1. Dada la función $f(x)=\begin{cases} -x^2-6x-5 & \text{si} \quad x\le -1 \\ x+1 & \text{si} \quad -1<x<1 \\ 3 & \text{si} \quad x=1 \\ \dfrac{2}{x} & \text{si} \quad x>1 \end{cases}$

a) Estudia la continuidad de la función. En el punto o en los puntos en los que no sea continua explica el tipo de discontinuidad existente. **(1,5 puntos)**

b) Represéntala gráficamente. **(1,5 puntos)**

2. Calcular los siguientes límites: **(3 puntos)**

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{9x^4 - 3x + 1}}{3x^2 + 6x - 5} =$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x - 1} \right) =$

c) $\lim\limits_{x \to 7} \dfrac{\sqrt{x - 3} - 2}{x^2 - 8x + 7} =$

3. Dada la función $f(x)=\begin{cases} |x+3| & \text{si} \quad x \le -2 \\ \dfrac{3x}{2x-k} & \text{si} \quad -2 < x < 1 \\ x^2-2x & \text{si} \quad x \ge 1 \end{cases}$

a) Halla el valor de k para que la función sea continua en el punto x = –2. **(1 punto)**

b) Para el valor de k hallado en el apartado anterior, estudia la continuidad de la función en el punto x = 1. **(1 punto)**

c) Representa la función utilizando como valor de k el hallado en el apartado a). **(2 puntos)**

1. Dada la función $f(x) = \begin{cases} -x^2-6x-5 & \text{si} \quad x \le -1 \\ x+1 & \text{si} \quad -1 < x < 1 \\ 3 & \text{si} \quad x = 1 \\ \dfrac{2}{x} & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$

a) Estudia la continuidad de la función. En el punto o en los puntos en los que no sea continua explica el tipo de discontinuidad existente. **(1,5 puntos)**

b) Represéntala gráficamente. **(1,5 puntos)**

a) f es continua en todo su dominio ($\mathbb{R}$) salvo, de momento, en $x=-1$ y $x=1$. Pasamos a estudiar la continuidad en estos puntos:

* $\boxed{x=-1}$

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x\to -1^-} f(x) &= \lim_{x\to -1} (-x^2-6x-5) = 0 \\ \lim_{x\to -1^+} f(x) &= \lim_{x\to -1} (x+1) = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to -1} f(x) = 0$$

Además $f(-1) = 0$. Entonces, como $\lim_{x\to -1} f(x) = 0 = f(-1)$, f es continua en $x=-1$

* $\boxed{x=1}$

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x\to 1^-} f(x) &= \lim_{x\to 1^-} (x+1) = 2 \\ \lim_{x\to 1^+} f(x) &= \lim_{x\to 1^+} \frac{2}{x} = 2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to 1} f(x) = 2$$

Por otro lado $f(1) = 3$. Como $\lim_{x\to 1} f(x) = 2 \neq f(1) = 3$ entonces f no es continua en $x=1$. Hay una discontinuidad evitable.

2. Calcular los siguientes límites: **(3 puntos)**

a) $\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{9x^4-3x+1}}{3x^2+6x-5} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{\sqrt{9x^4-3x+1}}{x^2}}{\frac{3x^2+6x-5}{x^2}} =$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{\frac{9x^4-3x+1}{x^4}}}{\frac{3x^2+6x-5}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{\frac{9x^4}{x^4}-\frac{3x}{x^4}+\frac{1}{x^4}}}{\frac{3x^2}{x^2}+\frac{6x}{x^2}-\frac{5}{x^2}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{9-\frac{3}{x^3}+\frac{1}{x^4}}}{3+\frac{6}{x}-\frac{5}{x^2}} = \frac{\sqrt{9-0+0}}{3+0-0} = \frac{\sqrt{9}}{3} = \frac{3}{3} = 1$$

b) $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\right) = [\infty - \infty] =$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1})(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1})}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+1-(x^2-1)}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}} =$$

$$= \frac{2}{+\infty} = 0$$

c) $\lim_{x\to 7} \frac{\sqrt{x-3}-2}{x^2-8x+7} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 7} \frac{(\sqrt{x-3}-2)(\sqrt{x-3}+2)}{(x^2-8x+7)(\sqrt{x-3}+2)} =$

$$= \lim_{x\to 7} \frac{x-3-4}{(x^2-8x+7)(\sqrt{x-3}+2)} = \lim_{x\to 7} \frac{x-7}{(x^2-8x+7)(\sqrt{x-3}+2)}$$

$$= \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 7} \frac{x-7}{(x-7)(x-1)(\sqrt{x-3}+2)} =$$

$$= \lim_{x\to 7} \frac{1}{(x-1)(\sqrt{x-3}+2)} = \frac{1}{6\cdot(2+2)} = \frac{1}{24}$$

3. Dada la función $f(x) = \begin{cases} |x+3| & \text{si} \quad x \le -2 \\ \dfrac{3x}{2x-k} & \text{si} \quad -2 < x < 1 \\ x^2 - 2x & \text{si} \quad x \ge 1 \end{cases}$

a) Halla el valor de k para que la función sea continua en el punto x = –2. **(1 punto)**

b) Para el valor de k hallado en el apartado anterior, estudia la continuidad de la función en el punto x = 1. **(1 punto)**

c) Representa la función utilizando como valor de k el hallado en el apartado a) **(2 puntos)**

a) $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -2} |x+3| = 1 \\ \lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to -2^+} \dfrac{3x}{2x-k} = \dfrac{-6}{-4-k} \end{array}\right\}$ Para que exista el límite

$$1 = \frac{-6}{-4-k} \Rightarrow -4-k = -6 \Rightarrow -k = -2 \Rightarrow \underline{\underline{k=2}}$$

Para $k = 2$ tenemos pues: $\lim\limits_{x \to -2} f(x) = 1 = f(-2)$ y por tanto f es continua en $x = -2$.

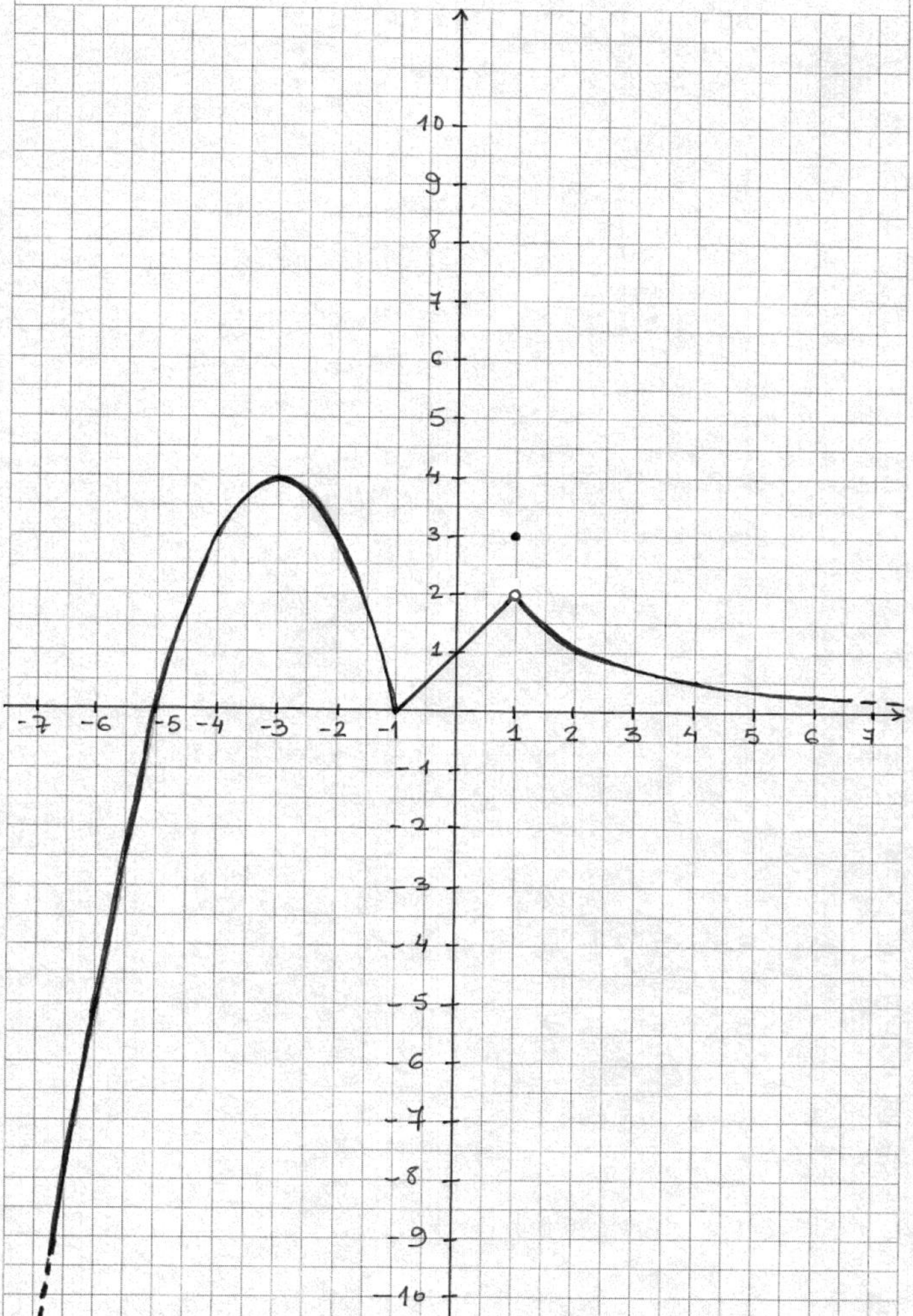
b) Si $k = 2$ la función es $f(x) = \begin{cases} |x+3| & \text{si} \quad x \le -2 \\ \dfrac{3x}{2x-2} & \text{si} \quad -2 < x < 1 \\ x^2 - 2x & \text{si} \quad x \ge 1 \end{cases}$

Entonces, en el punto $x = 1$:

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{3x}{2x-2} = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} (x^2-2x) = -1 \end{array}\right\} \Rightarrow$ como no coinciden los límites laterales, f no es continua en $x = 1$.

Hay una DISCONTINUIDAD DE SALTO INFINITO.

Representación gráfica correspondiente al ejercicio 1



Representación gráfica correspondiente al ejercicio 3