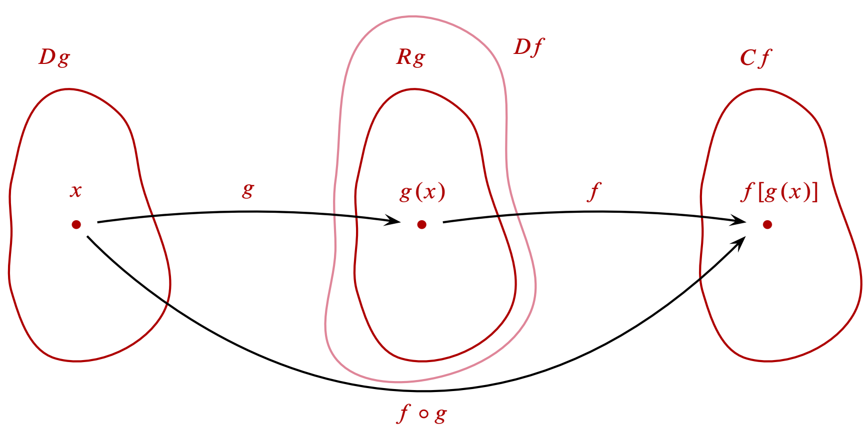
Funciones

Composición de funciones

Definiremos otra nueva función, la composición de g seguida de f, denotada por $f \circ g$. El dominio de $f \circ g$ es un subconjunto del dominio de g y se expresa como $D_{f \circ g}$. El contradominio de $f \circ g$ es el contradominio de f. A cualquier elemento $x \in D_{f \circ g}$ la función $f \circ g$ le hace corresponder $f[g(x)]$. Así:

$$(f \circ g)(x) \stackrel{\text{def}}{=} f[g(x)].$$

La función $f \circ g$ se denomina también como g compuesta con f.



El dominio de esta función es

$$\begin{aligned} D_{f \circ g} &= \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, (f \circ g)(x) \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, f[g(x)] \in \mathbb{R} \right\} = \\ &= \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, g(x) \in \mathbb{R} \ \& \ f[g(x)] \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x \in D_g \ \& \ g(x) \in D_f \right\} = \\ &= \left\{ x \in D_g \,\middle|\, g(x) \in D_f \right\}. \end{aligned}$$

Ejemplo 2.4.1 *Dadas las funciones*

$$f(u) = \sqrt{25 - u}, \quad g(t) = t^2 + 9 \quad \& \quad h(y) = \sqrt{y - 5}\,.$$

1. *Obtener los dominios de f, g & h.*
2. *Obtener $(h \circ g)(x)$ y el dominio de $h \circ g$.*
3. *Obtener $(g \circ h)(x)$ y el dominio de $g \circ h$.*
4. *Obtener $(g \circ f)(x)$ y el dominio de $g \circ f$.*
5. *Obtener $(f \circ g)(x)$ y el dominio de $f \circ g$.*
6. *Obtener $(h \circ f)(x)$ y el dominio de $h \circ f$.*
7. *Obtener $(f \circ h)(x)$ y el dominio de $f \circ h$.*

▼

1. $$\begin{aligned} D_f &= \left\{ u \in \mathbb{R} \,\middle|\, f(u) \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ u \in \mathbb{R} \,\middle|\, \sqrt{25 - u} \in \mathbb{R} \right\} = \\ &= \left\{ u \in \mathbb{R} \,\middle|\, 25 - u \geq 0 \right\} = \left\{ u \in \mathbb{R} \,\middle|\, u \leq 25 \right\} = (-\infty, 25]\,; \\ D_g &= \left\{ t \in \mathbb{R} \,\middle|\, g(t) \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ t \in \mathbb{R} \,\middle|\, (t^2 + 9) \in \mathbb{R} \right\} = \mathbb{R}\,; \\ D_h &= \left\{ y \in \mathbb{R} \,\middle|\, h(y) \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ y \in \mathbb{R} \,\middle|\, \sqrt{y - 5} \in \mathbb{R} \right\} = \\ &= \left\{ y \in \mathbb{R} \,\middle|\, y - 5 \geq 0 \right\} = \left\{ y \in \mathbb{R} \,\middle|\, y \geq 5 \right\} = [5, +\infty)\,. \end{aligned}$$

2. $(h \circ g)(x) = h[g(x)] = h(x^2 + 9) = \sqrt{(x^2 + 9) - 5} = \sqrt{x^2 + 4}.$

   Vemos que $g(x) \in D_h \;\Rightarrow\; g(x) \in [5, +\infty) \;\Rightarrow\; x^2 + 9 \geq 5$.

   $$\begin{aligned} D_{h \circ g} &= \left\{ x \in D_g \,\middle|\, g(x) \in D_h \right\} = \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x^2 + 9 \geq 5 \right\} = \\ &= \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x^2 \geq -4 \right\} = \mathbb{R}\,. \end{aligned}$$

3. $(g \circ h)(x) = g[h(x)] = g(\sqrt{x - 5}) = (\sqrt{x - 5})^2 + 9 = x - 5 + 9 = x + 4;$

   $$\begin{aligned} D_{g \circ h} &= \left\{ x \in D_h \,\middle|\, h(x) \in D_g \right\} = \left\{ x \geq 5 \,\middle|\, \sqrt{x - 5} \in \mathbb{R} \right\} = \\ &= \left\{ x \geq 5 \,\middle|\, x \geq 5 \right\} = \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x \geq 5 \right\} = [5, +\infty)\,. \end{aligned}$$

   Como se puede apreciar la composición de funciones no es conmutativa. Esto es, en general

   $$(g \circ h)(x) \neq (h \circ g)(x).$$

4. $(g \circ f)(x) = g[f(x)] = g(\sqrt{25 - x}) = (\sqrt{25 - x})^2 + 9 = 25 - x + 9 = 34 - x;$

   $$\begin{aligned} D_{g \circ f} &= \left\{ x \in D_f \,\middle|\, f(x) \in D_g \right\} = \left\{ x \leq 25 \,\middle|\, \sqrt{25 - x} \in \mathbb{R} \right\} = \\ &= \left\{ x \leq 25 \,\middle|\, 25 - x \geq 0 \right\} = \left\{ x \leq 25 \,\middle|\, 25 \geq x \right\} = \\ &= \left\{ x \leq 25 \,\middle|\, x \leq 25 \right\} = (-\infty, 25]\,. \end{aligned}$$

5. $(f \circ g)(x) = f[g(x)] = f(x^2+9) = \sqrt{25-(x^2+9)} = \sqrt{25-x^2-9} = \sqrt{16-x^2}\,;$

$$\begin{aligned} D_{f\circ g} &= \left\{ x \in D_g \,\middle|\, g(x) \in D_f \right\} = \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x^2+9 \le 25 \right\} = \\ &= \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x^2 \le 16 \right\} = \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, \sqrt{x^2} \le \sqrt{16} \right\} = \\ &= \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, |\,x\,| \le 4 \right\} = \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, -4 \le x \le 4 \right\} = [-4,4]\,. \end{aligned}$$

6. $(h \circ f)(x) = h[f(x)] = h(\sqrt{25-x}) = \sqrt{\sqrt{25-x}-5}\,;$

$$\begin{aligned} D_{h\circ f} &= \left\{ x \in D_f \,\middle|\, f(x) \in D_h \right\} = \left\{ x \le 25 \,\middle|\, \sqrt{25-x} \in [5,+\infty) \right\} = \\ &= \left\{ x \le 25 \,\middle|\, \sqrt{25-x} \ge 5 \right\} = \left\{ x \le 25 \,\middle|\, 25-x \ge 25 \right\} = \\ &= \left\{ x \le 25 \,\middle|\, -x \ge 0 \right\} = \left\{ x \le 25 \,\middle|\, x \le 0 \right\} = \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x \le 0 \right\} = \\ &= (-\infty, 0]\,. \end{aligned}$$

7. $(f \circ h)(x) = f[h(x)] = f(\sqrt{x-5}) = \sqrt{25-\sqrt{x-5}}\,;$

$$\begin{aligned} D_{f\circ h} &= \left\{ x \in D_h \,\middle|\, h(x) \in D_f \right\} = \left\{ x \ge 5 \,\middle|\, \sqrt{x-5} \le 25 \right\} = \\ &= \left\{ x \ge 5 \,\middle|\, x-5 \le 625 \right\} = \left\{ x \ge 5 \,\middle|\, x \le 630 \right\} = [5, 630]\,. \end{aligned}$$

□

Ejercicios 2.4.1

1. Dadas las funciones $f(x) = \sqrt{7-x}$ & $g(x) = |\,5-8x\,|$, obtener el dominio de f, $(f \circ g)(x)$ y el dominio de $f \circ g$.

2. Dadas las funciones $f(x) = \sqrt{9-2x}$, $g(x) = |\,3x-4\,|$ & $h(x) = x^2-5$, obtener $\left(\dfrac{f}{h}\right)(x)$ y $(f \circ g)(x)$, así como los dominios de las funciones $\dfrac{f}{h}$ & $f \circ g$.

3. Sean las funciones $f(x) = \sqrt{x+3}$ & $g(x) = \dfrac{1}{x^2-5}$. Calcular, obtener o determinar, según proceda:

   a. Dominios de f, g, $f+g$ & fg.

   b. $f[g(-3)]$, $g[f(6)]$ y el dominio de $g[f(x)]$.

4. Si $f(x) = x^3+2$ & $g(x) = \dfrac{2}{x-1}$:

   a. Encuentre los dominios de f y de g.

b. Dé las reglas de correspondencia así como los dominios de las siguientes funciones: $\dfrac{g}{f}$; $\quad g \circ f$ & $f \circ g$.

5. Si $f(x) = \sqrt{4 - x}$ & $g(x) = \dfrac{1}{x^2 - 1}$, obtener, reduciendo a su mínima expresión: $(f \cdot g)(x)$ & $(g \circ f)(x)$.

   En cada caso proporcionar el dominio de la función.

6. Sean: $f(x) = \sqrt{x + 1} \quad \& \quad g(x) = \dfrac{1}{x^2 + 1}$.

   a. Obtenga los dominios de f y de g.
   b. Obtenga reglas de correspondencia y dominios de las funciones $f + g$, f/g, $f \circ g$, $g \circ f$.

7. Si $f(x) = \sqrt{|\,3 - 4x\,| - 4}$, $g(x) = \sqrt{3 - 2x}$ & $h(x) = \dfrac{4}{x^2 - 4}$; encontrar:

   a. El dominio de f.
   b. Los dominios de g y de h.
   c. $(h \circ g)(x)$ y el dominio de $h \circ g$.

8. Dadas las funciones $f(t) = \sqrt{t + 3}$, $g(z) = z^2 - 1 \quad \& \quad h(w) = \sqrt{5 - w}$, obtener:

$$\left(\frac{f + h}{g}\right)(x),\ (g \circ h)(x)\ \&\ (f \circ g)(x)\,,$$

   así como los dominios de las respectivas funciones.

9. Sean $f(v) = v^2 - 2v - 3$ & $g(u) = \sqrt{3 - u}$, determine:

   a. Los dominios de f & g.
   b. $(f \circ g)(x)$ & $(g \circ f)(x)$, indicando el dominio de cada una de las funciones.

10. Sean $f(x) = \sqrt{x - 1}$ & $g(x) = |\,3x + 2\,|$, determine:

    a. Los dominios de f & g.
    b. $(f \circ g)(x)$ & $(g \circ f)(x)$ indicando el dominio de cada función.

11. Dadas las funciones $f(t) = \sqrt{t - 11}$ & $g(u) = |\,2u - 1\,|$, obtenga: $(f \circ g)(x)$, $(g \circ f)(x)$ y los dominios de las funciones $f \circ g$ & $g \circ f$.

12. Si $f(x) = x^2 + 2x + 2$, encuentre dos funciones g para las cuales $(f \circ g)\,(x) = x^2 - 4x + 5$.

Ejercicios 2.4.1 *Composición de funciones, página 3*

1. $D_f : (-\infty, 7]$;
   $(f \circ g)(x) = \sqrt{7 - |5 - 8x|}$;
   $D_{f\circ g} = \left[-\frac{1}{4}, \frac{3}{2}\right]$.

2. $\left(\frac{f}{h}\right)(x) = \frac{\sqrt{9-2x}}{x^2-5}$;
   $D_{\frac{f}{h}} = \left(-\infty, \frac{9}{2}\right] - \left\{-\sqrt{5}, \sqrt{5}\right\}$;
   $(f \circ g)(x) = \sqrt{9 - 2\,|3x - 4\,|}$;
   $D_{(f\circ g)} = \left[-\frac{1}{6}, \frac{17}{6}\right]$.

3. $D_f = (-3, +\infty]$;
   $D_g = \mathbb{R} - \left\{-\sqrt{5}, \sqrt{5}\right\}$;
   $D_{f+g} = \left[-3, -\sqrt{5}\right) \bigcup \left(-\sqrt{5}, \sqrt{5}\right) \bigcup \left(\sqrt{5}, +\infty\right)$;
   $D_{fg} = \left[-3 - \sqrt{5}\right) \bigcup \left(-\sqrt{5}, \sqrt{5}\right) \bigcup \left(\sqrt{5}, +\infty\right)$;
   $f[g(-3)] = \frac{\sqrt{13}}{2}$;
   $g[f(6)] = \frac{1}{4}$;
   $D_{g\circ f} = [-3, 2) \bigcup (2, +\infty)$.

4. $D_f = \mathbb{R}$ y $D_g = \mathbb{R} - \{1\}$;
   $\left(\frac{g}{f}\right)(x) = \frac{2}{(x-1)(x^3+2)}$;
   $D_{\frac{g}{f}} = \mathbb{R} - \left\{1, \sqrt[3]{-2}\right\}$;
   $(g \circ f)(x) = \frac{2}{x^3+1}$;
   $D_{g\circ f} = \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; x \neq -1 \right\} = \mathbb{R} - \{-1\}$;
   $(f \circ g)(x) = \frac{2x^3 - 6x^2 + 6x + 6}{(x-1)^3}$;
   $D_{f\circ g} = \mathbb{R} - \{1\}$.

5. $D_f = (-\infty, 4]$;
   $D_g = \mathbb{R} - \{-1, +1\}$;
   $(f \cdot g)(x) = \frac{\sqrt{4-x}}{x^2-1}$;
   $D_{f\cdot g} = (-\infty, -1) \bigcup (-1, 1) \bigcup (1, 4]$;
   $(g \circ f)(x) = \frac{1}{3-x}$;
   $D_{g\circ f} = (-\infty, 4] - \{3\}$.

6. $D_f = [-1, +\infty)$; $D_g = \mathbb{R}$;
   $(f + g)(x) = \sqrt{x+1} + \frac{1}{x^2+1}$; $D_{f+g} = [-1, +\infty)$;
   $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = (x^2+1)\sqrt{x+1}$; $D_{\frac{f}{g}} = [-1, +\infty)$;
   $(f \circ g)(x) = \sqrt{\frac{x^2+2}{x^2+1}}$; $D_{f\circ g} = \mathbb{R}$;
   $(g \circ f)(x) = \frac{1}{x+2}$; $D_{g\circ f} = [-1, +\infty)$.

7. $D_f = \left(-\infty, -\frac{1}{4}\right] \bigcup \left[\frac{7}{4}, +\infty\right)$;
   $D_g = \left(-\infty, \frac{3}{2}\right]$; $D_h = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$;
   $(h \circ g)(x) = -\frac{4}{2x+1}$;
   $D_{h\circ g} = \left(-\infty, \frac{3}{2}\right] - \left\{-\frac{1}{2}\right\}$.

8. $\left(\frac{f+h}{g}\right)(x) = \frac{\sqrt{x+3} + \sqrt{5-x}}{x^2-1}$;
   $D_{\frac{f+h}{g}} = [-3, 5] - \{\pm 1\}$;
   $(g \circ h)(x) = 4 - x$; $D_{g\circ h} = (-\infty, 5]$;
   $(f \circ g)(x) = \sqrt{x^2+2}$; $D_{f\circ g} = \mathbb{R}$.

9. $D_f = \mathbb{R}$; $D_g = (-\infty, 3]$;
   $(f \circ g)(x) = -x - 2\sqrt{3-x}$; $D_{f\circ g} = (-\infty, 3]$;
   $(g \circ f)(x) = \sqrt{3 - x^2 + 2x + 3} = \sqrt{-x^2 + 2x + 6}$;
   $D_{g\circ f} = [1 - \sqrt{7}, 1 + \sqrt{7}]$.

10. $D_f = [1, +\infty)$; $D_g = \mathbb{R}$;
$(f \circ g)(x) = \sqrt{|\,3x + 2\,| - 1}$;
$D_{f \circ g} = \mathbb{R} - \left(-1, -\dfrac{1}{3}\right)$;
$(g \circ f)(x) = |3\sqrt{x-1} + 2|$; $D_{g \circ f} = [1, +\infty)$.

11. $(f \circ g)(x) = \sqrt{|\,2x - 1\,| - 11}$; $D_{f \circ g} = \mathbb{R} - (-5, 6)$;
$(g \circ f)(x) = \left|2\sqrt{x - 11} - 1\right|$; $D_{g \circ f} = [11, +\infty)$.

12. $g_1(x) = \begin{cases} x - 3 & \text{si } x \geq 2; \\ -x + 1 & \text{si } x < 2. \end{cases}$

$g_2(x) = \begin{cases} -x + 1 & \text{si } x \geq 2; \\ x - 3 & \text{si } x < 2\,. \end{cases}$