CONTROL FUNCIONES 2

1.- Estudia la continuidad de las siguientes funciones y clasifica las discontinuidades

a) $f(x) = \dfrac{x^2 - 9}{x^2 - 5x + 6}$

b) $g(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{si } x \leq 2 \\ x^2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

(3 puntos)

2.- Halla las asíntotas de la siguiente función y sitúa la curva respecto a cada una de ellas. $f(x) = \dfrac{2x^2 + 3x - 1}{x + 2}$ (2,5 puntos)

3.- Representa gráficamente de manera razonada una función y=f(x) que cumpla:

$\lim_{x \to -2^-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \to -2^+} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \to 1} f(x) = 2$, $f(1) = -3$ $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1$, $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 1$

(1,5 puntos)

4.- Calcula: (1,5 puntos)

a) $\lim_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^3 - 5x^2 + 11x - 10}$

b) $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{2x - x^2}{3x^2 + 5x - 1}$

5.- Contesta a las siguientes cuestiones: (1,5 puntos)

a) ¿Puede una función racional tener dos asíntotas verticales?¿Por qué?
b) ¿Puede una función racional tener una asíntota horizontal y una oblicua?¿Por qué?

Pon ejemplos

- **SOLUCIONES**

1) a) $f(x)=\dfrac{x^2-9}{x^2-5x+6}$ función racional, continua en su dominio

$x^2-5x+6=0 \Rightarrow \left\langle \begin{array}{l} x=2 \\ x=3 \end{array} \right. \Rightarrow$ continua en $R-\{2,3\}$

Veamos qué tipo de discontinuidades presenta en 2 y 3:

<u>En 2</u>: $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-9}{x^2-5x+6}=\dfrac{-5}{0}=\infty \Rightarrow \left\langle \begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{x^2-9}{x^2-5x+6}=\dfrac{-}{-}=+\infty \\ \lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{x^2-9}{x^2-5x+6}=\dfrac{-}{+}=-\infty \end{array} \right.$

En 2 tiene una discontinuidad de salto infinito (A.V. de ramas divergentes)

<u>En 3</u>: $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x^2-5x+6}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{(x-3)(x+3)}{(x-2)(x-3)}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x+3}{x-2}=6$

En 3 tiene una discontinuidad evitable (Ya que no existe f(3))

b) $g(x)=\begin{cases} x-1 & \text{si } x\le 2 \\ x^2 & \text{si } x>2 \end{cases}$ cada trozo es una función polinómica, luego es continuo, habrá que ver qué pasa en 2:

$f(2)=2-1=1 \left\langle \begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}(x-1)=2-1=1 \\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}(x^2)=2^2=4 \end{array} \right.$ $\Rightarrow$ No existe el límite en 2

tenemos, por tanto una discontinuidad en 2 de salto finito

2.- $f(x)=\dfrac{2x^2+3x-1}{x+2}$

Asíntotas verticales: $x+2=0 \Rightarrow x=-2$

$\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{2x^2+3x-1}{x+2}=\dfrac{13}{0}=\infty \left\langle \begin{array}{l} \lim\limits_{x\to -2^-}\dfrac{2x^2+3x-1}{x+2}=\dfrac{+}{-}=-\infty \\ \lim\limits_{x\to -2^+}\dfrac{2x^2+3x-1}{x+2}=\dfrac{+}{+}=+\infty \end{array} \right.$

A. Horizontales NO TIENE

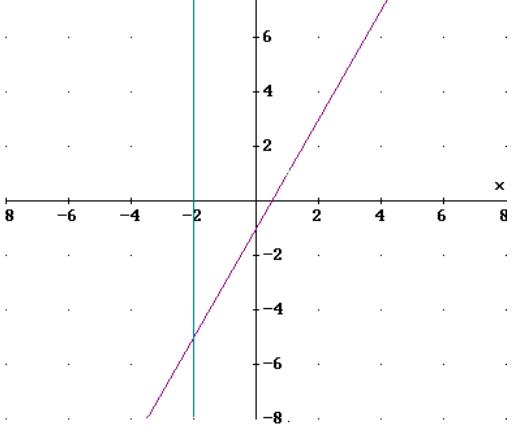
A. Oblicuas: Dividiendo tenemos que: $\dfrac{2x^2+3x-1}{x+2}=2x-1+\dfrac{1}{x+2}$

Con lo que, la asíntota oblicua es $y=2x-1$

Para ver cómo se sitúa la gráfica respecto de ésta asíntota, vemos el signo de $\dfrac{1}{x+2}$ para valores grandes de x (positivos y negativos)

para x=10000$\Rightarrow \dfrac{1}{x+2}>0$ lo que significa que la gráfica está por encima de la asíntota cuando $x\to+\infty$

para x=-10000$\Rightarrow \dfrac{1}{x+2}<0$ lo que significa



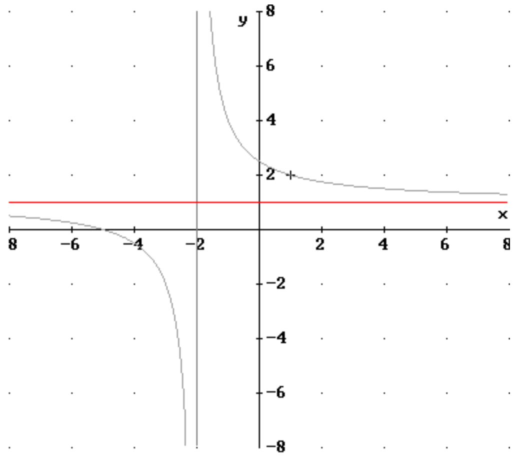
que la gráfica está por debajo de la asíntota cuando $x \to -\infty$

3.- $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 2$, $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 1$, $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = 1$

Vemos que:

- en -2 tiene una asíntota vertical de ramas divergentes
- y=1 es una asíntota horizontal, por la derecha y por la izquierda
- existe el límite en el punto 1 y vale 2, es decir, la curva se "acerca" al punto (1,2) (puede ser "pasando" por ese punto, o teniendo un "agujero", es decir, una discontinuidad evitable)

La gráfica, por tanto, puede ser algo así:



4.-

a) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^3 - 5x^2 + 11x - 10} = \dfrac{0}{0}$ (Factorizamos y nos queda:)

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^3 - 5x^2 + 11x - 10} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-1)(x-2)}{(x-2)(x^2 - 3x + 5)} = \lim_{x\to 2} \frac{x-1}{x^2 - 3x + 5} = \frac{1}{3}$$

b) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{2x - x^2}{3x^2 + 5x - 1} = \dfrac{-1}{3} = -\dfrac{1}{3}$ (polinomios del mismo grado, el límite es el cociente de los coeficientes de los términos de mayor grado)

5.- a) Si, ya que el denominador puede ser un polinomio con más de una raíz , por ejemplo: $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2 - 4}$ tiene dos asíntotas verticales: $x = 2; x = -2$

b)No, ya que para que tenga A. Horizontal tiene que ser el grado del polinomio numerador menor o igual que el del denominador y para que tenga oblicua justo lo contrario (incompatibles). Ejemplos:

$f(x) = \dfrac{x+1}{x^2 - 4}$ tiene asíntota horizontal $y = 0$ (imposible que tenga oblicua)

$f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x - 2}$ tiene una asíntota oblicua ya que el grado del numerador es una unidad mayor que el del denominador, y por lo mismo es imposible que tenga una asíntota horizontal.