

Examen estadística bidimensional y probabilidad.**NOMBRE Y APELLIDOS:**

Ejercicio 1 (10 pts) Se observaron las edades de cinco niños/as y sus pesos respectivos, obteniéndose los siguientes resultados:

Edad, en años (X)	2	4.5	6	7.2	8
Peso, en kg (Y)	15	19	25	33	34

- a) (5 pts) Halla el coeficiente de correlación y las rectas de regresión de **Y** sobre **X** y de **X** sobre **Y**.
- b) (5 pts) ¿Qué peso corresponderá a un niño/a de 5 años? ¿Qué edad corresponderá a un peso de 36kg?

Ejercicio 2 (10 pts) En la biblioteca de seis ciudades se han analizado la afluencia de lectores **X** (expresadas en miles de personas) y el número de libros prestados **Y**, obteniéndose los siguientes datos:

X	0.5	1	1.3	1.7	2	2.5
Y	180	240	250	300	340	400

- a) (2 pts) ¿Cuál es el número medio de libros prestados en el conjunto de bibliotecas?
- b) (4 pts) Ajusta estos datos a una recta en la que obtener el número de libros prestados a partir del número de lectores que van a la biblioteca.
- c) (4 pts) Si acudiesen 1500 lectores a una biblioteca. ¿Cuántos libros se prestarían?

Ejercicio 3 (10 pts) Se lanzan dos monedas al aire. Si salen dos caras, se extrae una bola de una urna **I**, que contiene 2 bolas blancas y 3 negras. Si sale cara y cruz, se extrae una bola de una urna **II**, que contiene 4 bolas blancas y 1 negra. Si salen dos cruces, se extrae una bola de una urna **III**, que contiene 3 bolas blancas y 2 negras. ¿Cuál es la probabilidad de extraer bola blanca, después de lanzar las monedas y sacar la bola?

Ejercicio 4 (10 pts) En una clase hay 12 alumnos y 16 alumnas. El profesor saca a 4 a la pizarra.

- a) (5 pts) ¿Cuál es la probabilidad de que todas sean alumnas?
- b) (5 pts) ¿Cuál es la probabilidad de que todos sean alumnos?

Ejercicio 5 (10 pts) Un estudiante hace dos pruebas en un mismo día. La probabilidad de que pase la primera es 0.6, la probabilidad de que pase la segunda es 0.8 y la de que pase ambas es 0.5. Se pide:

- a) (2.5 pts) Probabilidad de que pase al menos una prueba.
- b) (2.5 pts) Probabilidad de que no pase ninguna prueba.
- c) (2.5 pts) ¿Son ambos sucesos independientes?
- d) (2.5 pts) Probabilidad de que pase la segunda prueba en caso de no haber superado la primera

Ejercicio 1 (10 pts) Se observaron las edades de cinco niños/as y sus pesos respectivos, obteniéndose los siguientes resultados:

Edad, en años (X)	2	4.5	6	7.2	8
Peso, en kg (Y)	15	19	25	33	34

- a) (5 pts) Halla el coeficiente de correlación y las rectas de regresión de **Y** sobre **X** y de **X** sobre **Y**.
- b) (5 pts) ¿Qué peso corresponderá a un niño/a de 5 años? ¿Qué edad corresponderá a un peso de 36kg?

Solución:

- a) Hacemos la tabla para facilitar los cálculos:

x_i	y_i	x_i^2	y_i^2	$x_i \cdot y_i$
2	15	4	225	30
4.5	19	20.25	361	85.5
6	25	36	625	150
7.2	33	51.84	1089	237.6
8	34	64	1156	272
27.7	126	176.1	3456	775.1

- Medias:

$$\begin{aligned}\bar{x} &= 5.54 \\ \bar{y} &= \frac{126}{5} = 25.2\end{aligned}$$

- Desviaciones Típicas:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= 2.128 \\ \sigma_y &= \frac{6\sqrt{39}}{5} = 7.494\end{aligned}$$

- Covarianza:

$$\sigma_{xy} = 15.41$$

- El coeficiente de correlación es:

$$r = \frac{6.037}{\sqrt{39}} = .9666$$

La recta de regresión de Y sobre X es:

$$y - 25.2 = 3.405(x - 5.54) \Rightarrow y = 3.405x + 6.337$$

- b) Para calcular el peso que corresponderá a un niño de 5 años, sustituimos en la recta de regresión calculada en el apartado anterior.

$$y = 3.405 \cdot 5 + 6.337 = 23.36 \text{ kg.}$$

Para calcular la edad que correspondería a un peso de 36 kg, tenemos que calcular la recta de regresión de X sobre Y . La recta de regresión de X sobre Y es:

$$x - 5.54 = .2744(y - 25.2) \Rightarrow x = .2744y - 1.376$$

Y ahora sustituimos:

$$x = .2744 \cdot 36 - 1.376 = 8.504 \text{ años}$$

Ejercicio 2 (10 pts) En la biblioteca de seis ciudades se han analizado la afluencia de lectores **X** (expresadas en miles de personas) y el número de libros prestados **Y**, obteniéndose los siguientes datos:

X	0.5	1	1.3	1.7	2	2.5
Y	180	240	250	300	340	400

- a) (2 pts) ¿Cuál es el número medio de libros prestados en el conjunto de bibliotecas?
- b) (4 pts) Ajusta estos datos a una recta en la que obtener el número de libros prestados a partir del número de lectores que van a la biblioteca.
- c) (4 pts) Si acudiesen 1500 lectores a una biblioteca. ¿Cuántos libros se prestarían?

Solución:

- a) Hacemos la tabla para facilitar los cálculos:

x_i	y_i	x_i^2	y_i^2	$x_i \cdot y_i$
0.5	180	0.25	32400	90.0
1	240	1	57600	240
1.3	250	1.69	62500	325.0
1.7	300	2.89	90000	510.0
2	340	4	115600	680
2.5	400	6.25	160000	1000.
9.0	1710	16.08	518100	2845.

- Medias:

$$\bar{x} = 1.5$$

$$\bar{y} = 285$$

- Desviaciones Típicas:

$$\sigma_x = .6557$$

$$\sigma_y = 5 \sqrt{205} = 71.59$$

- Covarianza:

$$\sigma_{xy} = 46.67$$

- El coeficiente de correlación es:

$$r = \frac{14.23}{\sqrt{205}} = .9941$$

La respuesta al primer apartado es $\bar{y} =$

$$\bar{y} = 285 \text{ libros.}$$

- b) Para ajustar estos datos a una recta en la que obtener el número de libros prestado a partir del número de lectores que van a la biblioteca, calculamos la recta de regresión de Y sobre X:

$$y - 285.0 = 108.5(x - 1.5) \Rightarrow y = 108.5x + 122.2$$

- c) Para calcular cuántos libros se prestarían si acudiesen 1500 lectores, sustituimos en la recta de regresión del apartado anterior, pero 1500 lo dividimos entre 1000, ya que X está expresado en miles de personas, quedándonos 1,5

$$y = 108.5 \cdot 1,5 + 122.2 = 285.0 \text{ libros.}$$

Ejercicio 3 (10 pts) Se lanzan dos monedas al aire. Si salen dos caras, se extrae una bola de una urna **I**, que contiene 2 bolas blancas y 3 negras. Si sale cara y cruz, se extrae una bola de una urna **II**, que contiene 4 bolas blancas y 1 negra. Si salen dos cruces, se extrae una bola de una urna **III**, que contiene 3 bolas blancas y 2 negras. ¿Cuál es la probabilidad de extraer bola blanca, después de lanzar las monedas y sacar la bola?

Solución: Al suceso extraer bola blanca después de lanzar las monedas y sacar la bola, lo llamamos A , por lo que nos queda:

$$\begin{aligned} P(A) &= P(2 \text{ caras}) \cdot P(\text{Blanca/urna I}) + P(\text{cara y cruz}) \cdot P(\text{Blanca/urna II}) + \\ &+ P(2 \text{ cruces}) \cdot P(\text{Blanca/urna III}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5} = \frac{13}{20} = 0.65 \end{aligned}$$

Ejercicio 4 (10 pts) En una clase hay 12 alumnos y 16 alumnas. El profesor saca a 4 a la pizarra.

a) (5 pts) ¿Cuál es la probabilidad de que todas sean alumnas?

b) (5 pts) ¿Cuál es la probabilidad de que todos sean alumnos?

Solución:

a) Llamamos A al suceso que todas sean alumnas, entonces:

$$P(A) = \frac{16}{28} \cdot \frac{15}{27} \cdot \frac{14}{26} \cdot \frac{13}{25} = \frac{4}{45} = .08889$$

b) Llamamos B al suceso que todos sean alumnos, nos queda:

$$P(B) = \frac{12}{28} \cdot \frac{11}{27} \cdot \frac{10}{26} \cdot \frac{9}{25} = \frac{11}{455} = .02418$$

Ejercicio 5 (10 pts) Un estudiante hace dos pruebas en un mismo día. La probabilidad de que pasa la primera es 0.6, la probabilidad de que pase la segunda es 0.8 y la de que pase ambas es 0.5. Se pide:

- a) (2.5 pts) Probabilidad de que pase al menos una prueba.
- b) (2.5 pts) Probabilidad de que no pase ninguna prueba.
- c) (2.5 pts) ¿Son ambos sucesos independientes?
- d) (2.5 pts) Probabilidad de que pase la segunda prueba en caso de no haber superado la primera

Solución:

- a) Si llamamos A al suceso pasar la primera prueba y B al suceso pasar la segunda prueba, el suceso que pase al menos una prueba es:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,6 + 0,8 - 0,5 = 0.9$$

- b) Al suceso que no pase ninguna prueba lo llamamos C , este suceso es el complementario de que pase alguna prueba, por lo que:

$$P(C) = 1 - P(\overline{C}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - 0.9 = 0.1$$

- c) Para ver si los sucesos son independientes, calculamos:

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= 0,5 \\ P(A) \cdot P(B) &= 0,6 \cdot 0,8 = 0.48 \\ \Rightarrow P(A \cap B) &\neq P(A) \cdot P(B) \end{aligned}$$

Como conclusión decimos que no son independientes.

- d) Para calcular la probabilidad de que pase la segunda prueba y no la primera es:

$$P(B/\overline{A}) = \frac{P(B \cap \overline{A})}{P(\overline{A})} = \frac{P(B) - P(B \cap A)}{1 - P(A)} = \frac{0,8 - 0,5}{1 - 0,6} = 0.75$$

Nota: Cada error de cálculo en cada una de las actividades restará 0.5 puntos. La nota final resultará de la correspondiente proporción sobre 50 puntos.