

Examen de Matemáticas Ciencias Sociales I – 1º de Bachillerato

1. Dada la función parabólica $y = -x^2 + 10x - 21$, calcular: puntos de corte con los ejes **(0,5 puntos)**, vértice **(0,5 puntos)** y hacer la representación gráfica **(1 punto)**.
2. Dada la función $f(x) = \frac{2x}{x-1}$, halla la función inversa de f respecto de la composición **(0,5 puntos)** y comprueba que efectivamente lo es **(1,5 puntos)**.
3. Representa gráficamente la siguiente función definida por trozos: **(1,5 puntos)**

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 4x + 3 & \text{si } x < -2 \\ -1 & \text{si } -2 \leq x < 0 \\ \frac{x-1}{x+1} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

4. Dada la siguiente función $g(x) = \frac{2x^2 - 18}{x^2 - 4}$, se pide:
 - a) Puntos de corte con los ejes. **(0,5 puntos)**
 - b) Asíntotas (verticales, horizontales y oblicuas). **(1 punto)**
 - c) Representación gráfica de la función. **(0,5 puntos)**
 - d) Dominio e imagen o recorrido de la función. **(0,5 puntos)**
5. Calcular los siguientes límites, indicando la indeterminación correspondiente:

a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x^3 + 2x^2 - 3x}$ **(0,5 puntos)**

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6x + 2}{\sqrt{x^2 + 2} + x}$ **(0,5 puntos)**

c) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{3}}{2x - 6}$ **(0,5 puntos)**

d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2 + 3} - x \right)$ **(0,5 puntos)**

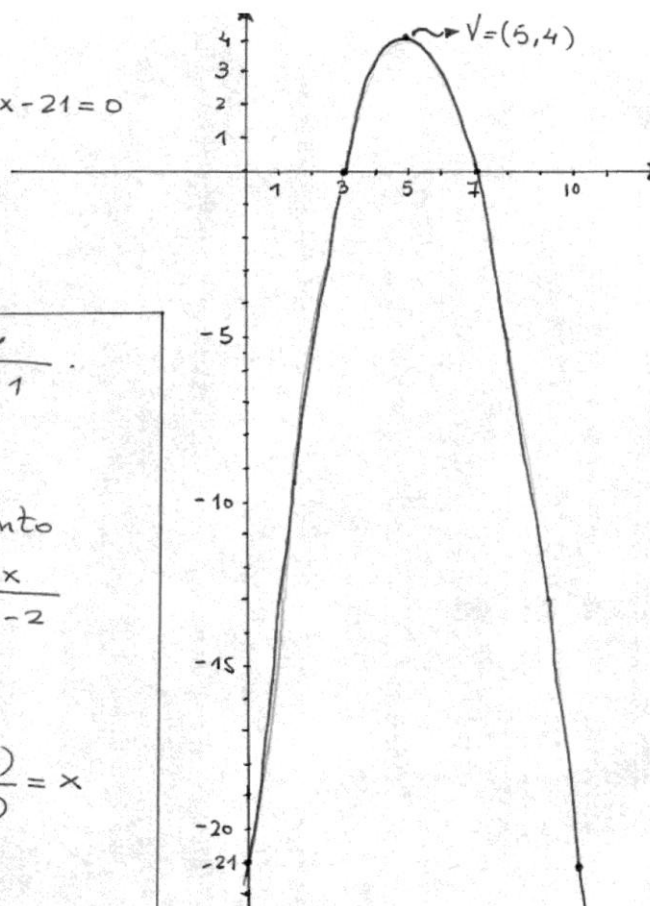
① Punto de corte con el eje Y : $(0, -21)$

Puntos de corte con el eje X : $-x^2 + 10x - 21 = 0$

$$\Leftrightarrow x = 3, x = 7 \Rightarrow (3, 0), (7, 0)$$

$$\text{Vértice: } x = \frac{-b}{2a} = \frac{-10}{2(-1)} = 5$$

$$V = (5, 4)$$



② Cambiamos x por y : $x = \frac{2y}{y-1}$

Despejamos y : $x(y-1) = 2y \Rightarrow$

$$xy - x = 2y \Rightarrow xy - 2y = x \Rightarrow$$

$$y(x-2) = x \Rightarrow y = \frac{x}{x-2}$$

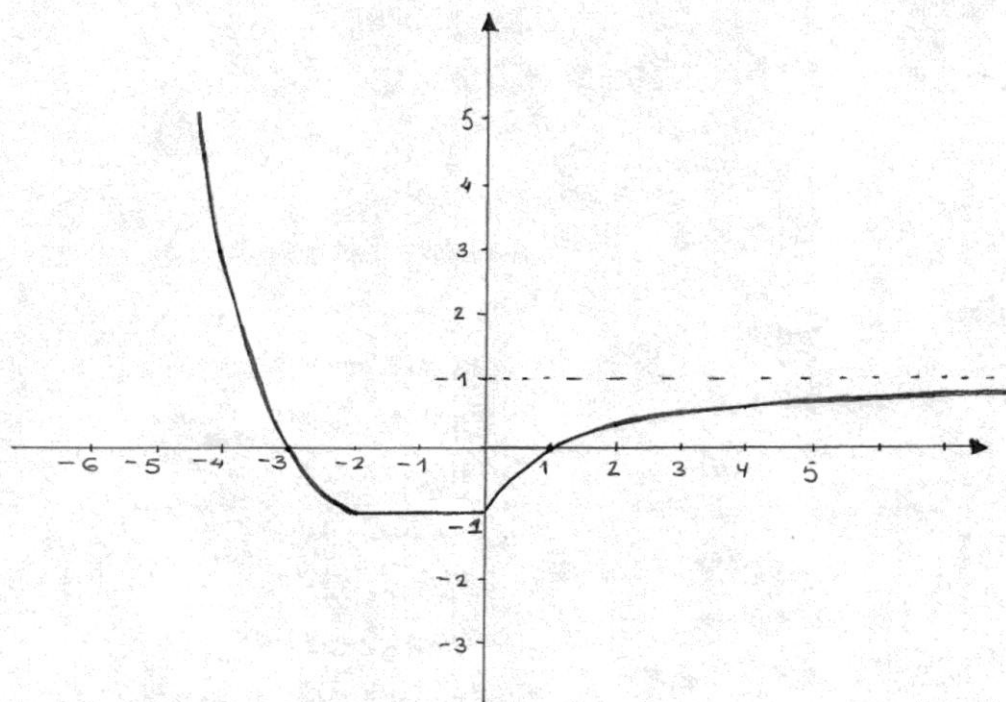
Por tanto la función inversa es: $f^{-1}(x) = \frac{x}{x-2}$

Comprobación

$$\begin{aligned} (f \circ f^{-1})(x) &= f(f^{-1}(x)) = f\left(\frac{x}{x-2}\right) = \\ &= \frac{2\left(\frac{x}{x-2}\right)}{\frac{x}{x-2} - 1} = \frac{\frac{2x}{x-2}}{\frac{2}{x-2}} = \frac{2x(x-2)}{2(x-2)} = x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (f^{-1} \circ f)(x) &= f^{-1}(f(x)) = f^{-1}\left(\frac{2x}{x-1}\right) = \\ &= \frac{\frac{2x}{x-1}}{\frac{2x}{x-1} - 2} = \frac{\frac{2x}{x-1}}{\frac{2}{x-1}} = \frac{2x(x-1)}{2(x-1)} = x \end{aligned}$$

③



4) a) Con el eje Y: $(0, \frac{18}{4}) = (0, 4.5)$
Con el eje X: $g(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2x^2-18}{x^2-4} = 0$
 $\Leftrightarrow 2x^2-18=0 \Leftrightarrow x^2=9 \Leftrightarrow x=\pm 3$
 Entonces son: $(3, 0)$ y $(-3, 0)$

b) Horizontales:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2-18}{x^2-4} = 2 \Rightarrow \boxed{y=2}$$

es una asíntota horizontal.

Verticales:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2-18}{x^2-4} &= \infty \\ \lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x^2-18}{x^2-4} &= \infty \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$\boxed{x=2}$ y $\boxed{x=-2}$ son asíntotas verticales.

Oblicuas

No hay por haber una horizontal.

d) $\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$

$\text{Im } f = (-\infty, 2) \cup [4.5, +\infty)$

5) a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3-1}{x^3+2x^2-3x} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x(x-1)(x+3)} =$
 $= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+x+1}{x(x+3)} = \underline{\underline{\frac{3}{4}}}$

b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x+2}{\sqrt{x^2+2}+x} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6 + \frac{2}{x}}{\sqrt{1 + \frac{2}{x^2}} + \frac{1}{x}} = \frac{6+0}{\sqrt{1+0+0}} = \underline{\underline{6}}$

c) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{2x-6} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(\sqrt{x}-\sqrt{3})(\sqrt{x}+\sqrt{3})}{(2x-6)(\sqrt{x}+\sqrt{3})} =$
 $= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{2(x-3)(\sqrt{x}+\sqrt{3})} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{2(\sqrt{x}+\sqrt{3})} = \frac{1}{4\sqrt{3}} = \underline{\underline{\frac{\sqrt{3}}{12}}}$

d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+3}-x) = [\infty - \infty] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2+3}-x)(\sqrt{x^2+3}+x)}{\sqrt{x^2+3}+x} =$
 $= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x^2+3)-x^2}{\sqrt{x^2+3}+x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{\sqrt{x^2+3}+x} = \underline{\underline{\frac{3}{+\infty} = 0}}$

