MATEMATICAS APLICADAS II
SELECTIVIDAD-PROGRAMACIÓN LINEAL
EJERCICIO RESUELTOS

1º)

EJERCICIO 1

(3 puntos) Un Ayuntamiento concede licencia para la construcción de una urbanización de a lo sumo 120 viviendas, de dos tipos A y B.
Para ello la empresa constructora dispone de un capital máximo de 15 millones de euros, siendo el coste de construcción de la vivienda de tipo A de 100000 euros y la de tipo B 300000 euros.
Si el beneficio obtenido por la venta de una vivienda de tipo A asciende a 20000 euros y por una de tipo B a 40000 euros, ¿cuántas viviendas de cada tipo deben construirse para obtener un beneficio máximo?

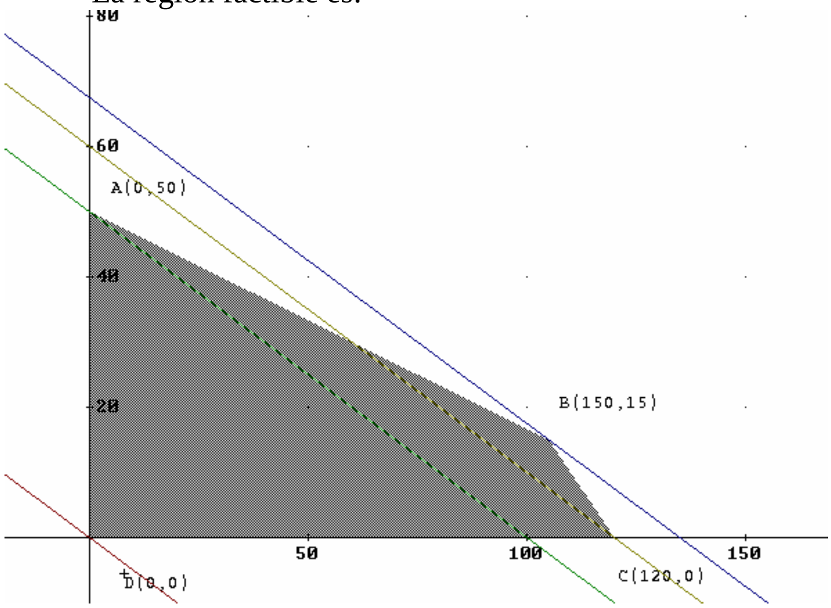
Sea x=nº de viviendas tipo A y= nº de viviendas tipo B. Planteamiento:

Max: Z =20000x+40000y (Función objetivo)
Sujeto a:

$$\left.\begin{array}{ccc} x+3y & \leq & 150 \\ x+y & \leq & 120 \\ x & \geq & 0 \\ y & \geq & 0 \end{array}\right\}$$

La primera ecuación la he dividido por 10000 para simplificar. También se puede maximizar la función objetivo Z= 2x+4y. (el máximo lo multiplicamos por 10000).

La región factible es:



Como es una región acotada el máximo se alcanza en la frontera de la región gráficamente se observa que la solución es x=150, y =15.

Analíticamente: Los vértices son A(0,50), B(150,15), C(120,0), D(0,0)
Z_A=2 000 000 ; Z_B= 2 700 000 ; Z_C = 2 400 000 y Z_D= 0. Por tanto la máxima ganancia es 2 700 000 y se alcanza para 150 casas de tipo A y 15 de tipo B.

2º)

EJERCICIO 1

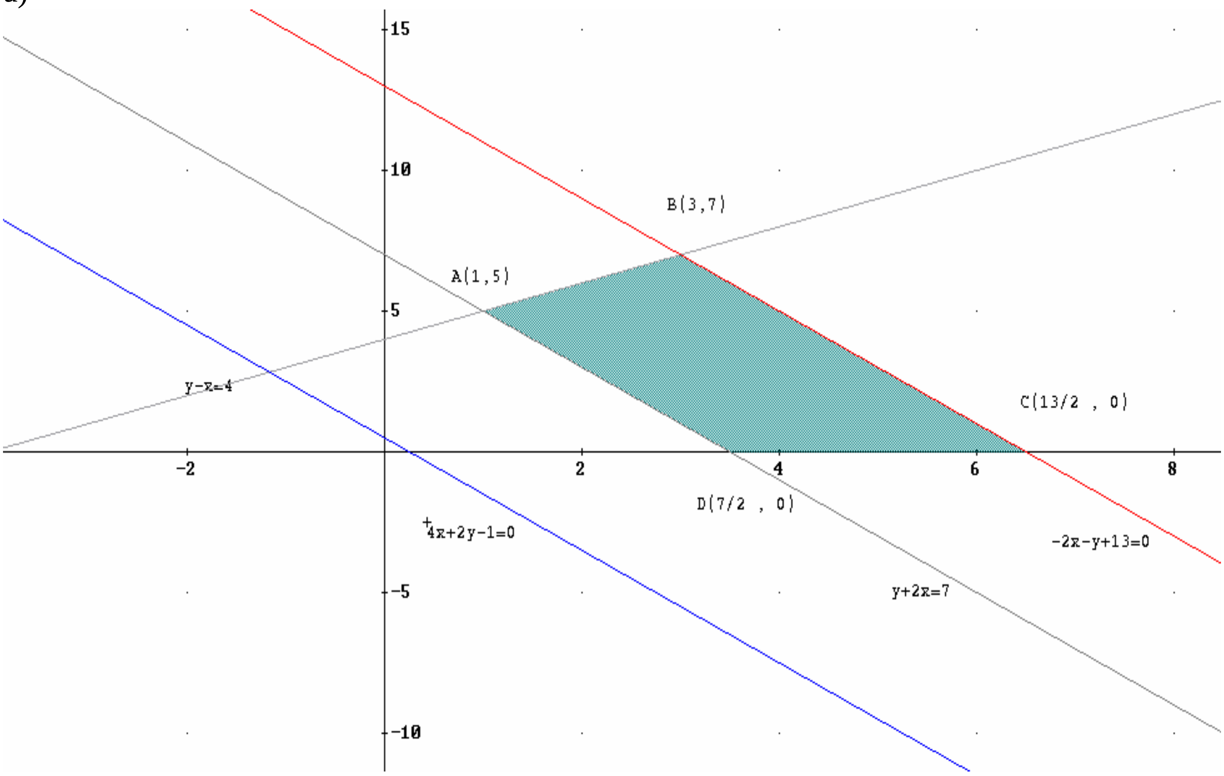
Consideramos el recinto del plano limitado por las siguientes inecuaciones:

$$y - x \leq 4; \quad y + 2x \geq 7; \quad -2x - y + 13 \geq 0; \quad x \geq 0; \quad y \geq 0.$$

a) **(2 puntos)** Represente el recinto y calcule sus vértices.

b) **(1 punto)** Halle en qué puntos de ese recinto alcanza los valores máximo y mínimo la función $F(x, y) = 4x + 2y - 1$.

a)



b) Como el recinto es acotado el problema tiene solución.

F_A=13 ; F_B= 25 ; F_C = 25 y F_D= 13. Por tanto el mínimo es 13 y se alcanza en todo el segmento AD y el máximo es 25 y se alcanza en todo el segmento BD.

3º)

EJERCICIO 1

De un problema de programación lineal se deducen las siguientes restricciones:

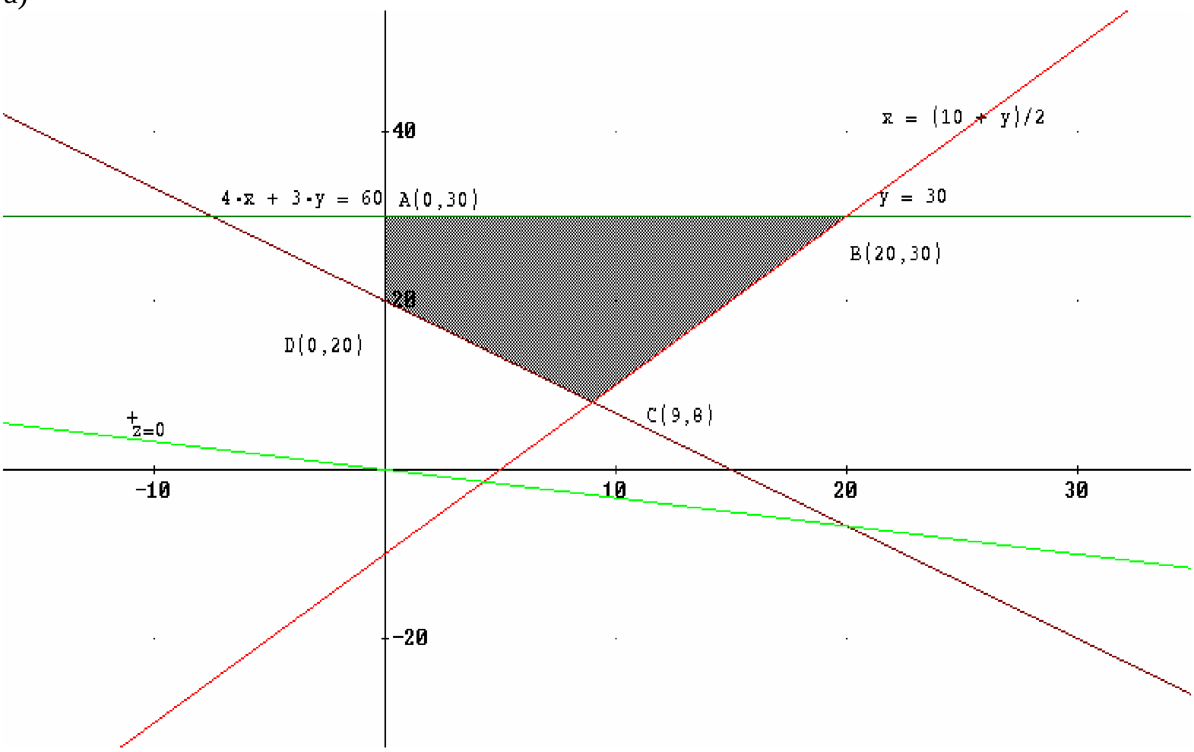
$$4x+3y\geq 60, \quad y\leq 30, \quad x\leq \frac{10+y}{2}, \quad x\geq 0, \quad y\geq 0.$$

a) **(2 puntos)** Represente gráficamente la región factible del problema y calcule sus vértices.

b) **(0.5 puntos)** Maximice en esa región factible la función objetivo $F(x,y)=x+3y$.

c) **(0.5 puntos)** ¿Pertenece el punto (11, 10) a la región factible?

a)



b) Como el recinto es acotado el problema tiene solución.

F_A=90 ; F_B= 110 ; F_C = 33 y F_D= 60. Por tanto el máximo es 110 y se alcanza en el punto B (20,30).

c) Sustituyendo en cada inecuación:

44+30=74 es mayor que 60

10 es menor que 30

11 NO es menor que (10+10)/2 = 10

Por tanto el punto no pertenece a la región factible.

4º)

EJERCICIO 1

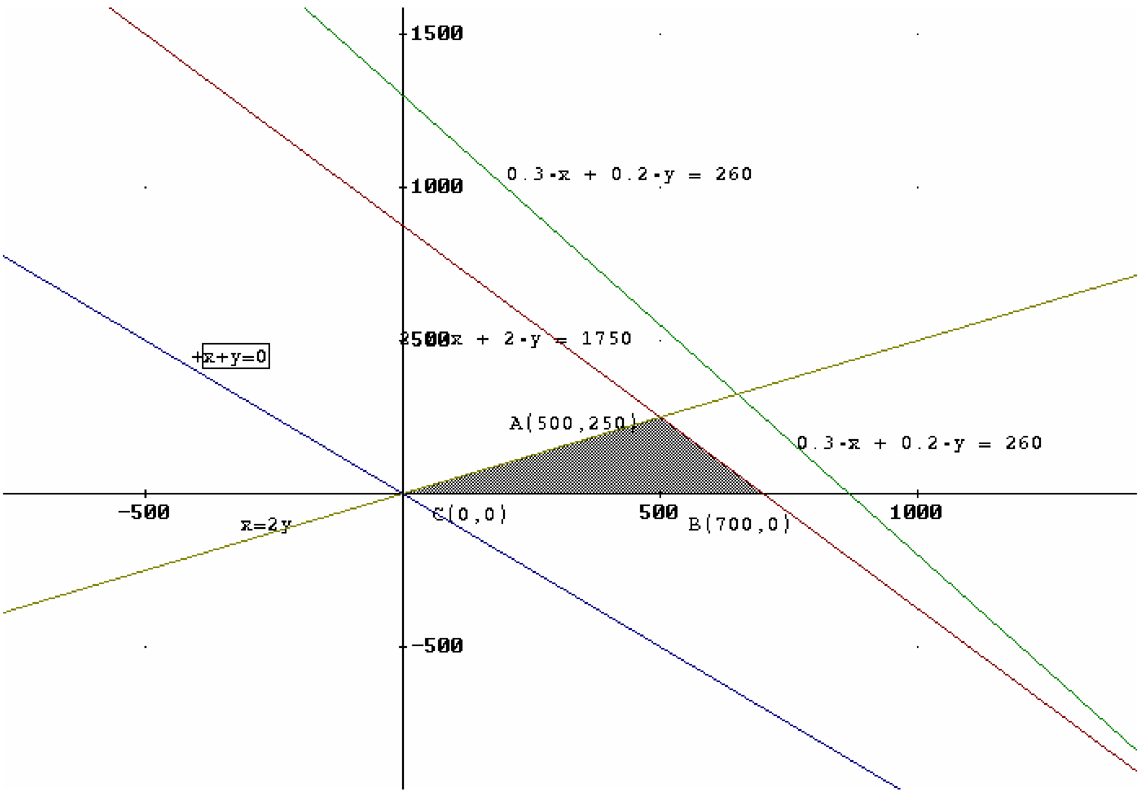
(3 puntos) Una empresa fabrica lunas para coches. Cada luna delantera requiere 2.5 m^2 de cristal, mientras que cada luna trasera requiere 2 m^2.
La producción de una luna delantera precisa 0.3 horas de máquina de corte y cada luna trasera 0.2 horas. La empresa dispone de 1750 m^2 de cristal por semana y 260 horas semanales de máquina de corte.
Para adaptarse a la demanda habitual, la empresa fabrica siempre, como mínimo, el doble de lunas delanteras que de lunas traseras.
Determine cuántas lunas de cada tipo debe fabricar semanalmente la empresa para que el número total de lunas sea máximo.

Sea x= nº de lunas delanteras, y = nº de lunas traseras, ambas fabricadas semanalmente

Maximizar: Z=x+y Función objetivo

Sujeto a:

$$\left.\begin{array}{rcr} 2{,}5x+2y & \leq & 1750 \\ 0{,}3x+0{,}2y & \leq & 260 \\ x & \geq & 2y \\ x & \geq & 0 \\ y & \geq & 0 \end{array}\right\}$$



Como el recinto es acotado el problema tiene solución.

Z_A= 750 ; Z_B= 700 ; Z_C = 0. Por tanto el número total óptimo de lunas es 750. El número de lunas que se han de fabricar semanalmente es: delanteras 500 y traseras 250.

5º)

EJERCICIO 1

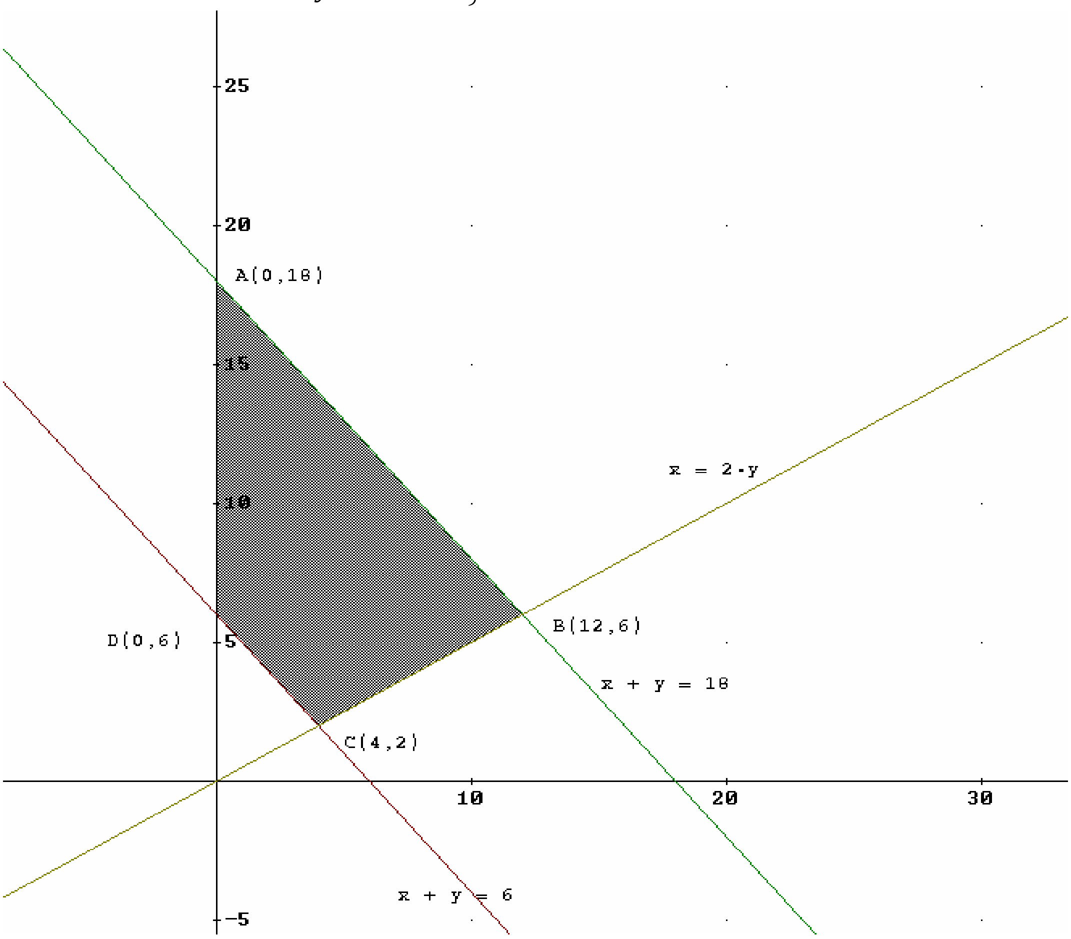
La candidatura de un determinado grupo político para las elecciones municipales debe cumplir los siguientes requisitos: el número total de componentes de la candidatura debe estar comprendido entre 6 y 18 y el número de hombres (x) no debe exceder del doble del número de mujeres (y).

a) **(2.5 puntos)** Represente el recinto asociado a estas restricciones y calcule sus vértices.

b) **(0.5 puntos)** ¿Cuál es el mayor número de hombres que puede tener una candidatura que cumpla esas condiciones?

Las inecuaciones son:

$$\left.\begin{array}{rcl} x+y & \geq & 6 \\ x+y & \leq & 18 \\ x & \leq & 2y \\ x & \geq & 0 \\ y & \geq & 0 \end{array}\right\}$$



b) En este caso hay que maximizar z=x. Como el recinto es acotado el problema tiene solución. Está claro que el máximo se alcanza en B por tanto el mayor número de hombres es 12.

6º)

EJERCICIO 1

(3 puntos) Una fábrica produce bombillas de bajo consumo que vende a 1 euro cada una, y focos halógenos que vende a 1.5 euros. La capacidad máxima de fabricación es de 1000 unidades, entre bombillas y focos, si bien no se pueden fabricar más de 800 bombillas ni más de 600 focos.

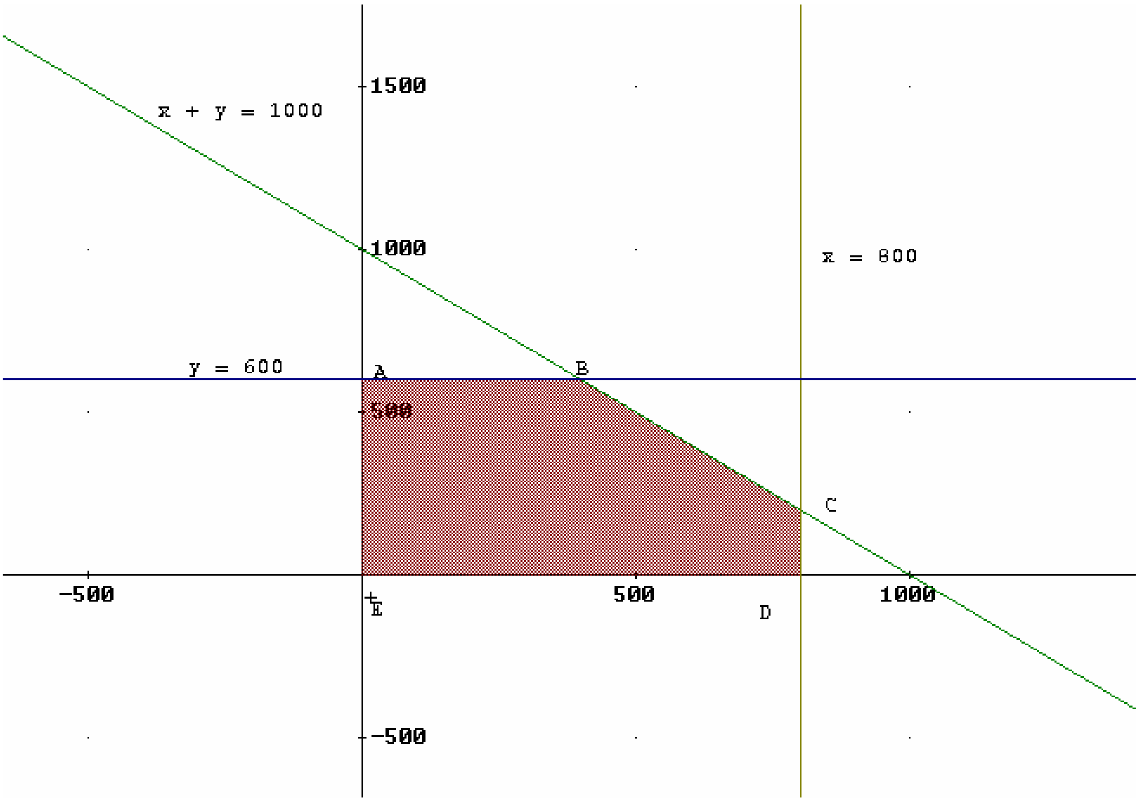
Se sabe que la fábrica vende todo lo que produce. Determine cuántas bombillas y cuántos focos debe producir para obtener los máximos ingresos posibles y cuáles serían éstos.

x= nº de bombillas   y = nº de focos. Se trata de:

Maximizar Z= x+1,5y función objetivo

Sujeto a:

$$\left.\begin{array}{rcc} x+y & \leq & 1000 \\ x & \leq & 800 \\ y & \leq & 600 \\ x & \geq & 0 \\ y & \geq & 0 \end{array}\right\}$$



Los vértices son A(0,600) , B(400,600), C(800,200), D(800,0) y E(0,0). Como el recinto es acotado el problema tiene solución.

Z_A=900 ; Z_B= 1300 ; Z_C = 1100 ; Z_D= 800 y Z_F= 0. Por lo tanto el máximo es 1300 unidades de las que 400 son bombillas y 600 focos.

7º)

EJERCICIO 1

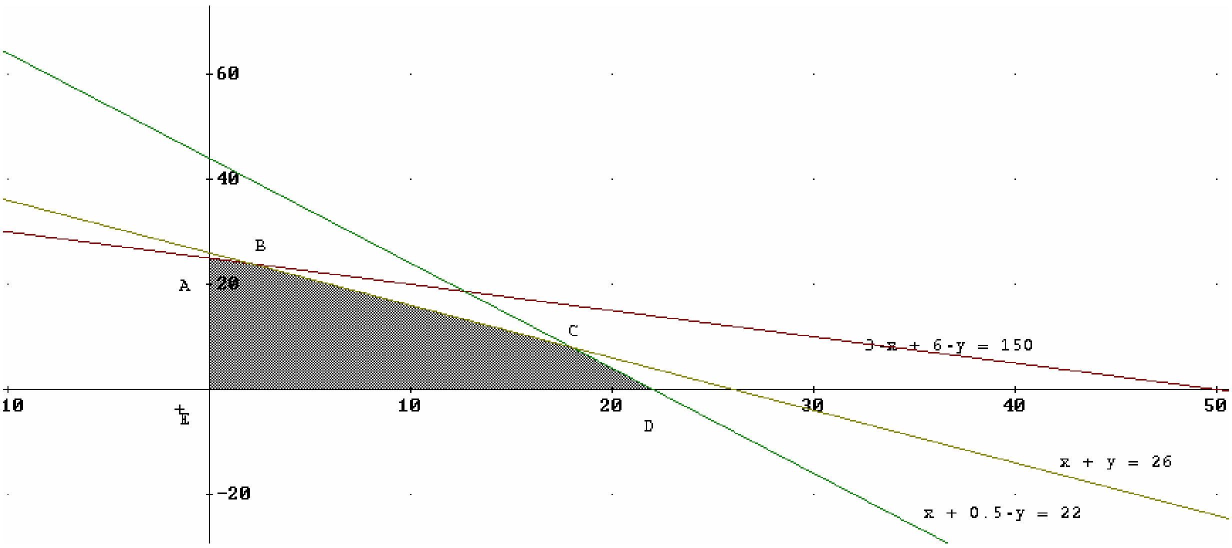
(3 puntos) Un pastelero dispone de 150 kg de harina, 22 kg de azúcar y 26 kg de mantequilla para hacer dos tipos de tartas, A y B. Para hacer una hornada de tartas del tipo A se necesitan 3 kg de harina, 1 kg de azúcar y 1 kg de mantequilla, mientras que para hacer una hornada de tartas del tipo B se necesitan 6 kg de harina, 0.5 kg de azúcar y 1 kg de mantequilla. Sabiendo que el beneficio que se obtiene al vender una hornada del tipo A es de 20 € y de 30 € al vender una hornada del tipo B, determine cuántas hornadas de cada tipo debe hacer y vender para maximizar sus beneficios.

x= nº de hornadas tipo A   y= nº de hornadas tipo B

Maximizar Z= 20x+30y función objetivo

Sujeto a:

$$\left.\begin{array}{rcr} 3x+6y & \leq & 150 \\ x+0.5y & \leq & 22 \\ x+y & \leq & 26 \\ x & \geq & 0 \\ y & \geq & 0 \end{array}\right\}$$



Los vértices son **A(25,0)** (Punto de corte de la recta 3x+6y=150 con el eje Y) ; **B (2,24)** (punto de corte de las rectas 3x+6y=150 y de x+y=26) ; **C(18,8)** (Punto de corte de las rectas x+0.5y=22 y de x+y=26); **D (22,0)** (Punto de corte de la recta x+0.5y=22 con el eje X) y **E(0,0)** (Origen de coordenadas). Como el recinto es acotado el problema tiene solución:

Z_A= 75 Z_B= 150 Z_C= 102 Z_D= 66 Z_E=0

Por tanto la solución óptima es fabricar 2 hornadas tipo A y 24 de tipo B. Y el máximo beneficio es de 150 €.

8º)

EJERCICIO 1

(3 puntos) Un nutricionista informa a un individuo que, en cualquier tratamiento que siga, no debe ingerir diariamente más de 240 mg de hierro ni más de 200 mg de vitamina B. Para ello están disponibles píldoras de dos marcas, P y Q. Cada píldora de la marca P contiene 40 mg de hierro y 10 mg de vitamina B, y cuesta 6 céntimos de euro; cada píldora de la marca Q contiene 10 mg de hierro y 20 mg de vitamina B, y cuesta 8 céntimos de euro.

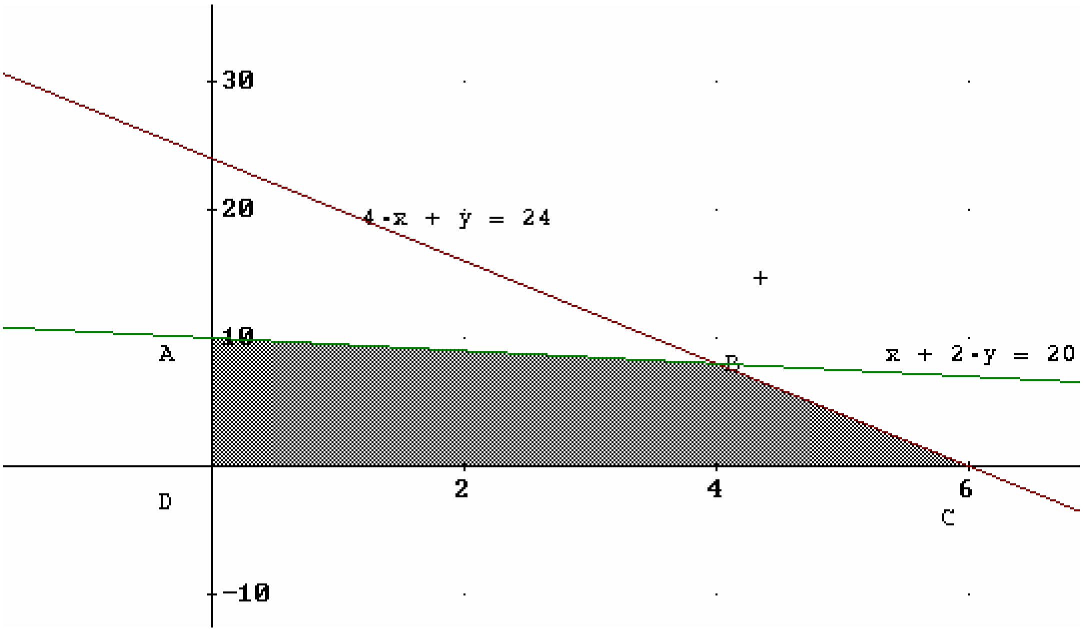
Entre los distintos tratamientos, ¿cuál sería el de máximo coste diario?

x= nº de píldoras diarias de la marca P y=nº de píldoras diarias de la marca Q

Maximizar: Z= 6x+8y Función objetivo

Sujeto a :

$$\left.\begin{array}{rcl} 40x+10y & \le & 240 \\ 10x+20y & \le & 200 \\ x & \ge & 0 \\ y & \ge & 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{rcl} 4x+y & \le & 24 \\ x+2y & \le & 20 \\ x & \ge & 0 \\ y & \ge & 0 \end{array}\right\}$$



Los vértices son A(0,10); B(4,8); C(6,0) y D(0,0). Como el recinto es acotado el problema tiene solución.

Z_A= 80 Z_B= 88 Z_C= 36 y Z_D= 0 . Por tanto el tratamiento diario más caro es de 88 céntimos de Euro y consiste en 4 píldoras de la marca P y 8 de la marca Q.

9º)

EJERCICIO 1

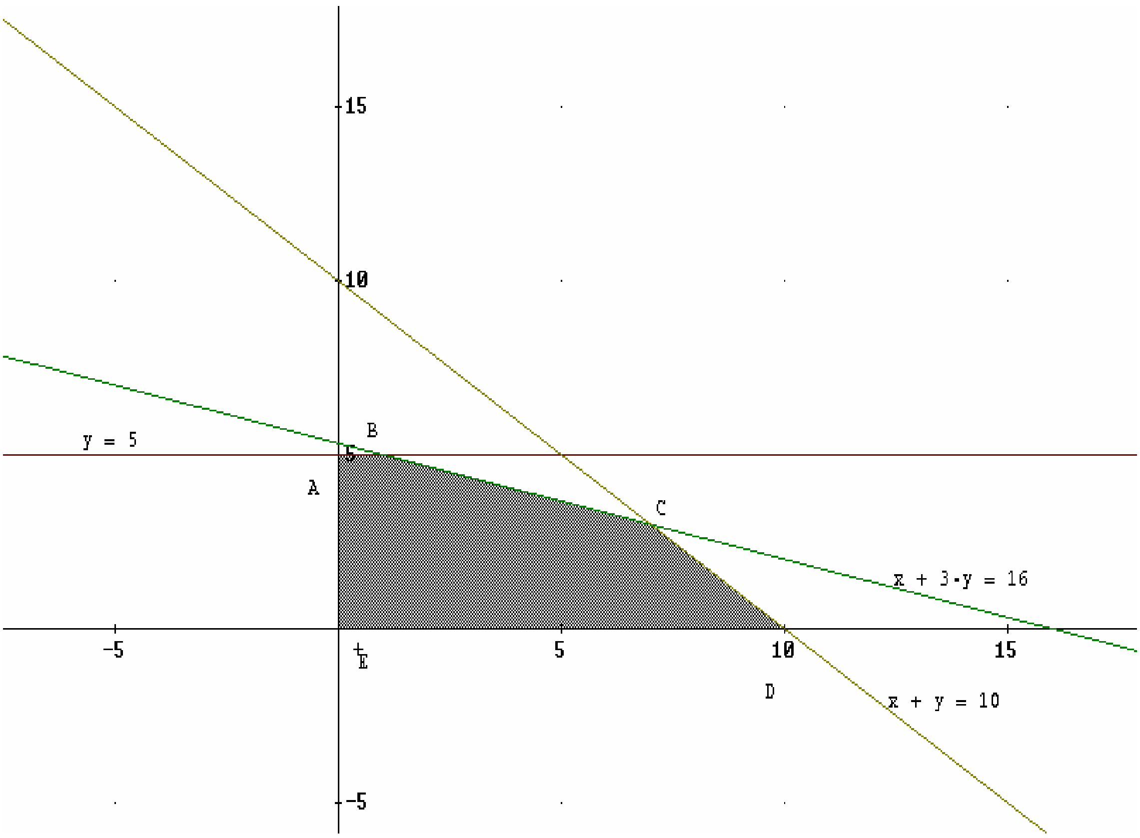
(3 puntos) Un agricultor posee 10 hectáreas (ha.) y decide dedicarlas al cultivo de cereales y hortalizas. Por las limitaciones de agua no puede destinar más de 5 ha. a hortalizas. El cultivo de cereales tiene un coste de 1000 euros/ha. y el de hortalizas de 3000 euros/ha., no pudiendo superar el coste total la cantidad de 16000 euros. El beneficio neto por ha. de cereales asciende a 2000 euros y el de hortalizas a 8000 euros. Halle la distribución de cultivos que maximiza el beneficio y calcule dicho máximo.

Sea x = nº de ha. destinadas a cereales y =nº de ha. destinadas a hortalizas.

Maximizar Z=2000x + 8000y (o bien 2x+8y)

Sujeto a :

$$\left.\begin{array}{rcr} y & \leq & 5 \\ x+3y & \leq & 16 \\ x+y & \leq & 10 \\ x & \geq & 0 \\ y & \geq & 0 \end{array}\right\}$$



Recinto acotado con vértices A (0,5) ; B (1, 5) (Punto de corte de las rectas y=5 x+3y=16) ; C(7,3) (Punto de corte de las rectas x+3y=16 x+y=10); D(10,0) y E(0,0). Como el recinto es acotado el problema tiene solución.

Z_A= 40 Z_B= 42 Z_C= 38 Z_D= 20 y Z_F =0. Por tanto el beneficio máximo es 42000 Euros y se alcanza para 1 ha. de cereales y 5 de hortalizas.

10º)

EJERCICIO 1

Sea el recinto definido por las inecuaciones siguientes:

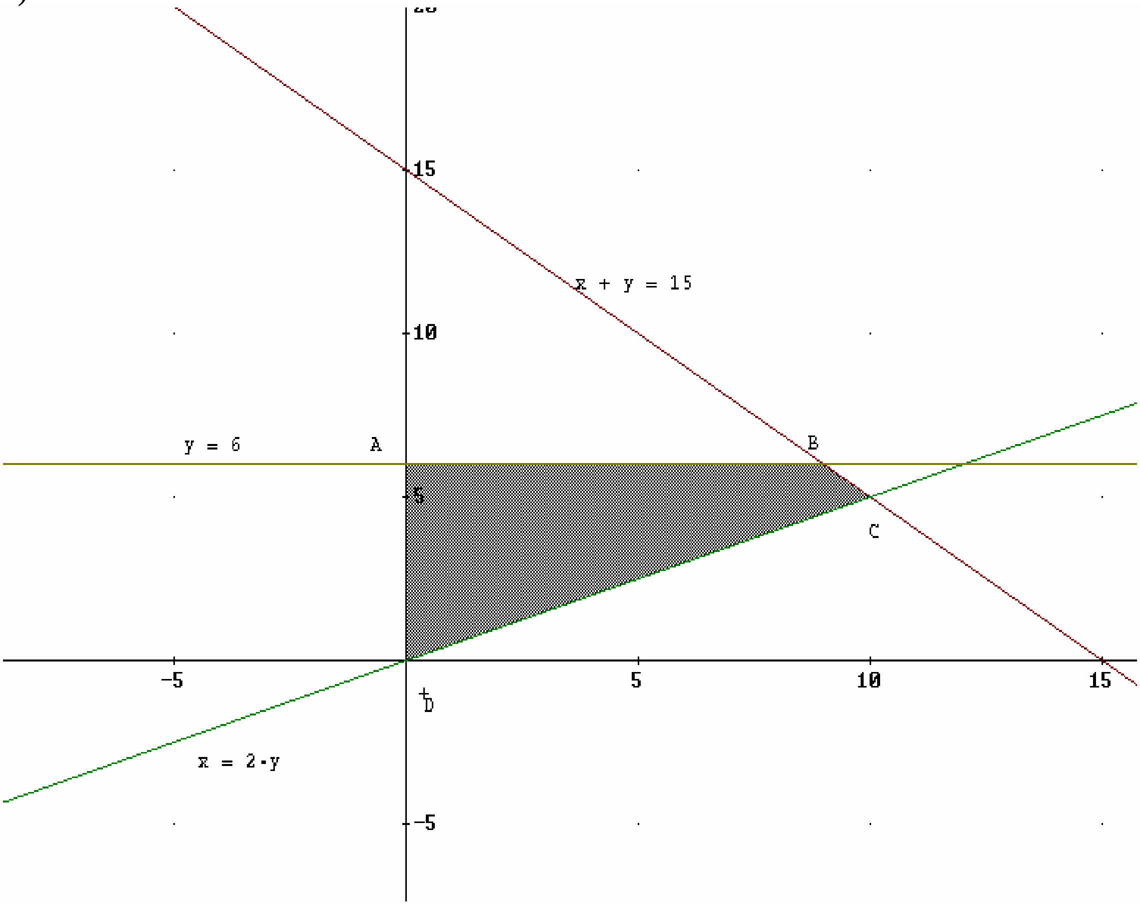
$$x + y \leq 15; \quad x \leq 2y; \quad 0 \leq y \leq 6; \quad x \geq 0$$

a) **(1 punto)** Represente gráficamente dicho recinto.

b) **(1 punto)** Calcule sus vértices.

c) **(0.5 puntos)** Determine el máximo valor de la función $F(x, y) = 8x + 5y$ en el recinto anterior y dónde se alcanza.

a)



b) Los vértices son: A(0,6); B(9,6) (Punto de corte de las rectas x+y=15 ; y=6); C(10,5) (Punto de corte de las rectas x+y=15 ; x=2y) y D(0,0) (Origen de coordenadas)

c) Como el recinto es acotado la función alcanza el máximo en la frontera del recinto.

F_A= 30 F_B= 102 F_C= 105 y F_D= 0

Por tanto el valor máximo de la función es 105 y se alcanza para x= 10 ; y=5.

11º)

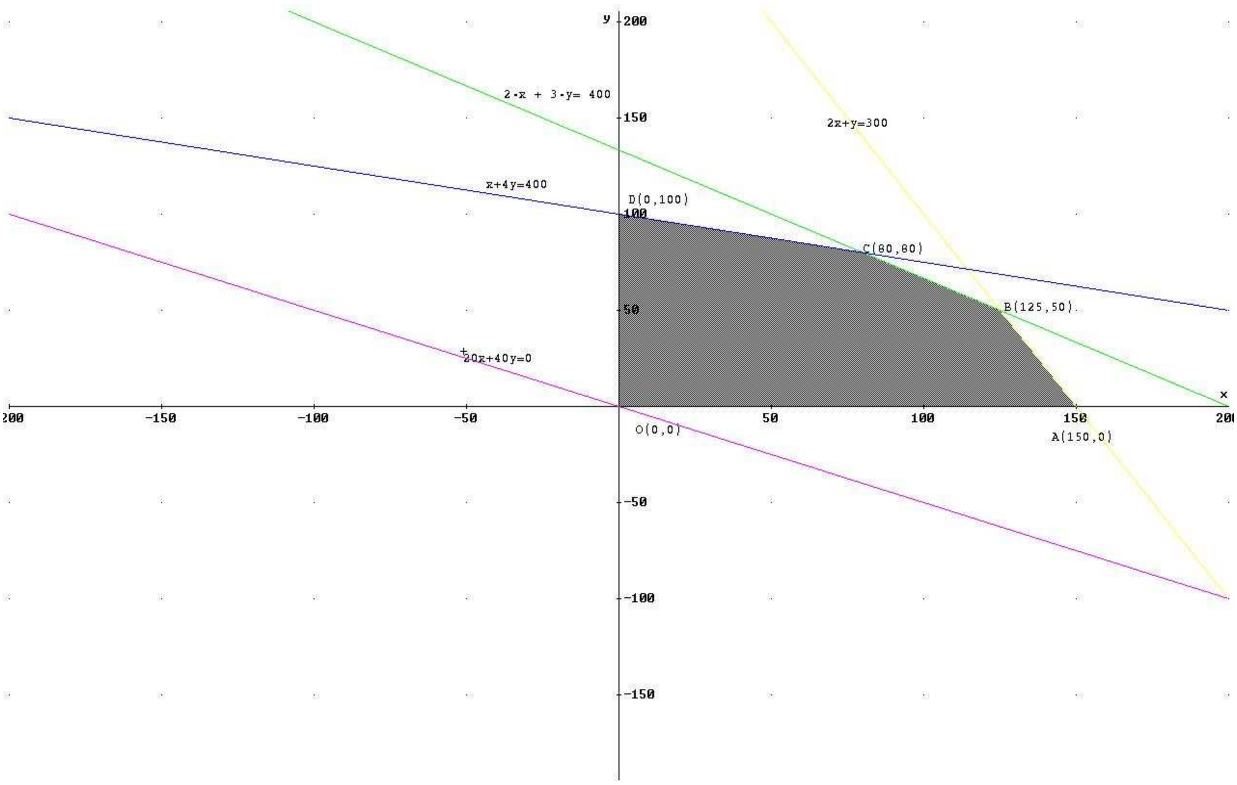
EJERCICIO 1

(2.5 puntos) Un comerciante quiere dar salida a 400 kg de avellanas, 300 kg de nueces y 400 kg de almendras. Para ello hace dos tipos de lotes: los de tipo A contienen 2 kg de avellanas, 2 kg de nueces y 1 kg de almendras; y los de tipo B contienen 3 kg de avellanas, 1 kg de nueces y 4 kg de almendras. El precio de venta de cada lote es de 20 euros para los del tipo A y de 40 euros para los del tipo B. ¿Cuántos lotes de cada tipo debe vender para obtener el máximo ingreso y a cuánto asciende éste?

Sea x=nº de lotes tipo A y= nº de lotes tipo B. Planteamiento:

Max: Z =20x+40y (Función objetivo)
Sujeto a:

$$\left.\begin{array}{rcl} 2x+3y & \leq & 400 \\ 2x+y & \leq & 300 \\ x+4y & \leq & 300 \\ x & \geq & 0 \\ y & \geq & 0 \end{array}\right\}$$



Como el recinto está acotado el problema tiene solución. Evaluamos los vértices de la región factible en la función objetivo:
Z_0= 0 ,Z_A=3000 , Z_B= 4500 , Z_C= 4800 , Z_D=4000. Por tanto la solución es el punto C 80 lotes de A y 80 lotes de B y la ganancia es de 4800€.

12º)

EJERCICIO 1

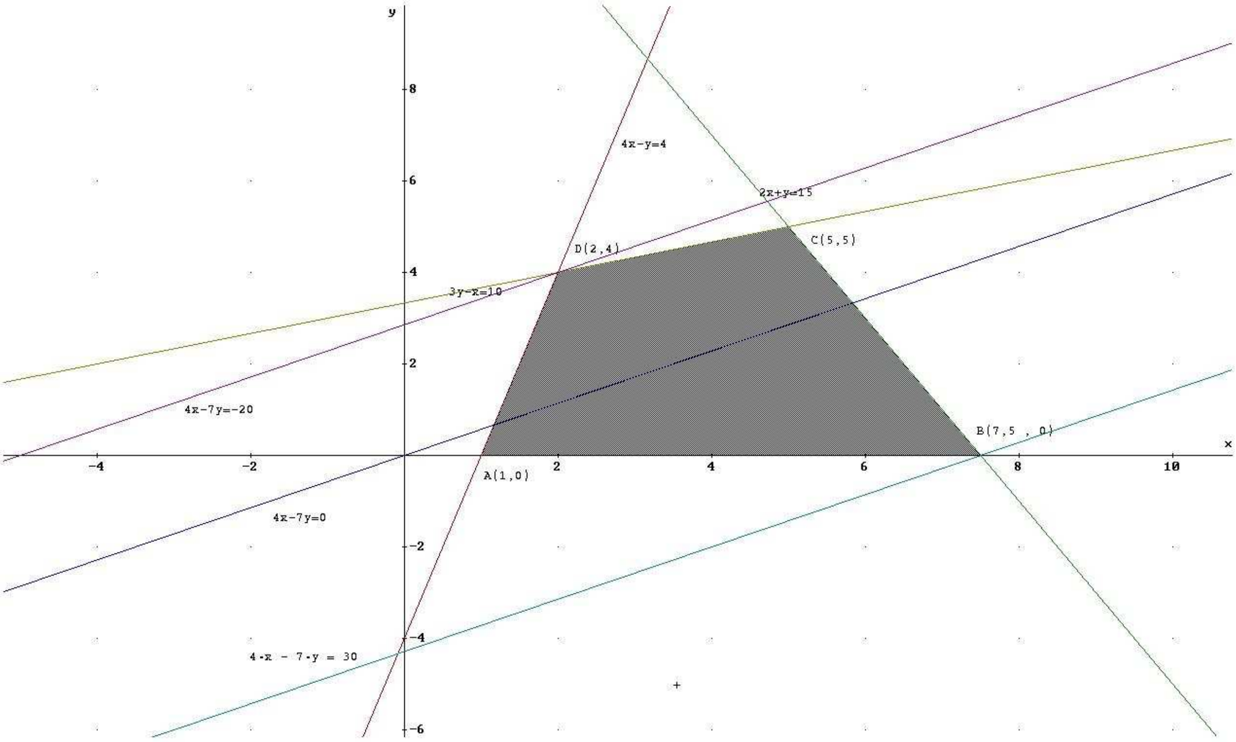
Se considera el recinto del plano determinado por los siguientes semiplanos:

$$4x - y \geq 4; \quad 2x + y \leq 15; \quad 3y - x \leq 10; \quad y \geq 0.$$

a) **(1.5 puntos)** Represente el recinto y calcule sus vértices.

b) **(0.5 puntos)** Calcule los puntos del recinto donde la función $F(x, y) = 4x - 7y$ alcanza el máximo y el mínimo.

c) **(0.5 puntos)** ¿Entre qué valores varía la función $F(x, y) = 4x - 7y$ en el recinto?



b) Evaluamos los vértices en la función objetivo: $F_A=4$, $F_B=30$, $F_C= -15$ y $F_D= -20$. Por tanto el mínimo es -20 y se alcanza para x=2 , y=4. Y el máximo es 30 y se alcanza para x=7,5, y=0 .

c) Entre el mínimo, -20 y el máximo, 30.

13º)

EJERCICIO 1

(2.5 puntos) Un supermercado se abastece de gambas y langostinos a través de dos mayoristas, A y B, que le envían contenedores con cajas completas de ambos productos. El mayorista A envía en cada contenedor 2 cajas de gambas y 3 de langostinos, al precio de 350 euros el contenedor, mientras que el mayorista B envía en cada uno 1 caja de gambas y 5 de langostinos, al precio de 550 euros el contenedor.

El supermercado necesita, como mínimo, 50 cajas de gambas y 180 de langostinos pudiendo almacenar, como máximo, 50 contenedores.

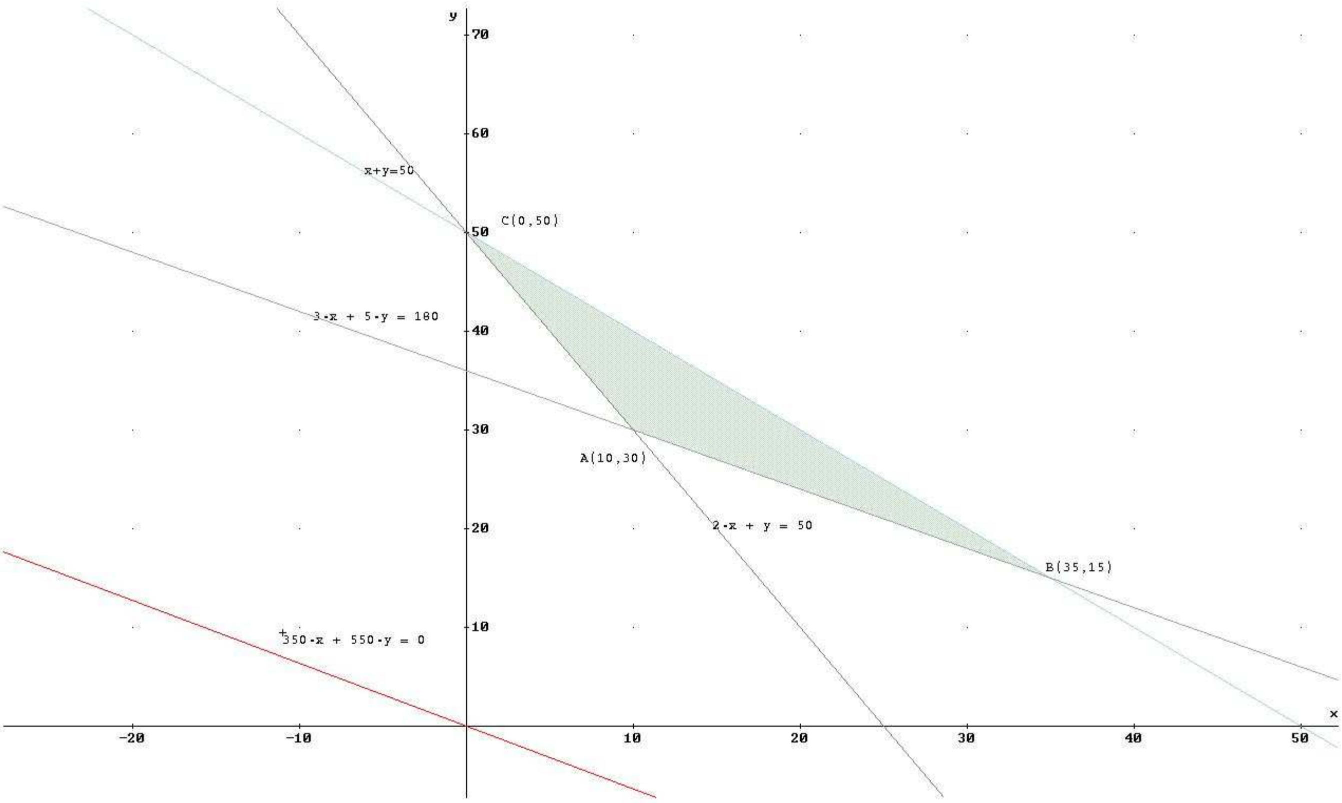
¿Cuántos contenedores debería pedir el supermercado a cada mayorista para satisfacer sus necesidades con el menor coste posible? Indique cuál sería ese coste mínimo.

Sea x=nº de contenedores del mayorista A y= nº de contenedores del mayorista B.

Min: Z =350x+550y (Función objetivo)

Sujeto a:

$$\left.\begin{array}{rcl} 2x+y & \geq & 50 \\ 3x+5y & \geq & 180 \\ x+y & \leq & 50 \\ x & \geq & 0 \\ y & \geq & 0 \end{array}\right\}$$



Z_A=20000 , Z_B= 20500, Z_C= 27500. Por tanto la solución es 10 contenedores del mayorista A y 30 del B y el gasto mínimo es de 20000€.

14º)

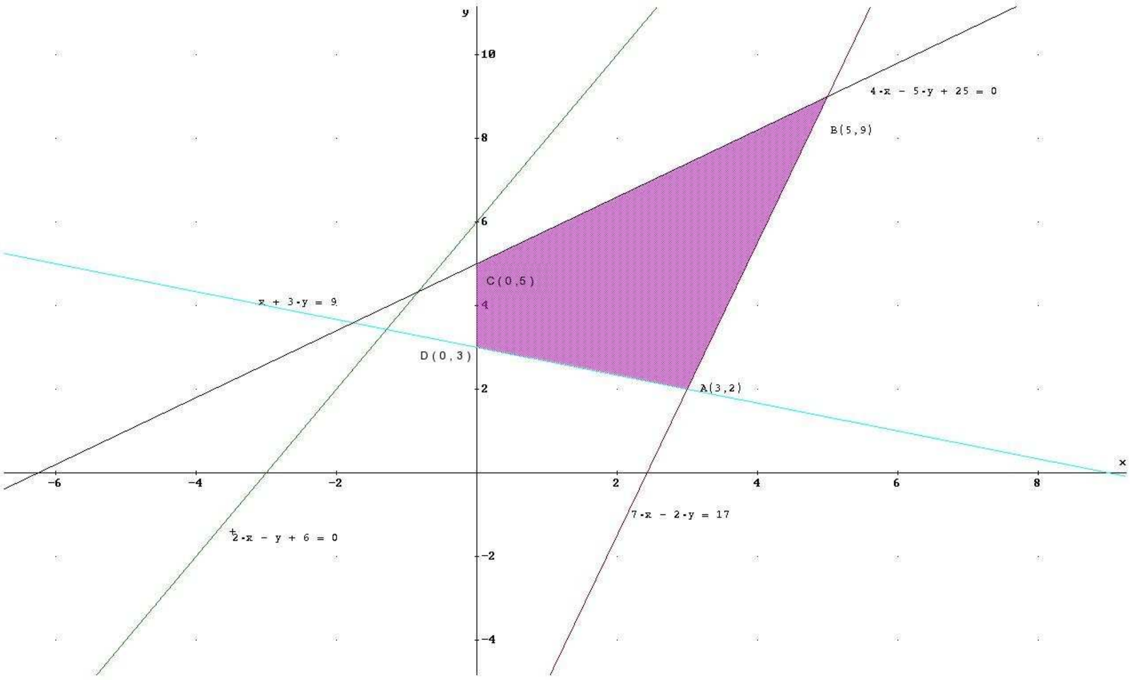
EJERCICIO 1

a) **(1 punto)** Dibuje el recinto del plano definido por las inecuaciones:

$$x + 3y \geq 9; \quad 4x - 5y + 25 \geq 0; \quad 7x - 2y \leq 17; \quad x \geq 0; \quad y \geq 0.$$

b) **(1 punto)** Calcule los vértices del mismo.

c) **(0.5 puntos)** Obtenga en dicho recinto los valores máximo y mínimo de la función $F(x, y) = 2x - y + 6$ y los puntos donde se alcanzan.



F_A=10, F_B= 7, F_C= 1 y F_D= 3. Por tanto el máximo es 10 y se alcanza para en el punto A(3,2) y el mínimo es 1 y se alcanza en el punto C(0,5).