Examen de Matemáticas Ciencias Sociales I – 1º de Bachillerato

1. Dada la función $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x+1}{x} & \text{si} \quad x \le -1 \\ -x+1 & \text{si} \quad -1 < x < 2 \\ x^2 - 2x - 1 & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$

a) Estudia la continuidad de la función en los puntos $x = -1$ y $x = 2$. En el punto donde no sea continua explica el tipo de discontinuidad. **(1 punto)**

b) Estudia razonadamente, utilizando la definición, si la función tiene derivada o no tiene derivada en el punto $x = 2$. **(1,5 puntos)**

c) Representa gráficamente la función. **(1,5 puntos)**

2. Calcular las derivadas de las siguientes funciones utilizando las reglas de derivación: **(3 puntos, 1 por apartado)**

a) $y=\sqrt{x}(2x^2+1)$

b) $y=\dfrac{x^3-x^2+2}{x^3-1}$

c) $y=\dfrac{1-2x^2}{2\sqrt{x}}$

3. Dada la función $f(x) = -2x^3 - 2x^2 + x - 1$, hallar:

a) $f\ (-1)$, es decir, la derivada de la función en el punto $x = -1$. **(1 punto)**

b) Ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función f en el punto anterior, $x = -1$. **(1 punto)**

c) Ángulo que forma la recta anterior con el eje X. **(1 punto)**

I.E.S. "Fernando de Mena" ***Departamento de Matemáticas***

17 de mayo de 2006

Examen de Matemáticas CCSS I ***Curso: 1º de Bachillerato B+C***

Apellidos:	***Calificación:***
Nombre:	

1. Dada la función $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x+1}{x} & \text{si} \quad x \leq -1 \\ -x+1 & \text{si} \quad -1 < x < 2 \\ x^2 - 2x - 1 & \text{si} \quad x \geq 2 \end{cases}$

a) Estudia la continuidad de la función en los puntos x = –1 y x = 2. En el punto donde no sea continua explica el tipo de discontinuidad. **(1 punto)**

b) Estudia razonadamente, utilizando la definición, si la función tiene derivada o no tiene derivada en el punto x = 2. **(1,5 puntos)**

c) Representa gráficamente la función. **(1,5 puntos)**

a) $\boxed{x = -1}$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x+1}{x} = \dfrac{-1+1}{-1} = 0 \\ \lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to -1} (-x+1) = -(-1)+1 = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow \nexists \lim_{x \to -1} f(x)$$

pues los límites laterales son finitos y distintos. Hay una <u>discontinuidad de salto</u> de longitud $L = 2$.

$\boxed{x = 2}$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2} (-x+1) = -1 \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2} (x^2 - 2x - 1) = -1 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x \to 2} f(x) = -1.$$

$f(2) = 2^2 - 2 \cdot 2 - 1 = 4 - 4 - 1 = -1$.

Por tanto $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = -1 = f(2) \Rightarrow f$ <u>es continua en $x = 2$</u>.

b) Hemos de estudiar $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}$. Como f está definida de distinta manera a la izquierda y a la derecha de 2, estudiaremos los límites laterales:

* $\lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{-x+1-(-1)}{x-2} = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{-x+2}{x-2} =$

$= \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{-\cancel{(x-2)}}{\cancel{x-2}} = \underline{\underline{-1}}$

* $\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{x^2-2x-1-(-1)}{x-2} =$

$= \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2-2x}{x-2} = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x\cancel{(x-2)}}{\cancel{x-2}} = \lim\limits_{x \to 2} x = \underline{\underline{2}}$

Como los límites laterales son distintos, no existe $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}$ y por tanto f no tiene derivada en $x=2$ ($\nexists\, f'(2)$).

2. Calcular las derivadas de las siguientes funciones utilizando las reglas de derivación: **(3 puntos, 1 por apartado)**

a) $y=\sqrt{x}(2x^2+1)$

$$y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}(2x^2+1)+\sqrt{x}\cdot 4x=\frac{2x^2+1}{2\sqrt{x}}+4x\sqrt{x}=$$

$$\frac{2x^2+1}{2\sqrt{x}}+\frac{2\sqrt{x}\,4x\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}=\frac{2x^2+1}{2\sqrt{x}}+\frac{8x^2}{2\sqrt{x}}=$$

$$=\frac{10x^2+1}{2\sqrt{x}}$$

b) $y=\frac{x^3-x^2+2}{x^3-1}$

$$y'=\frac{(3x^2-2x)(x^3-1)-(x^3-x^2+2)3x^2}{(x^3-1)^2}=$$

$$=\frac{(3x^5-3x^2-2x^4+2x)-(3x^5-3x^4+6x^2)}{(x^3-1)^2}=$$

$$=\frac{x^4-9x^2+2x}{(x^3-1)^2}.$$

c) $y=\frac{1-2x^2}{2\sqrt{x}}$

$$y'=\frac{-4x\,2\sqrt{x}-(1-2x^2)\,2\,\frac{1}{2\sqrt{x}}}{(2\sqrt{x})^2}=\frac{-8x\sqrt{x}-\frac{1-2x^2}{\sqrt{x}}}{4x}=$$

$$=\frac{\frac{\sqrt{x}(-8x\sqrt{x})}{\sqrt{x}}-\frac{1-2x^2}{\sqrt{x}}}{4x}=\frac{\frac{-8x^2}{\sqrt{x}}-\frac{1-2x^2}{\sqrt{x}}}{4x}=$$

$$=\frac{-6x^2-1}{4x\sqrt{x}}$$

3. Dada la función $f(x) = -2x^3 - 2x^2 + x - 1$, hallar:

a) $f'(-1)$, es decir, la derivada de la función en el punto $x = -1$. **(1 punto)**

b) Ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función f en el punto anterior, $x = -1$. **(1 punto)**

c) Ángulo que forma la recta anterior con el eje X. **(1 punto)**

a) $f'(x) = -6x^2 - 4x + 1$. Por tanto

$f'(-1) = -6(-1)^2 - 4(-1) + 1 = -6 + 4 + 1 = -1$

$\Rightarrow \underline{\underline{f'(-1) = -1}}$

b) $y - f(-1) = f'(-1)(x - (-1)) \Rightarrow$

$y - (-2) = (-1)(x+1) \Rightarrow y + 2 = -x - 1$

$\Rightarrow \underline{\underline{y = -x - 3}}$

c) $\underline{f'(-1) = \operatorname{tg}\alpha = -1}$

$\Rightarrow \underline{\underline{\alpha = -45^\circ = 135^\circ}}$

Representación gráfica correspondiente al ejercicio 1