

Examen de Matemáticas Ciencias Sociales I – 1º de Bachillerato

1. Dada la función: $f(x) = \begin{cases} \frac{x-4}{x} & \text{si } x < -2 \\ 2 & \text{si } x = -2 \\ -x+1 & \text{si } -2 < x \leq 2 \\ x^2+kx+3 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

- Estudiar la continuidad de f en el punto $x = -2$. **(0,5 puntos)**
 - Hallar el valor de k para que f sea continua en $x = 2$. **(1 punto)**
 - Para el valor de k hallado en el apartado anterior, representa gráficamente la función. **(1 punto)**
2. Dada la función $f(x) = x^3 - 3x + 2$:
- Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto $x = 0$. **(0,5 puntos)**
 - Halla los máximos y mínimos relativos, así como los intervalos donde la función crece y decrece. **(1 punto)**
 - Represéntala gráficamente. **(0,5 puntos)**
3. Calcular las derivadas de las siguientes funciones:
- $y = \frac{x^3}{\sqrt[3]{x}}$ **(0,5 puntos)**
 - $y = \sqrt{2x^3 + x^2 + 1}$ **(0,5 puntos)**
 - $y = \frac{\sqrt{1-x}}{4x-1}$ **(1 punto)**
4. Sea la función $f(x) = \frac{4x-3}{x^2-4x+3}$. Calcula:
- El dominio y los puntos de corte con los ejes. **(0,5 puntos)**
 - Las asíntotas. **(0,5 puntos)**
 - Los intervalos donde la función es estrictamente creciente y estrictamente decreciente. Hallar asimismo los máximos y mínimos relativos de la función. **(1,5 puntos)**
 - Representación gráfica. **(1 punto)**

① a) $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^-} \left(\frac{x-4}{x} \right) = 3$ } c)

$\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^+} (-x+1) = 3$

$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow -2} f(x) = 3 \neq f(-2) = 2 \Rightarrow$

f no es continua en $x = -2$;

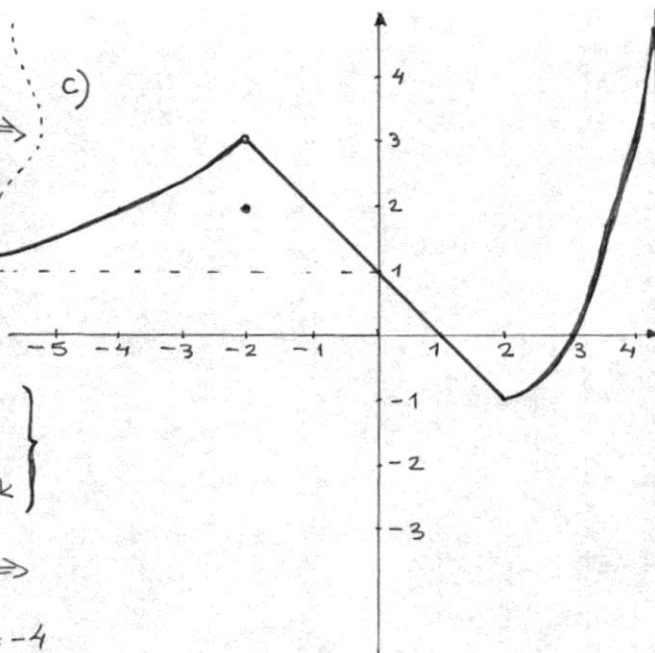
DISCONTINUIDAD EVITABLE

b) $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (-x+1) = -1$

$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (x^2 + kx + 3) = 7 + 2k$

$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = f(2) \Rightarrow$

$\Rightarrow -1 = 7 + 2k \Rightarrow -8 = 2k \Rightarrow \underline{k = -4}$



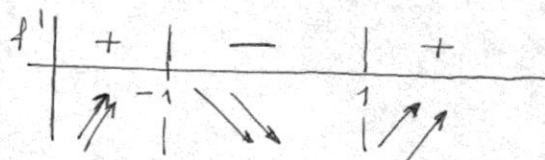
② a) $y - f(0) = f'(0)(x - 0)$; $f(0) = 0^3 - 3 \cdot 0 + 2 = 2$;

$f'(x) = 3x^2 - 3 \Rightarrow f'(0) = 3 \cdot 0^2 - 3 = -3$. Entonces la recta tangente en $x = 0$ es: $y - 2 = -3 \cdot x \Rightarrow \underline{y = -3x + 2}$

b) $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 1, x = -1$ (posibles extremos)

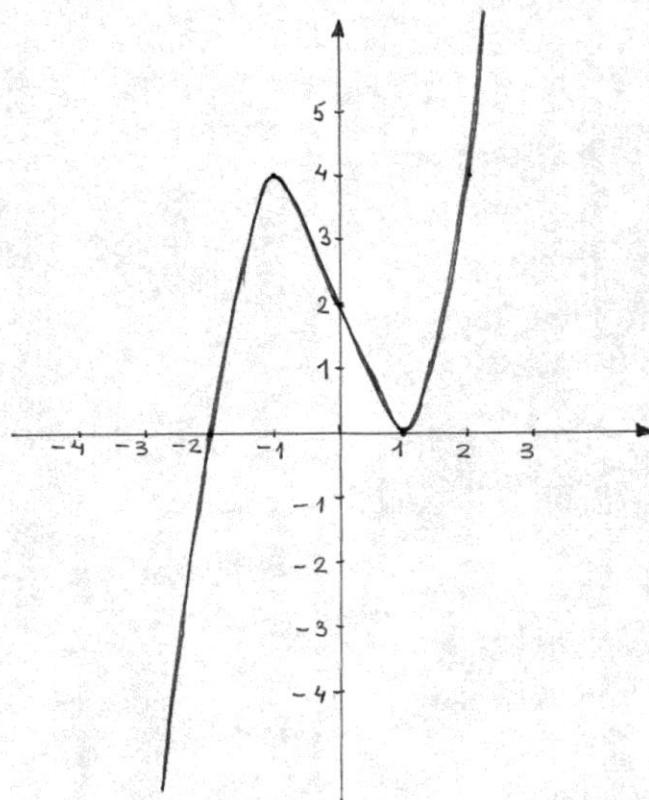
$f''(x) = 6x$; $f''(1) = 6 > 0 \Rightarrow \underline{x = 1 \text{ es un MÍNIMO RELATIVO: } (1, 0)}$

$f''(-1) = -6 < 0 \Rightarrow \underline{x = -1 \text{ es un MÁXIMO RELATIVO: } (-1, 4)}$



* f es Estrictamente CRECIENTE
en $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

* f es Estrictamente DECRECIENTE
en $(-1, 1)$



$$\textcircled{3} \text{ a) } y = \frac{x^3}{\sqrt[3]{x}} = \frac{x^3}{x^{1/3}} = x^{3-1/3} = x^{8/3};$$

$$y' = \frac{8}{3} x^{8/3-1} = \frac{8}{3} x^{5/3} = \frac{8 \sqrt[3]{x^5}}{3} = \frac{8 \times \sqrt[3]{x^2}}{3}$$

$$\text{b) } y' = \frac{1}{2\sqrt{2x^3+x^2+1}} \cdot (6x^2+2x) = \frac{6x^2+2x}{2\sqrt{2x^3+x^2+1}} = \frac{3x^2+x}{\sqrt{2x^3+x^2+1}}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } y' &= \frac{\frac{1}{2\sqrt{1-x}} \cdot (-1)(4x-1) - \sqrt{1-x} \cdot 4}{(4x-1)^2} = \frac{\frac{-4x+1}{2\sqrt{1-x}} - 4\sqrt{1-x}}{(4x-1)^2} = \\ &= \frac{\frac{-4x+1-8(1-x)}{2\sqrt{1-x}}}{(4x-1)^2} = \frac{4x-7}{2\sqrt{1-x}(4x-1)^2} \end{aligned}$$

$$\textcircled{4} \text{ a) } x^2-4x+3=0 \Rightarrow x=1; x=3$$

$$\Rightarrow \text{Dom } f = \mathbb{R} - \{1, 3\}$$

$$y=0 \Rightarrow 4x-3=0 \Rightarrow x=\frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{3}{4}, 0\right) \text{ punto de corte con el eje } X.$$

$$x=0 \Rightarrow y=-1 \Rightarrow (0, -1) \text{ punto de corte con el eje } Y.$$

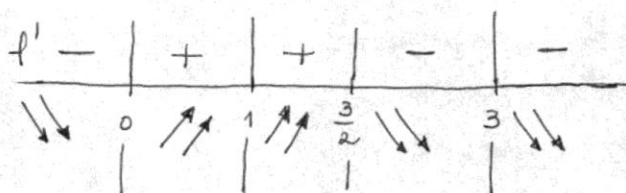
$$\text{b) } \left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} f(x) &= \infty \\ \lim_{x \rightarrow 3} f(x) &= \infty \end{aligned} \right\} \Rightarrow \underline{x=1, x=3} \text{ ASÍNTOTAS VERTICALES}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x-3}{x^2-4x+3} = 0 \Rightarrow \underline{y=0} \text{ ASÍNTOTA HORIZONTAL}$$

$$\text{c) } f'(x) = \frac{4(x^2-4x+3) - (4x-3)(2x-4)}{(x^2-4x+3)^2} =$$

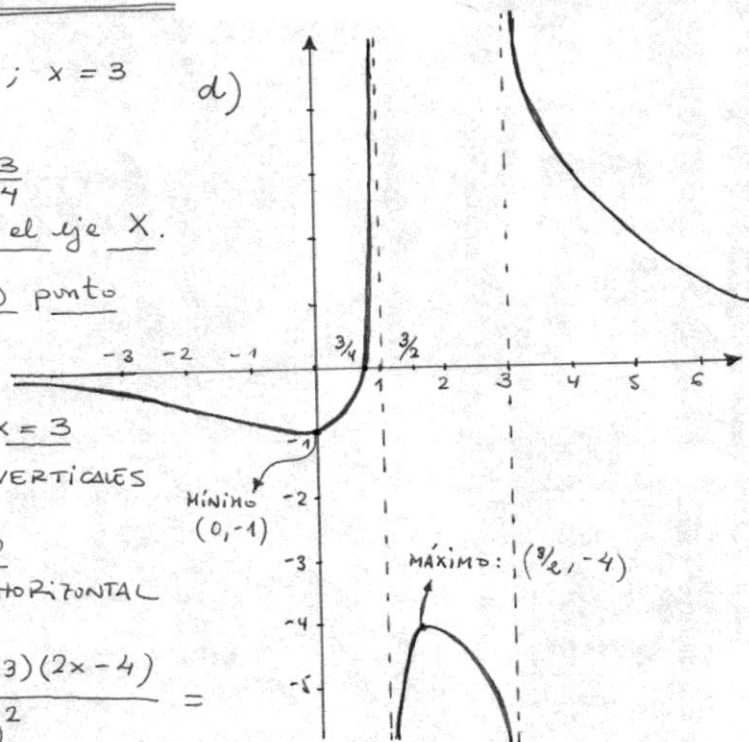
$$= \frac{4x^2-16x+12-8x^2+16x+6x-12}{(x^2-4x+3)^2} = \frac{-4x^2+6x}{(x^2-4x+3)^2} = \frac{x(-4x+6)}{(x^2-4x+3)^2}$$

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow x \cdot (-4x+6)=0 \Leftrightarrow x=0, x=\frac{3}{2} \text{ (posibles extremos)}$$



* f tiene un MÁXIMO RELATIVO en $x = \frac{3}{2} : \left(\frac{3}{2}, -4\right)$

d)



* f es ESTRICTAMENTE CRECIENTE en $(0, 1) \cup (1, 3/2)$

* f es ESTRICTAMENTE DECRECIENTE en $(-\infty, 0) \cup (3/2, 3) \cup (3, +\infty)$

* f tiene un MÍNIMO RELATIVO en $x=0 : (0, -1)$.