

1. Estudia la continuidad de la función $f(x) = \begin{cases} \frac{6}{x-4} & \text{si } x < -2 \\ 3 & \text{si } x = -2 \\ x^2 - 5 & \text{si } -2 < x < 4 \\ \frac{4}{x} + 1 & \text{si } x \geq 4 \end{cases}$ en los puntos $x = -2$ y $x = 4$.

Caso de que no sea continua en alguno de ellos explica el tipo de discontinuidad. **(2 puntos)**

2. Calcula los siguientes límites **(1 punto; 0,5 puntos por apartado)**:

a) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2 - 4x - 6}{x^2 + 4x^2 - 7x - 10}$ b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^4 + 3x^3 - 2x + 1}{x^5 - 7x^3 - 5x^4 - 2x^2 + 2}$

3. Dada la función $f(x) = \frac{x^2 + 2}{x^2 - 2}$, contesta a los siguientes apartados:

- a) Halla los puntos de corte con los ejes. **(0,5 puntos)**
b) Halla las asíntotas verticales y horizontales. **(1 punto)**
c) Realiza una representación gráfica aproximada de la función. **(0,5 puntos)**

4. Calcula la derivada de la función $f(x) = \frac{2x^2 - 4}{x - 2}$ en el punto $x = 1$. **(1 punto)**

5. La estación meteorológica de Pueblaseca registró 70 días de lluvias el pasado año, según se muestra en la tabla siguiente:

litros/m ²	[0, 6)	[6, 12)	[12, 18)	[18, 24)	[24, 30)	[30, 36)
Nº de días	3	7	19	23	12	6

- a) Halla la mediana y la moda. **(1 punto)**
b) Halla media, la varianza y la desviación típica. **(1 punto)**
6. La siguiente tabla muestra el número de gérmenes patógenos (en miles por cm³) de un determinado cultivo según el tiempo transcurrido:

Número de horas (X)	0	1	2	3	4	5
Número de gérmenes (Y)	20	26	33	41	47	53

- a) Calcula el coeficiente de correlación lineal, interpretando el resultado. **(1 punto)**
b) Halla la recta de regresión de Y sobre X. ¿Qué cantidad de gérmenes se puede predecir que habrá cuando pasen 6 horas? **(1 punto)**

$$\textcircled{1} \left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{6}{x-4} = -1 \\ \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -2^+} (x^2 - 5) = -1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -2} f(x) = -1 \neq f(-2) = 3 \Rightarrow$$

$\Rightarrow f$ no es continua. DISCONTINUIDAD EVITABLE en $x = -2$.

$$\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^-} (x^2 - 5) = 11 \quad \left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 4^+} \left(\frac{4}{x} + 1 \right) = 2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \neq \lim_{x \rightarrow 4} f(x) \Rightarrow f \text{ no es continua}$$

en $x = 4$. DISCONTINUIDAD DE SALTO FINITO. Longitud del salto $L = 9$.

$$\textcircled{2} \text{ a) } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2 - x - 3}{x^3 + 4x^2 - 7x - 10} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(2x-3)}{(x+1)(x^2+3x-10)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x-3}{x^2+3x-10} = \frac{-5}{-12} = \underline{\underline{\frac{5}{12}}}.$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^4 + 3x^3 - 2x + 1}{x^5 - 7x^3 - 5x^4 - 2x^2 + 2} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \underline{\underline{\frac{-2}{5}}} \text{ (cuando los grados son iguales se dividen los coeficientes líderes).}$$

$$\textcircled{3} \text{ a) Eje X: } y = 0 \Rightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow x_1 = 1, x_2 = -2 : \underline{\underline{(1, 0)}}; \underline{\underline{(-2, 0)}}$$

$$\text{Eje Y: } x = 0 \Rightarrow y = 1 : \underline{\underline{(0, 1)}}$$

$$\text{b) Verticales: } x^2 - x - 2 = 0; x_1 = 2, x_2 = -1$$

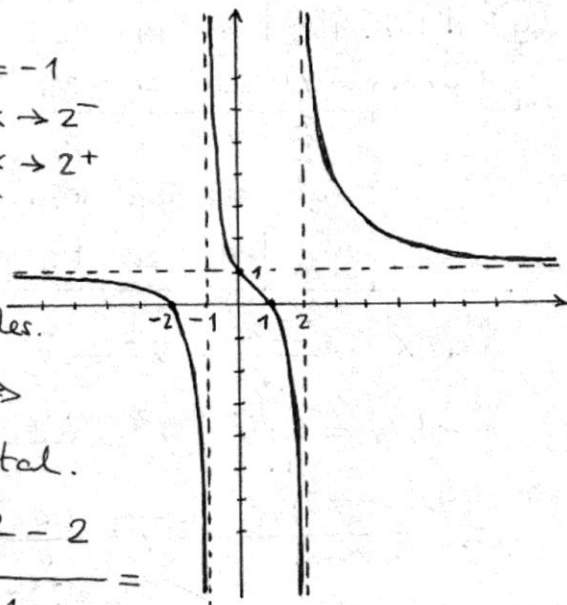
$$* \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - x - 2} = \frac{4}{0} = \begin{cases} -\infty & \text{si } x \rightarrow 2^- \\ +\infty & \text{si } x \rightarrow 2^+ \end{cases}$$

$$* \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - x - 2} = \frac{-2}{0} = \begin{cases} -\infty & \text{si } x \rightarrow -1^- \\ +\infty & \text{si } x \rightarrow -1^+ \end{cases}$$

$\Rightarrow \underline{\underline{x=2}}$ y $\underline{\underline{x=-1}}$ son asíntotas verticales.

$$\text{Horizontales: } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - x - 2} = 1 \Rightarrow$$

$\Rightarrow \underline{\underline{y=1}}$ es una asíntota horizontal.



$$\textcircled{4} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{2x^2 - x - 3}{x - 2} - 2}{x - 1} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{2x^2 - x - 3 - 2x + 4}{x - 2}}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - 3x + 1}{(x - 1)(x - 2)} = \left[\frac{0}{0} \right] =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(2x - 1)}{(x - 1)(x - 2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x - 1}{x - 2} = \frac{1}{-1} = -1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{f'(1) = -1}}$$

⑤

	f_i	x_i	$x_i f_i$	$x_i^2 f_i$	F_i
(0,6)	3	3	9	27	3
[6,12)	7	9	63	567	10
[12,18)	19	15	285	4275	29
[18,24)	23	21	483	10143	52
[24,30)	12	27	324	8748	64
[30,36)	6	33	198	6534	70
	70		1362	30294	

$\frac{N}{2} = 35$

a) $Me = e_{i-1} + \frac{\frac{N}{2} - F_{i-1}}{F_i - F_{i-1}} \cdot a_i = 18 + \frac{35 - 29}{52 - 29} \cdot 6 \Rightarrow \underline{\underline{Me = 19'565}}$

$Mo = e_{i-1} + \frac{f_i - f_{i-1}}{(f_i - f_{i-1}) + (f_i - f_{i+1})} \cdot a_i = 18 + \frac{23 - 19}{(23 - 19) + (23 - 12)} \cdot 6 \Rightarrow \underline{\underline{Mo = 19'6}}$

b) $\bar{x} = \frac{\sum x_i f_i}{N} = \frac{1362}{70} = \underline{\underline{19'457}}$. $Var(X) = \frac{\sum x_i^2 f_i}{N} - \bar{x}^2 =$
 $= \frac{30294}{70} - 19'457^2 = \underline{\underline{54'191}}$; $\sigma = \sqrt{Var(X)} = \sqrt{54'191} \approx \underline{\underline{7'36}}$

⑥

Nº horas (X)	0	1	2	3	4	5	15
Nº gérmenes (Y)	20	26	33	41	47	53	220
x_i^2	0	1	4	9	16	25	55
y_i^2	400	676	1089	1681	2209	2809	8864
$x_i y_i$	0	26	66	123	188	265	668

$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{N} = \frac{15}{6} = \underline{\underline{2'5}}$
 $\bar{y} = \frac{\sum y_i}{N} = \frac{220}{6} = \underline{\underline{36'67}}$

$Var(X) = \frac{\sum x_i^2}{N} - \bar{x}^2 = \frac{55}{6} - 2'5^2 = \underline{\underline{2'92}}$; $\sigma_x = \sqrt{Var(X)} = \underline{\underline{1'708}}$

$Var(Y) = \frac{\sum y_i^2}{N} - \bar{y}^2 = \frac{8864}{6} - 36'67^2 = \underline{\underline{132'64}}$; $\sigma_y = \sqrt{Var(Y)} = \underline{\underline{11'517}}$

$\sigma_{xy} = \frac{\sum x_i y_i}{N} - \bar{x} \bar{y} = \frac{668}{6} - 2'5 \cdot 36'67 = \underline{\underline{19'658}}$

a) $r = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} = \frac{19'658}{1'708 \cdot 11'517} = \underline{\underline{0'9993}}$. Como $r \approx 1$ la correlación es muy fuerte y positiva.

b) $y = \bar{y} + \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2} (x - \bar{x}) \Rightarrow y = 36'67 + \frac{19'658}{2'92} (x - 2'5) \Rightarrow$

$\Rightarrow y = 36'67 + 6'732(x - 2'5) \Rightarrow \underline{\underline{y = 6'732x + 19'84}}$

Si $x = 6 \Rightarrow y = 6'732 \cdot 6 + 19'84 = \underline{\underline{60'232}}$ (número de gérmenes pasadas 6 horas).