el numerador ya que el denominador es siempre positivo quedando $f''(x) = \dfrac{2(1 - x^2)}{(1 + x^2)^2} = \dfrac{2(1 - x^2)}{(1 + x^2)^2} = \dfrac{2(1 - x)(1 + x)}{(1 + x^2)^2}$

El signo de esta expresión depende de los signos de (1 - x) y de (1 + x) que cambia en los puntos x = 1 y x = -1 respectivamente, como se observa en la siguiente tabla:

Signo	(-∞, -1)	(-1, 1)	(1, +∞)
1 - x	+	+	-
1 + x	-	+	+
$f''(x)$	-	+	-
$f(x)$	$\cap$	$\cup$	$\cap$

Luego en los intervalos (-∞, -1) y (1, +∞) la función es estrictamente cóncava y en (-1, 1) es estrictamente convexa. Además como $x = 1$ y $x = -1$ son puntos del dominio de *f* en los que cambia la concavidad-convexidad de la función, se tiene que son puntos de inflexión.

b) $f(x) = \sqrt[3]{2x-1}$

Calculamos sus derivadas de primer y segundo orden que son $f'(x) = \dfrac{2}{3\sqrt[3]{(2x-1)^2}}$ y $f''(x) = \dfrac{-4}{9\sqrt[3]{(2x-1)^5}}$. Como $f''(x) \neq 0$ sólo hay que considerar el punto $x = \dfrac{1}{2}$ del dominio en el que la función no es derivable, y estudiar el signo de $f''(x)$ antes y después de él.

En $\left(-\infty, \dfrac{1}{2}\right)$ se cumple que $f''(x) > 0$, luego f es estrictamente convexa y en $\left(\dfrac{1}{2}, +\infty\right)$ se cumple que $f''(x) < 0$, luego f es estrictamente cóncava. Por lo tanto, $x = \dfrac{1}{2}$ es un punto de inflexión de *f*.

Ejemplo 5: Hallar los puntos de inflexión de la función $f(x) = 3x^4 - 10x^3 - 12x^2 + 12$

Se calcula la derivada de segundo orden que es $f''(x) = 36x^2 - 60x - 24$ y los puntos donde se anula, obteniéndose

$$f''(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 36x^2 - 60x - 24 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 2 \ \text{ y } \ x = -\frac{1}{3}$$

Para comprobar la condición suficiente de punto de inflexión se halla la derivada tercera quedando $f'''(x) = 72x - 60$ cuyo valor en los puntos $x = 2$ y $x = -\dfrac{1}{3}$ es: $f'''(2) = 72.2 - 60 = 84 \neq 0$ y $f'''\left(-\dfrac{1}{3}\right) = 72\left(-\dfrac{1}{3}\right) - 60 = -84 \neq 0$. Por lo tanto, $x = 2$ y $x = -\dfrac{1}{3}$ son puntos de inflexión de *f*.

Las tres proposiciones anteriores se pueden generalizar en el siguiente resultado:

Si $f(x)$ es una función que tiene derivadas continuas hasta orden *n* en un punto $x_o \in D$ y $f''(x_o) = f'''(x_o) = \ldots = f^{(n-1)}(x_o) = 0, f^{(n)}(x_o) \neq 0$, entonces:

$$\text{Si } n \text{ es par y } \begin{cases} f^{(n)}(x_o) > 0 \ \Rightarrow \ f \text{ es estrictamente convexa en } x_o \\ f^{(n)}(x_o) < 0 \ \Rightarrow \ f \text{ es estrictamente cóncava en } x_o \end{cases}$$

Si *n es impar* $\Rightarrow$ x_o *es un punto de inflexión de f*

Ejemplo 6: Hallar los puntos de inflexión de la función $f(x) = -2x^5 + 7x - 1$

Se calcula la derivada de segundo orden, $f''(x) = -40x^3$ que únicamente se anula en $x = 0$.

Hallando la derivada tercera queda $f'''(x) = -120x^2$ cuyo valor en el punto $x = 0$ es $f'''(0) = 0$. Al ser cero esta derivada se calculan las derivadas siguientes en $x = 0$ hasta encontrar la primera que no se anule, obteniéndose:

$$f^{(4)}(x) = -240x \text{ cuyo valor en } x = 0 \text{ es } f^{(4)}(0) = 0$$
$$f^{(5)}(x) = -240 \text{ cuyo valor en } x = 0 \text{ es } f^{(5)}(0) = -240 \neq 0$$

Como la primera derivada no nula en $x = 0$ es de orden impar, $n = 5$, se concluye que $x = 0$ es punto de inflexión de *f*.