

CUADERNILLO DE RECUPERACIÓN 1º BACHILLERATO

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES

TEMA 1: NÚMEROS REALES

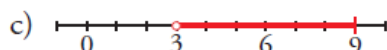
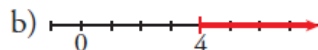
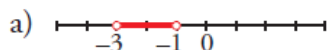
3. Representa los siguientes conjuntos:

a) $(-3, -1)$

b) $[4, +\infty)$

c) $(3, 9]$

d) $(-\infty, 0)$



1. Simplifica:

a) $\sqrt[12]{x^9}$

b) $\sqrt[12]{x^8}$

c) $\sqrt[5]{y^{10}}$

d) $\sqrt[6]{8}$

e) $\sqrt[9]{64}$

f) $\sqrt[8]{81}$

a) $\sqrt[12]{x^9} = \sqrt[4]{x^3}$

b) $\sqrt[12]{x^8} = \sqrt[3]{x^2}$

c) $\sqrt[5]{y^{10}} = y^2$

d) $\sqrt[6]{8} = \sqrt[6]{2^3} = \sqrt{2}$

e) $\sqrt[9]{64} = \sqrt[9]{2^6} = \sqrt[3]{2^2} = \sqrt[3]{4}$

f) $\sqrt[8]{81} = \sqrt[8]{3^4} = \sqrt{3}$

5. Reduce:

a) $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[5]{2}$

b) $\sqrt[3]{9} \cdot \sqrt[6]{3}$

c) $\sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[8]{2}$

d) $\sqrt[4]{8} \cdot \sqrt[3]{4}$

a) $\sqrt[15]{2^5} \cdot \sqrt[15]{2^3} = \sqrt[15]{2^8}$

b) $\sqrt[6]{3^4} \cdot \sqrt[6]{3} = \sqrt[6]{3^5}$

c) $\sqrt[8]{2^4} \cdot \sqrt[8]{2^2} \cdot \sqrt[8]{2} = \sqrt[8]{2^7}$

d) $\sqrt[12]{8^3} \cdot \sqrt[12]{4^4} = \sqrt[12]{(2^3)^3 \cdot (2^2)^4} = \sqrt[12]{2^{17}} = 2\sqrt[12]{2^5}$

10. Racionaliza denominadores y simplifica cuando puedas:

a) $\frac{1}{\sqrt{2} + 1}$

b) $\frac{x + y}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}$

c) $\frac{a - 1}{\sqrt{a} - 1}$

d) $\frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{\sqrt{x} - \sqrt{y}}$

a) $\frac{\sqrt{2} - 1}{(\sqrt{2} + 1)(\sqrt{2} - 1)} = \frac{\sqrt{2} - 1}{2 - 1} = \sqrt{2} - 1$

b) $\frac{(x + y)(\sqrt{x} - \sqrt{y})}{(\sqrt{x} + \sqrt{y})(\sqrt{x} - \sqrt{y})} = \frac{(x + y)(\sqrt{x} - \sqrt{y})}{x - y} = \frac{x\sqrt{x} - x\sqrt{y} + y\sqrt{x} - y\sqrt{y}}{x - y}$

c) $\frac{(a - 1)(\sqrt{a} + 1)}{(\sqrt{a} - 1)(\sqrt{a} + 1)} = \frac{(a - 1)(\sqrt{a} + 1)}{(a - 1)} = \sqrt{a} + 1$

d) $\frac{(\sqrt{x} + \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y})}{(\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} - \sqrt{y})} = \frac{x + y + 2\sqrt{xy}}{x - y}$

4. Sabiendo que $\log_5 A = 1,8$ y $\log_5 B = 2,4$, calcula:

a) $\log_5 \sqrt[3]{\frac{A^2}{25B}}$

b) $\log_5 \frac{5\sqrt{A^3}}{B^2}$

a) $\log_5 \sqrt[3]{\frac{A^2}{25B}} = \frac{1}{3} [2 \log_5 A - \log_5 25 - \log_5 B] = \frac{1}{3} [2 \cdot 1,8 - 2 - 2,4] = \frac{-0,8}{3} \approx -0,27$

b) $\log_5 \frac{5\sqrt{A^3}}{B^2} = \log_5 5 + \frac{3}{2} \log_5 A - 2 \log_5 B = 1 + \frac{3}{2} \cdot 1,8 - 2 \cdot 2,4 = 1 + 2,7 - 4,8 = -1,1$

Simplifica, utilizando las propiedades de las potencias:

a) $\frac{3^6 \cdot 2^5 \cdot 5^2}{9^3 \cdot 4^3 \cdot 5}$

b) $\frac{3^4 \cdot 16 \cdot 9^{-1}}{5^{-1} \cdot 3^5}$

c) $\frac{15^2 \cdot 8^{-1}}{6^3 \cdot 10^2}$

d) $\frac{a^{-3} b^{-4} c^7}{a^{-5} b^2 c^{-1}}$

a) $\frac{3^6 \cdot 2^5 \cdot 5^2}{3^6 \cdot 2^6 \cdot 5} = \frac{5}{2}$

b) $\frac{3^4 \cdot 2^4 \cdot 3^{-2}}{5^{-1} \cdot 3^5} = \frac{2^4 \cdot 5}{3^3} = \frac{80}{27}$

c) $\frac{3^2 \cdot 5^2 \cdot 2^{-3}}{2^3 \cdot 3^3 \cdot 2^2 \cdot 5^2} = \frac{1}{2^8 \cdot 3} = \frac{1}{768}$

d) $\frac{c^7 a^5 c}{a^3 b^4 b^2} = \frac{a^2 c^8}{b^6}$

Calcula y simplifica:

a) $5\sqrt{125} + 6\sqrt{45} - 7\sqrt{20} + \frac{3}{2}\sqrt{80}$

b) $\sqrt[3]{16} + 2\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{54} - \frac{21}{5}\sqrt[3]{250}$

c) $\sqrt{125} + \sqrt{54} - \sqrt{45} - \sqrt{24}$

d) $(\sqrt{2} + \sqrt{3})(\sqrt{6} - 1)$

a) $25\sqrt{5} + 18\sqrt{5} - 14\sqrt{5} + 6\sqrt{5} = 35\sqrt{5}$

b) $2\sqrt[3]{2} + 2\sqrt[3]{2} - 3\sqrt[3]{2} - 21\sqrt[3]{2} = -20\sqrt[3]{2}$

c) $5\sqrt{5} + 3\sqrt{6} - 3\sqrt{5} - 2\sqrt{6} = 2\sqrt{5} + \sqrt{6}$

d) $\sqrt{12} - \sqrt{2} + \sqrt{18} - \sqrt{3} = 2\sqrt{3} - \sqrt{2} + 3\sqrt{2} - \sqrt{3} = \sqrt{3} + 2\sqrt{2}$

Expresa en forma de intervalo en cada caso:

a) $|x| \geq 8$

b) $|x - 4| < 5$

a) $(-\infty, -8] \cup [8, +\infty)$

b) $(-1, 9)$

Reduce:

$\sqrt{63} - 2\sqrt{28} + \sqrt{175}$

$\sqrt{63} - 2\sqrt{28} + \sqrt{175} = \sqrt{3^2 \cdot 7} - 2\sqrt{2^2 \cdot 7} + \sqrt{5^2 \cdot 7} = 3\sqrt{7} - 4\sqrt{7} + 5\sqrt{7} = 4\sqrt{7}$

TEMA 2: POLINOMIOS

1. Aplica la regla de Ruffini para calcular el cociente y el resto de las siguientes divisiones de polinomios:

a) $(x^3 - 3x^2 + 2x + 4) : (x + 1)$

b) $(5x^5 + 14x^4 - 5x^3 - 4x^2 + 5x - 2) : (x + 3)$

c) $(2x^3 - 15x - 8) : (x - 3)$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -3 & 2 & 4 \\ -1 & & -1 & 4 & -6 \\ \hline & 1 & -4 & 6 & -2 \end{array}$$

Cociente: $x^2 - 4x + 6$

Resto: -2

$$\begin{array}{r|rrrrrrr} & 5 & 14 & -5 & -4 & 5 & -2 \\ -3 & & -15 & 3 & 6 & -6 & 3 \\ \hline & 5 & -1 & -2 & 2 & -1 & 1 \end{array}$$

Cociente: $5x^4 - x^3 - 2x^2 + 2x - 1$

Resto: 1

$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & 0 & -15 & -8 \\ 3 & & 6 & 18 & 9 \\ \hline & 2 & 6 & 3 & 1 \end{array}$$

Cociente: $2x^2 + 6x + 3$

Resto: 1

1. Descompón en factores este polinomio: $x^4 - 4x^3 + 7x^2 - 12x + 12$

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & -4 & 7 & -12 & 12 \\ 2 & & 2 & -4 & 6 & -12 \\ \hline & 1 & -2 & 3 & -6 & 0 \\ 2 & & 2 & 0 & 6 & \\ \hline & 1 & 0 & 3 & 0 & \end{array}$$

$$x^4 - 4x^3 + 7x^2 - 12x + 12 = (x - 2)^2 (x^2 + 3)$$

1. Simplifica:

a) $\frac{x^3 - 4x}{x^2 - 2x}$

b) $\frac{4x - 12}{x^3 - 7x^2 + 16x - 12}$

c) $\frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + 2x - 3}$

d) $\frac{x^4}{x^3 + 3x^2}$

a) $\frac{x^3 - 4x}{x^2 - 2x} = \frac{x(x^2 - 4)}{x(x - 2)} = \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \frac{(x + 2)(x - 2)}{(x - 2)} = x + 2$

b)
$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -7 & 16 & -12 \\ 3 & & 3 & -12 & 12 \\ \hline & 1 & -4 & 4 & 0 \end{array}$$

$$\frac{4x - 12}{x^3 - 7x^2 + 16x - 12} = \frac{4(x - 3)}{(x - 3)(x^2 - 4x + 4)} = \frac{4}{x^2 - 4x + 4}$$

c)
$$\frac{-2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2} \begin{cases} \frac{-2 + 4}{2} = 1 \\ \frac{-2 - 4}{2} = -3 \end{cases}$$

$$\frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + 2x - 3} = \frac{(x - 1)^2}{(x - 1)(x + 3)} = \frac{x - 1}{x + 3}$$

d) $\frac{x^4}{x^3 + 3x^2} = \frac{x^2 \cdot x^2}{x^2(x + 3)} = \frac{x^2}{x + 3}$

TEMA 3 ECUACIONES E INECUACIONES

1. Resuelve las ecuaciones siguientes:

a) $x^4 - x^2 - 12 = 0$

b) $x^4 - 8x^2 - 9 = 0$

a) $x^2 = \frac{1 \pm \sqrt{1+48}}{2} = \frac{1 \pm 7}{2} \begin{cases} 4 \rightarrow x = \pm 2 \\ -3 \rightarrow \text{(no vale)} \end{cases} \quad 2 \text{ y } -2$

b) $x^2 = \frac{8 \pm \sqrt{64+36}}{2} = \frac{8 \pm 10}{2} \begin{cases} 9 \rightarrow x = \pm 3 \\ -1 \rightarrow \text{(no vale)} \end{cases} \quad 3 \text{ y } -3$

3. Resuelve:

a) $-\sqrt{2x-3} + 1 = x$

b) $\sqrt{2x-3} - \sqrt{x+7} = 4$

c) $2 + \sqrt{x} = x$

d) $2 - \sqrt{x} = x$

e) $\sqrt{3x+3} - 1 = \sqrt{8-2x}$

a) $1 - x = \sqrt{2x-3}$

$1 + x^2 - 2x = 2x - 3; x^2 - 4x + 4 = 0; x = 2 \text{ (no vale)}$

No tiene solución.

b) $2x - 3 = 16 + x + 7 + 8\sqrt{x+7}$

$x - 26 = 8\sqrt{x+7}$

$x^2 + 676 - 52x = 64(x+7)$

$x^2 + 676 - 52x = 64x + 448$

$x^2 - 116x + 228 = 0; x = \frac{116 \pm 112}{2} \begin{cases} 114 \\ 2 \end{cases} \rightarrow \text{(no vale)}$

$x = 114$

c) $\sqrt{x} = x - 2; x = x^2 + 4 - 4x; 0 = x^2 - 5x + 4$

$x = \frac{5 \pm \sqrt{25-16}}{2} = \frac{5 \pm 3}{2} \begin{cases} 4 \\ 1 \end{cases} \rightarrow \text{(no vale)}$

$x = 4$

d) $2 - x = \sqrt{x}; 4 + x^2 - 4x = x; x^2 - 5x + 4 = 0$

$x = \begin{cases} 4 \\ 1 \end{cases} \rightarrow \text{(no vale)}$

$x = 1$

e) $\sqrt{3x+3} - 1 = \sqrt{8-2x}$

$3x + 3 = 1 + 8 - 2x + 2\sqrt{8-2x}$

$5x - 6 = 2\sqrt{8-2x}$

$25x^2 + 36 - 60x = 4(8-2x)$

$25x^2 - 52x + 4 = 0$

$x = \frac{52 \pm 48}{50} \begin{cases} x = 2 \\ x = 0,08 \end{cases} \rightarrow \text{no vale}$

Así, $x = 2$.

1. Reconoce como escalonados y resuelve:

$$a) \begin{cases} x = 7 \\ 2x - 3y = 8 \\ 3x + y - z = 12 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} 3x + 4y = 0 \\ 2y = -6 \\ 5x + y - z = 17 \end{cases}$$

$$a) \begin{cases} x = 7 \\ 2x - 3y = 8 \\ 3x + y - z = 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 7 \\ y = \frac{2x-8}{3} = 2 \\ z = 3x + y - 12 = 21 + 2 - 12 = 11 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 7 \\ y = 2 \\ z = 11 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} 3x + 4y = 0 \\ 2y = -6 \\ 5x + y - z = 17 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{-6}{2} = -3 \\ x = \frac{-4y}{3} = 4 \\ z = 5x + y - 17 = 20 - 3 - 17 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = -3 \\ z = 0 \end{cases}$$

3. Resuelve por el método de Gauss:

$$a) \begin{cases} x + y + z = 2 \\ x - y + z = 6 \\ x - y - z = 0 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} 2x + 3y = 14 \\ x - 2y + z = -3 \\ 2x - y - z = 9 \end{cases}$$

$$a) \begin{cases} x + y + z = 2 \\ x - y + z = 6 \\ x - y - z = 0 \end{cases} \xrightarrow{\begin{matrix} 1.^\circ \\ 2.^\circ + 1.^\circ \\ 3.^\circ + 1.^\circ \end{matrix}} \begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2x + 2z = 8 \\ 2x + z = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 2 \\ x + z = 4 \\ x = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 1 \\ z = 4 - x = 3 \\ y = 2 - x - z = 2 - 1 - 3 = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \\ z = 3 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} 2x + 3y = 14 \\ x - 2y + z = -3 \\ 2x - y - z = 9 \end{cases} \xrightarrow{\begin{matrix} 1.^\circ \\ 2.^\circ \\ 3.^\circ + 2.^\circ \end{matrix}} \begin{cases} 2x + 3y = 14 \\ x - 2y + z = -3 \\ 3x - 3y = 6 \end{cases} \xrightarrow{\begin{matrix} 1.^\circ \\ 2.^\circ \\ 3.^\circ + 1.^\circ \end{matrix}} \begin{cases} 2x + 3y = 14 \\ x - 2y + z = -3 \\ 5x = 20 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{20}{5} = 4 \\ y = \frac{14 - 2x}{3} = 2 \\ z = -3 - x + 2y = -3 - 4 + 4 = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 2 \\ z = -3 \end{cases}$$

4. Resuelve:

$$a) \begin{cases} 5x - 4y + 3z = 9 \\ 2x + y - 2z = 1 \\ 4x + 3y + 4z = 1 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} 2x - 5y + 4z = -1 \\ 4x - 5y + 4z = 3 \\ 5x - 3z = 13 \end{cases}$$

$$\text{a) } \begin{cases} 5x - 4y + 3z = 9 \\ 2x + y - 2z = 1 \\ 4x + 3y + 4z = 1 \end{cases} \xrightarrow{\begin{matrix} 1.^a + 4 \cdot 2.^a \\ 2.^a \\ 3.^a - 3 \cdot 2.^a \end{matrix}} \begin{cases} 13x & - & 5z = 13 \\ 2x + y - 2z = 1 \\ -2x & + & 10z = -2 \end{cases} \xrightarrow{\begin{matrix} 2 \cdot 1.^a + 3.^a \\ 2.^a \\ 3.^a : 2 \end{matrix}}$$

$$\begin{cases} 24x & = & 24 \\ 2x + y - 2z = 1 \\ -x & + & 5z = -1 \end{cases} \left\{ \begin{array}{l} x = 1 \\ z = \frac{-1+x}{5} = 0 \\ y = 1 - 2x + 2z = -1 \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} x = 1 \\ y = -1 \\ z = 0 \end{array} \right.$$

$$\text{b) } \begin{cases} 2x - 5y + 4z = -1 \\ 4x - 5y + 4z = 3 \\ 5x & - & 3z = 13 \end{cases} \xrightarrow{\begin{matrix} 1.^a \\ 2.^a - 1.^a \\ 3.^a \end{matrix}} \begin{cases} 2x - 5y + 4z = -1 \\ 2x & = & 4 \\ 5x & - & 3z = 13 \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x = 2 \\ z = \frac{5x-13}{3} = -1 \\ y = \frac{2x+4z+1}{5} = \frac{1}{5} \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} x = 2 \\ y = \frac{1}{5} \\ z = -1 \end{array} \right.$$

1. Resuelve estas inecuaciones:

a) $3x - 2 \leq 10$

b) $x - 2 > 1$

c) $2x + 5 \geq 6$

d) $3x + 1 \leq 15$

a) $3x - 2 \leq 10 \rightarrow 3x \leq 12 \rightarrow x \leq 4$

b) $x - 2 > 1 \rightarrow x > 3$

Soluciones: $\{x / x \leq 4\} = (-\infty, 4]$

Soluciones: $\{x / x > 3\} = (3, +\infty)$

c) $2x + 5 \geq 6 \rightarrow 2x \geq 1 \rightarrow x \geq \frac{1}{2}$

d) $3x + 1 \leq 15 \rightarrow 3x \leq 14 \rightarrow x \leq \frac{14}{3}$

Soluciones: $\left\{x / x \geq \frac{1}{2}\right\} = \left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$

Soluciones: $\left\{x / x \leq \frac{14}{3}\right\} = \left(-\infty, \frac{14}{3}\right]$

- 69** Las dos cifras de un número suman 12. Si se in-vierte el orden de las mis-mas, se obtiene un número 18 unidades mayor. Calcula dicho nú-mero.

$$\left. \begin{array}{l} x + y = 12 \\ 10y + x = 18 + 10x + y \end{array} \right\} \begin{array}{l} x = 5 \\ y = 7 \end{array}$$

Es el número 57.

- 65** Para la calificación de un curso, se decide que la primera evaluación cuente un 25%, la segunda, un 35%, y la tercera, un 40%. Una alumna ha tenido un 5 en la primera y un 7 en la segunda. ¿Qué nota tiene que conseguir en la tercera para que su calificación final sea 7?

$$0,25 \cdot 5 + 0,35 \cdot 7 + 0,40 \cdot x = 7$$

$$0,40x = 3,3$$

$$x = 8,25$$

Ha de conseguir un 8,25.

TEMA 4 : FUNCIONES ELEMENTALES

1. Halla el dominio de definición de las siguientes funciones:

a) $y = x^3 - x^2$

b) $y = \frac{3x}{(2x-6)^2}$

c) $y = \sqrt{4-2x}$

d) $y = \sqrt{5x-x^2}$

a) Al ser una función polinómica, su dominio es todo $\mathbb{R}$.

b) Su dominio es todo $\mathbb{R}$, salvo los puntos que anulan el denominador.

$$(2x-6)^2 = 0 \rightarrow 2x-6 = 0 \rightarrow x = 3$$

Por tanto: $Dom\ y = \mathbb{R} - \{3\}$

c) Su dominio son los puntos que hacen que el radicando no sea negativo.

$$4-2x \geq 0 \rightarrow 2x \leq 4 \rightarrow x \leq \frac{4}{2} = 2$$

Por tanto: $Dom\ y = (-\infty, 2]$

d) Al igual que en el apartado anterior:

$$5x-x^2 \geq 0 \rightarrow x(5-x) \geq 0$$

Esto ocurre si:

- $x \geq 0$ y $5-x \geq 0 \rightarrow x \geq 0$ y $x \leq 5 \rightarrow x \in [0, 5]$
- $x \geq 0$ y $5-x \leq 0 \rightarrow x \leq 0$ y $x \geq 5 \rightarrow$ Esto no es posible.

Por tanto: $Dom\ y = [0, 5]$

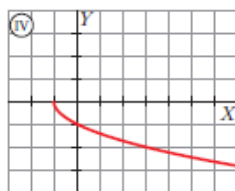
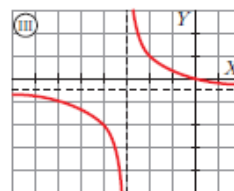
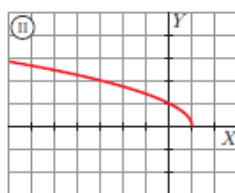
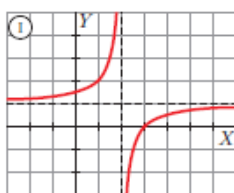
2. Asocia a cada una de las gráficas una de las siguientes expresiones:

a) $y = \sqrt{1-x}$

b) $y = \frac{-x}{2x+6}$

c) $y = -\sqrt{x+1}$

d) $y = \frac{x-3}{x-2}$



- a) II
b) III
c) IV
d) I

TEMA 5: LÍMITES Y CONTINUIDAD

1. Calcula el valor de los siguientes límites:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3}{x-2}$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x - 1)$

a) $-\frac{3}{2}$

b) 0

2. Calcula estos límites:

a) $\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{x^2 - 3x + 5}$

b) $\lim_{x \rightarrow 0,1} \log_{10} x$

a) $\sqrt{3}$

b) -1

3. Calcula k para que la función $y = f(x)$ sea continua en $\mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - 2x + k, & x \neq 3 \\ 7, & x = 3 \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 3} (x^3 - 2x + k) = 21 + k \\ f(3) = 7 \end{array} \right\} 21 + k = 7 \rightarrow k = -14$$

1. Di el valor del límite cuando $x \rightarrow +\infty$ de las siguientes funciones:

a) $f(x) = -x^2 + 3x + 5$

b) $f(x) = 5x^3 + 7x$

c) $f(x) = x - 3x^4$

d) $f(x) = \frac{1}{3x}$

e) $f(x) = -\frac{1}{x^2}$

f) $f(x) = \frac{x^3 - 1}{-5}$

a) $-\infty$

b) $+\infty$

c) $-\infty$

d) 0

e) 0

f) $-\infty$

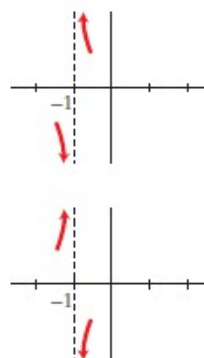
1. Halla las asíntotas verticales y sitúa la curva respecto a ellas:

a) $y = \frac{x^2 + 3x + 11}{x + 1}$

b) $y = \frac{x^2 + 3x}{x + 1}$

a) $\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = +\infty \end{array} \right\} x = -1 \text{ es asíntota vertical.}$

b) $\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -\infty \end{array} \right\} x = -1 \text{ es asíntota vertical.}$



4. Halla las ramas infinitas, $x \rightarrow +\infty$, de estas funciones. Sitúa la curva respecto a sus asíntotas, si las hay:

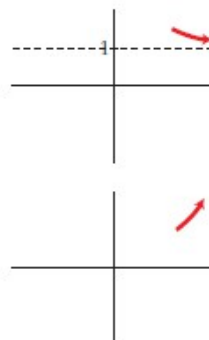
a) $y = \frac{x^2 + 2}{x^2 - 2x}$

b) $y = \frac{2x^3 - 3x^2 + 7}{x}$

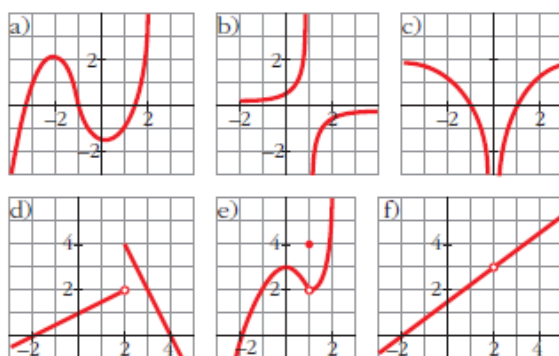
a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1 \rightarrow y = 1$ es asíntota horizontal.

b) $\text{grado de } P - \text{grado de } Q \geq 2$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \rightarrow$ rama parabólica hacia arriba.



- 1 a) ¿Cuál de las siguientes gráficas corresponde a una función continua?
b) Señala, en cada una de las otras cinco, la razón de su discontinuidad.



a) Solo la a).

b) Rama infinita en $x = 1$ (asíntota vertical).

c) Rama infinita en $x = 0$ (asíntota vertical).

d) Salto en $x = 2$.

e) Punto desplazado en $x = 1$; $f(1) = 4$; $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$.

f) No está definida en $x = 2$.

- 6 Comprueba si la función $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x < 0 \\ x - 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$ es continua en $x = 0$.

Recuerda que para que f sea continua en $x = 0$, debe verificarse que:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$$

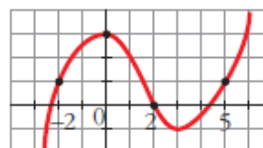
$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -1 = f(0)$$

Es continua en $x = 0$.

TEMA 6: DERIVADAS

- 1 Calcula la tasa de variación media de esta función en los intervalos:

- a) $[-2, 0]$ b) $[0, 2]$ c) $[2, 5]$



a) T.V.M. $[-2, 0] = \frac{f(0) - f(-2)}{0 - (-2)} = \frac{3 - 1}{2} = 1$

b) T.V.M. $[0, 2] = \frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = \frac{0 - 3}{2} = -\frac{3}{2}$

c) T.V.M. $[2, 5] = \frac{f(5) - f(2)}{5 - 2} = \frac{1 - 0}{3} = \frac{1}{3}$

Reglas de derivación

Halla la función derivada de estas funciones y calcula su valor en los puntos que se indican:

15 $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 6$; $x = 1$
 $f'(x) = 6x^2 + 6x$; $f'(1) = 12$

16 $f(x) = \frac{x}{3} + \sqrt{2}$; $x = -\frac{17}{3}$
 $f'(x) = \frac{1}{3}$; $f'\left(-\frac{17}{3}\right) = \frac{1}{3}$

17 $f(x) = \frac{x^3}{2} + \frac{3}{2}x^2 - \frac{x}{2}$; $x = 2$
 $f'(x) = \frac{3}{2}x^2 + 3x - \frac{1}{2}$; $f'(2) = 6 + 6 - \frac{1}{2} = \frac{23}{2}$

18 $f(x) = \frac{1}{7x+1}$; $x = 0$
 $f'(x) = \frac{-7}{(7x+1)^2}$; $f'(0) = -7$

19 $f(x) = \frac{2x}{x+3}$; $x = -1$
 $f'(x) = \frac{6}{(x+3)^2} \rightarrow f'(-1) = \frac{3}{2}$

20 $f(x) = \ln(3x-1)$; $x = 3$
 $f'(x) = \frac{3}{3x-1} \rightarrow f'(3) = \frac{3}{8}$

- 21** $f(x) = \operatorname{sen} 2x + \cos 2x; x = \pi$
 $f'(x) = 2\cos x - 2\operatorname{sen} 2x \rightarrow f'(\pi) = 2$
- 22** $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-4}}; x = 8$
 $f'(x) = \frac{-1}{2\sqrt{(x-4)^3}} \rightarrow f'(8) = \frac{-1}{16}$
- 23** $f(x) = x \cdot 2^{x+1}; x = -1$
 $f'(x) = 2^{x+1} \ln(2)x + 2^{x+1} \rightarrow f'(-1) = -\ln 2 + 1$
- 24** $f(x) = (5x-2)^3; x = \frac{1}{5}$
 $f'(x) = 15(5x-2)^2 \rightarrow f'\left(\frac{1}{5}\right) = 15$
- 25** $f(x) = \frac{x+5}{x-5}; x = 3$
 $f'(x) = \frac{-10}{(x-5)^2} \rightarrow f'(3) = \frac{-5}{2}$
- 26** $f(x) = x^2 + \log x; x = \frac{1}{2}$
 $f'(x) = 2x + \frac{1}{x \ln 10} \rightarrow f'\left(\frac{1}{2}\right) = 1 + \frac{2}{\ln 10}$
- 27** $f(x) = e^{2x} \cdot \ln(x^2 + 1); x = 1$
 $f'(x) = 2e^{2x} \left[\ln(x^2 + 1) + \frac{x}{x^2 + 1} \right] \rightarrow f'(1) = 2e^2 \left(\ln 2 + \frac{1}{2} \right)$

Recta tangente

- 43** Halla la ecuación de la recta tangente a la curva $y = x^2 - 5x + 6$ en el punto de abscisa $x = 2$.
 $f'(x) = 2x - 5; m = f'(2) = -1, f(2) = 0$
 La recta es $y = -(x - 2) = 2 - x$
- 44** Escribe la ecuación de la recta tangente a $y = -x^2 + 2x + 5$ en el punto de abscisa $x = -1$.
 $f'(x) = -2x + 2; m = f'(-1) = 4, f(-1) = 2$
 La recta es $y = 4(x + 1) + 2 = 4x + 6$

60 Comprueba que la función $y = \frac{2x^2}{x^2 + 1}$:

- Tiene derivada nula en $(0, 0)$.
- La recta $y = 2$ es una asíntota horizontal.
- Posición de la curva respecto a la asíntota:
Si $x \rightarrow -\infty$, $y < 2$. Si $x \rightarrow +\infty$, $y < 2$.

Represéntala.

$$f'(x) = \frac{4x(x^2 + 1) - 2x(2x^2)}{(x^2 + 1)^2} = \frac{4x}{(x^2 + 1)^2}$$

$$f'(0) = 0; f(0) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x^2}{x^2 + 1} = 2$$



75 Estudia y representa las siguientes funciones:

a) $y = \frac{x}{x^2 - 16}$

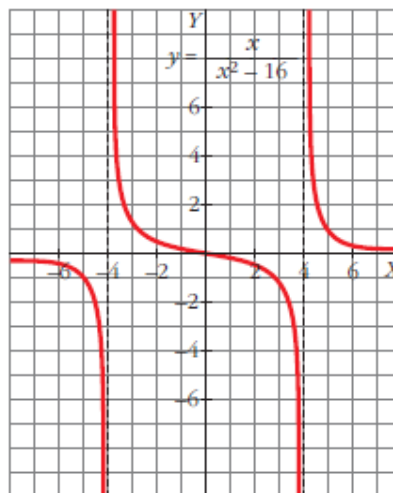
b) $y = \frac{x}{1 - x^2}$

a) $f'(x) = \frac{-x^2 - 16}{(x^2 - 16)^2}$

Asíntotas verticales: $x = -4$, $x = 4$

Asíntotas horizontales: $y = 0$

No hay asíntotas oblicuas ni puntos de tangente horizontal.

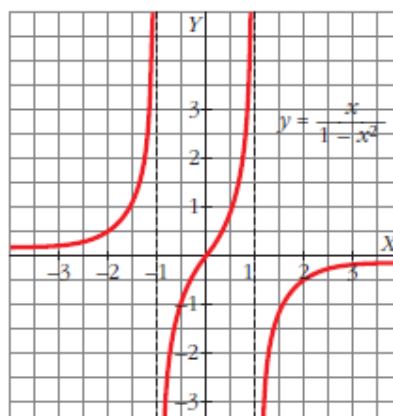


b) $f'(x) = \frac{x^2 + 1}{(1 - x^2)^2}$

Asíntotas verticales: $x = 1$, $x = -1$

Asíntotas horizontales: $y = 0$

No hay asíntotas oblicuas ni puntos de tangente horizontal.



7. Representa la función $y = x^3 - 12x + 16$.

$y = x^3 - 12x + 16$ es una función polinómica, por ello es continua en $\mathbb{R}$.

- Ramas infinitas:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 - 12x + 16) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 - 12x + 16) = -\infty$$

- Puntos singulares:

$$f'(x) = 3x^2 - 12$$

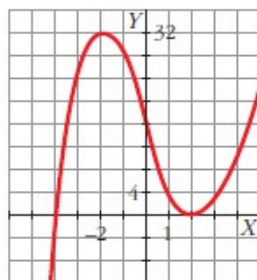
$$f'(x) = 0 \rightarrow 3x^2 - 12 = 0 \quad \begin{cases} x = 2 \\ x = -2 \end{cases}$$

$$f(2) = 2^3 - 12 \cdot 2 + 16 = 0 \rightarrow (2, 0)$$

$$f(-2) = (-2)^3 - 12(-2) + 16 = 32 \rightarrow (-2, 32)$$

Los puntos singulares son $(2, 0)$ y $(-2, 32)$.

Esta es su gráfica:



8. Estudia y representa $y = \frac{4x}{x^2 + 1}$.

$$f(x) = \frac{4x}{x^2 + 1}$$

- El dominio de esta función es $\mathbb{R}$.
- Asíntotas:

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0 \end{array} \right\} y = 0 \text{ es una asíntota horizontal.}$$

Cuando $x \rightarrow +\infty$, $f(x) > 0 \rightarrow$ la curva está por encima de la asíntota.

Cuando $x \rightarrow -\infty$, $f(x) < 0 \rightarrow$ la curva está por debajo de la asíntota.

- Cortes con los ejes:

$$f(x) = 0 \rightarrow 4x = 0 \rightarrow x = 0$$

La función corta a los ejes en el punto $(0, 0)$.

- Extremos relativos:

$$f'(x) = \frac{4(x^2 + 1) - 4x \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{4x^2 + 4 - 8x^2}{(x^2 + 1)^2} = \frac{-4x^2 + 4}{(x^2 + 1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow -4x^2 + 4 = 0 \rightarrow x^2 = 1 \quad \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -1 \end{cases}$$

Así, observando la asíntota y el corte con el eje X , $(1, 2)$ es un máximo relativo, y $(-1, -2)$, un mínimo relativo.

La gráfica es:

