

1. Hallar la derivada de las siguientes funciones y simplifica el resultado en la medida de lo posible.
[4 puntos: 1 punto por apartado. Téngase en cuenta que hacer la derivada supone 0,5 puntos y simplificar otros 0,5. Si no se deriva correctamente el apartado no puntuará nada.]
- a) $y = \frac{x+1}{\sqrt{x}}$
- b) $y = \frac{e^x - 2x}{x^3}$
- c) $y = x^3 \cdot \sqrt{\ln x}$
- d) $y = 2x^2 \cdot (\ln \sqrt{x} + x)$
2. Dada la función $f(x) = 2x^2 + 3x - 1$ hallar:
- a) El punto a donde la derivada es igual a 11. **[0,5 puntos]**
- b) La recta tangente a la gráfica de la función f en el punto a hallado en el apartado anterior. **[0,5 puntos]**
3. Dada la función $y = \frac{x}{x^2 - 5x + 4}$ calcular:
- a) Dominio y puntos de corte con los ejes. **[1 punto: 0,5 puntos el dominio; 0,5 puntos los puntos de corte con los ejes]**
- b) Asíntotas, tanto verticales como horizontales. Si tiene asíntotas verticales hallar la tendencia por la izquierda y por la derecha de las mismas. **[1 punto: 0,8 puntos las verticales y tendencias; 0,2 puntos las horizontales]**
- c) Intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función. **[1 punto]**
- d) Puntos donde la gráfica de la función alcanza un máximo o un mínimo relativo. Recuerda que es obligatorio dar, de cada punto, su coordenada x y su coordenada y . **[1 punto]**
- e) Representación gráfica de la función. **[1 punto]**

Ejercicio para subir nota

4. Hallar los posibles extremos relativos (puntos singulares o críticos) de la función del apartado c) del ejercicio 1.
[1 punto]
-

1. Hallar la derivada de las siguientes funciones y simplifica el resultado en la medida de lo posible.

$$a) \quad y = \frac{x+1}{\sqrt{x}} \Rightarrow y' = \frac{1 \cdot \sqrt{x} - (x+1) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}}{(\sqrt{x})^2} = \frac{\sqrt{x} - \frac{x+1}{2\sqrt{x}}}{x} = \frac{\frac{2x - x - 1}{2\sqrt{x}}}{x} = \frac{x-1}{2x\sqrt{x}}$$

$$b) \quad y = \frac{e^x - 2x}{x^3} \Rightarrow y' = \frac{(e^x - 2) \cdot x^3 - (e^x - 2x) \cdot 3x^2}{(x^3)^2} = \frac{x^3 e^x - 2x^3 - 3x^2 e^x + 6x^3}{x^6} = \frac{x^2 (xe^x - 2x - 3e^x + 6x)}{x^6} =$$

$$= \frac{xe^x - 3e^x + 4x}{x^4}$$

$$c) \quad y = x^3 \cdot \sqrt{\ln x} \Rightarrow y' = 3x^2 \cdot \sqrt{\ln x} + x^3 \cdot \frac{1}{2\sqrt{\ln x}} \cdot \frac{1}{x} = 3x^2 \sqrt{\ln x} + \frac{x^2}{2\sqrt{\ln x}} = \frac{6x^2 (\sqrt{\ln x})^2 + x^2}{2\sqrt{\ln x}} = \frac{6x^2 \ln x + x^2}{2\sqrt{\ln x}}$$

$$d) \quad y = 2x^2 \cdot (\ln \sqrt{x} + x) \Rightarrow y' = 4x \cdot (\ln \sqrt{x} + x) + 2x^2 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} + 1 \right) = 4x \ln \sqrt{x} + 4x^2 + 2x^2 \left(\frac{1}{2x} + 1 \right) =$$

$$= 4x \ln \sqrt{x} + 4x^2 + x + 2x^2 = 2x \ln x + 6x^2 + x.$$

2. $f(x) = 2x^2 + 3x - 1$

a) $f'(x) = 4x + 3$. Entonces el punto a cuya derivada es 11 será deberá cumplir que $f'(a) = 11$, es decir, que $4a + 3 = 11 \Rightarrow 4a = 8 \Rightarrow a = 2$.

b) La recta tangente será: $y - f(a) = f'(a)(x - a)$. En este caso, como $a = 2$, es $y - f(2) = f'(2)(x - 2)$.
O sea: $y - 13 = 11(x - 2) \Rightarrow y - 13 = 11x - 22 \Rightarrow y = 11x - 9$.

3. $y = \frac{x}{x^2 - 5x + 4}$

a) $x^2 - 5x + 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 4 \end{cases}$. Por tanto el dominio de la función es: $\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{1, 4\}$.

El único punto de corte con los ejes es, claramente, el $(0, 0)$.

b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{x^2 - 5x + 4} = \left[\frac{1}{0} \right] = \begin{cases} +\infty & \text{si } x \rightarrow 1^- \\ -\infty & \text{si } x \rightarrow 1^+ \end{cases} \Rightarrow x = 1$ es una asíntota vertical.

$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x}{x^2 - 5x + 4} = \left[\frac{4}{0} \right] = \begin{cases} -\infty & \text{si } x \rightarrow 4^- \\ +\infty & \text{si } x \rightarrow 4^+ \end{cases} \Rightarrow x = 4$ es una asíntota vertical.

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x^2 - 5x + 4} = 0 \Rightarrow x = 0$ (el eje X) es una asíntota horizontal.

$f(x) = \frac{x}{x^2 - 5x + 4} \Rightarrow f'(x) = \frac{1 \cdot (x^2 - 5x + 4) - x \cdot (2x - 5)}{(x^2 - 5x + 4)^2} = \frac{x^2 - 5x + 4 - 2x^2 + 5x}{(x^2 - 5x + 4)^2} = \frac{-x^2 + 4}{(x^2 - 5x + 4)^2}$. Entonces:

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{-x^2 + 4}{(x^2 - 5x + 4)^2} = 0 \Leftrightarrow -x^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = -2 \end{cases}$ (puntos críticos o singulares).

Hagamos una tabla dividiendo la recta real en intervalos separados entre sí por los puntos en los que no está definida la función ni su derivada, y por los puntos críticos. En cada uno de estos intervalos estudiaremos el signo de la derivada para deducir si la función crece o decrece.

	$(-\infty, -2)$	$(-2, 1)$	$(1, 2)$	$(2, 4)$	$(4, +\infty)$
signo de f'	—	+	+	—	—
	↓↓	↑↑	↑↑	↓↓	↓↓

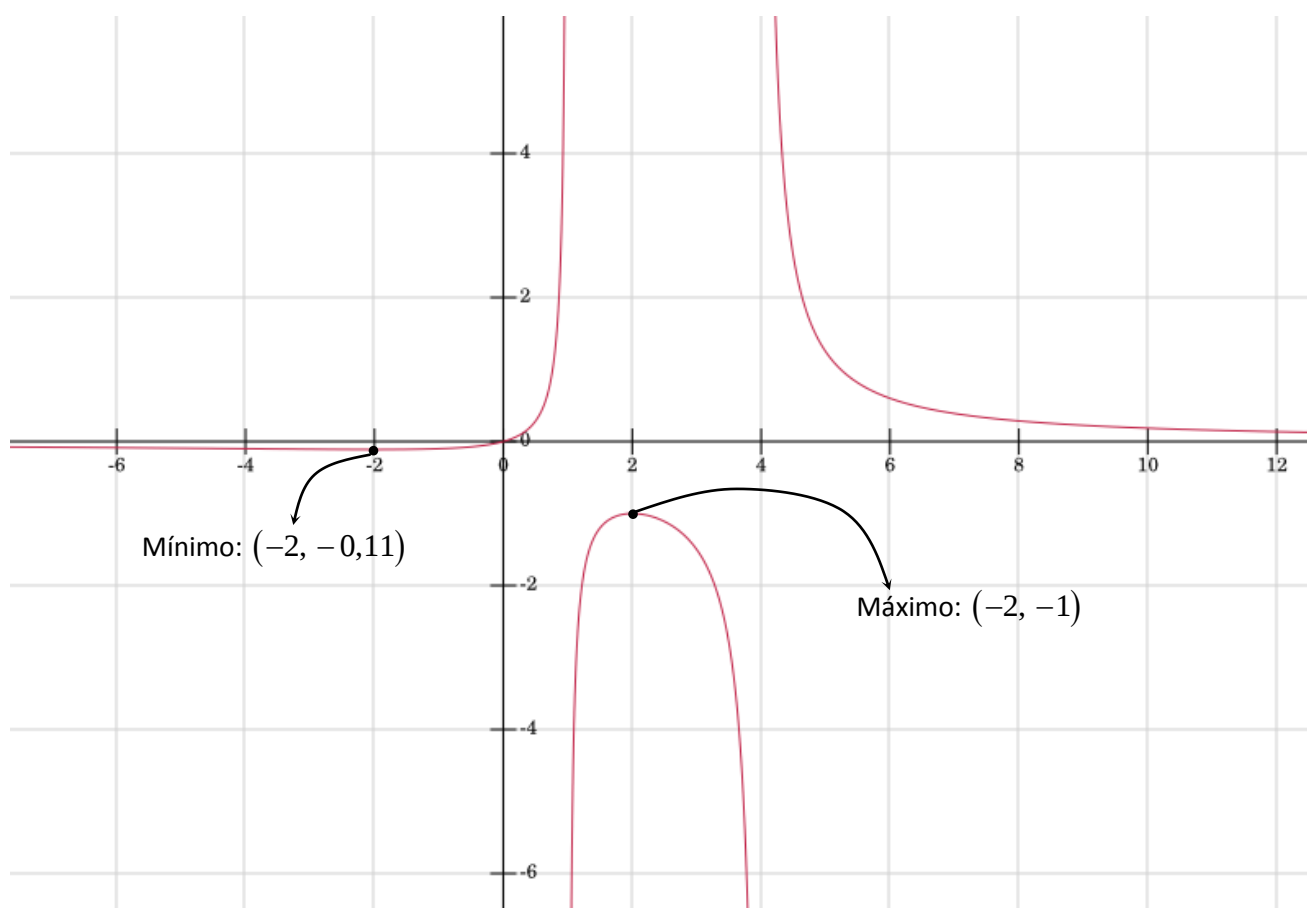
c) f es estrictamente creciente en $(-2, 1) \cup (1, 2)$.

f es estrictamente decreciente en $(-\infty, -2) \cup (2, 4) \cup (4, +\infty)$.

d) f alcanza un mínimo en $x = -2$. Concretamente, sustituyendo, en $\left(-2, -\frac{1}{9}\right) \approx (-2, -0,11)$

f alcanza un máximo en $x = 2$. Concretamente, sustituyendo, en $(2, -1)$.

e) Representación gráfica.



Ejercicio para subir nota

$$4. \quad y' = 0 \Leftrightarrow \frac{6x^2 \ln x + x^2}{2\sqrt{\ln x}} = 0 \Leftrightarrow 6x^2 \ln x + x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 (6 \ln x + 1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 0 \Rightarrow x = 0 \\ 6 \ln x + 1 = 0 \Rightarrow 6 \ln x = -1 \Rightarrow \ln x = -\frac{1}{6} \Rightarrow x = e^{-\frac{1}{6}} \end{cases}$$