

1. Calcula los siguientes límites (caso de que el resultado sea ∞ indicar si es $+\infty$ o $-\infty$). **[2 puntos: 0,5 puntos por apartado]**

a) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x -}{-x^2 + x + 1}$; b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{-2x^3 + x - x +}{x^2 - 2}$; c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^3 - x + 2x - 8}{4x^3 - 5x + 6x - 7}$; d) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 2x - x -}{x^3 + x - 8x - 12}$

2. Dada la función $y = \frac{x^3 - 8}{x^2 + -2}$ calcular:

- a) Dominio. **[0,5 puntos]**
b) Asíntotas, tanto verticales como horizontales. Si tiene asíntotas verticales hallar la tendencia por la izquierda y por la derecha de las mismas. **[1,5 puntos: 1 punto las verticales y tendencias; 0,5 puntos las horizontales]**
c) Puntos de corte con el eje X y con el eje Y. **[1 punto: 0,6 puntos los del eje X; 0,4 puntos el del eje Y]**
d) Representación gráfica aproximada. **[1 punto]**

3. Dada la siguiente función definida por trozos:

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 3 & \text{si } x \leq -1 \\ \frac{1}{x - 2} & \text{si } -1 < x < 1 \\ x^2 - 2x & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

- a) Estudiar la continuidad en los puntos $x = -1$ y $x = 1$. Caso de que sea continua explicar claramente por qué y caso de que no sea continua decir el tipo de discontinuidad existente. **[2 puntos]**
b) Realiza una representación gráfica aproximada de la función. **[1 punto]**
4. Resuelve las siguientes ecuaciones logarítmicas. **[1 punto; 0,5 puntos por apartado]**

a) $\log x = \frac{1}{2} \log(2)$

b) $\log \sqrt{x} = 1 - \log \sqrt{3x + 5}$

$$\textcircled{1} \text{ a) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x-6}{-x^2+x+1} = \frac{0}{-5} = \underline{\underline{0}}$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-2x^3+x^2-x+3}{x^2-2x+1} = \left[\frac{1}{0} \right] = \begin{cases} +\infty & \text{si } x \rightarrow 1^- \\ +\infty & \text{si } x \rightarrow 1^+ \end{cases}$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^3-x+2x^4-8}{4x^3-5x^4+6x-7} = \frac{2}{-5} = \underline{\underline{-\frac{2}{5}}}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3+2x^2-x-2}{x^3+x^2-8x-12} &= \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x+1)(x-1)(x+2)}{(x-3)(x+2)^2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x+1)(x-1)}{(x-3)(x+2)} = \left[\frac{3}{0} \right] = \begin{cases} +\infty & \text{si } x \rightarrow -2^- \\ -\infty & \text{si } x \rightarrow -2^+ \end{cases} \end{aligned}$$

$\textcircled{2} \text{ a) } \text{Dom } f = \mathbb{R} - \{-2, 1\}$
ya que las soluciones de
 $x^2+x-2=0$ son $x_1=-2, x_2=1$.

b) Verticales
 $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3-8}{x^2+x-2} = \begin{cases} -\infty & \text{si } x \rightarrow -2^- \\ +\infty & \text{si } x \rightarrow -2^+ \end{cases}$

$\Rightarrow \boxed{x=-2}$ es A.V.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3-8}{x^2+x-2} = \begin{cases} +\infty & \text{si } x \rightarrow 1^- \\ -\infty & \text{si } x \rightarrow 1^+ \end{cases}$$

$\Rightarrow \boxed{x=1}$ es A.V.

Horizontales

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3-8}{x^2+x-2} = \begin{cases} -\infty & \text{si } x \rightarrow -\infty \\ +\infty & \text{si } x \rightarrow +\infty \end{cases}$$

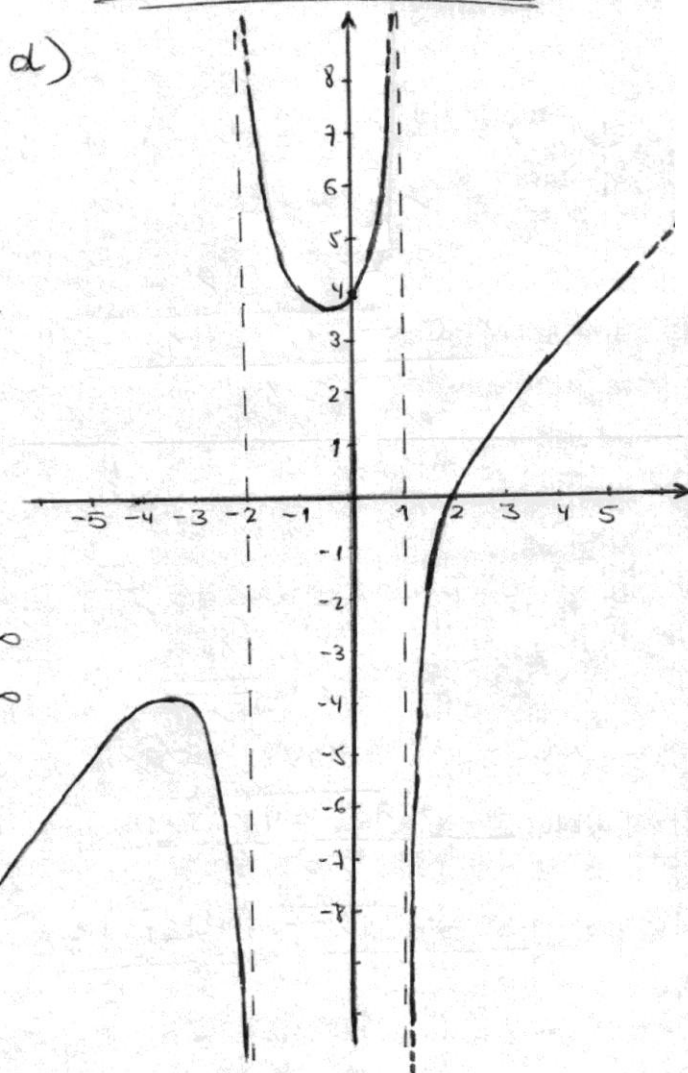
$\Rightarrow$ la función no tiene A.H.

c) Eje X. $y=0$; $x^3-8=0$;

$$x^3=8; x=\sqrt[3]{8}=2 \Rightarrow \underline{\underline{(2,0)}}$$

Eje Y. $x=0 \Rightarrow y=4$

$$\Rightarrow \underline{\underline{(0,4)}}$$



3) $x = -1$

a) $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} (2x+3) = 1$
 $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{1}{x-2} = -\frac{1}{3}$ $\Rightarrow$

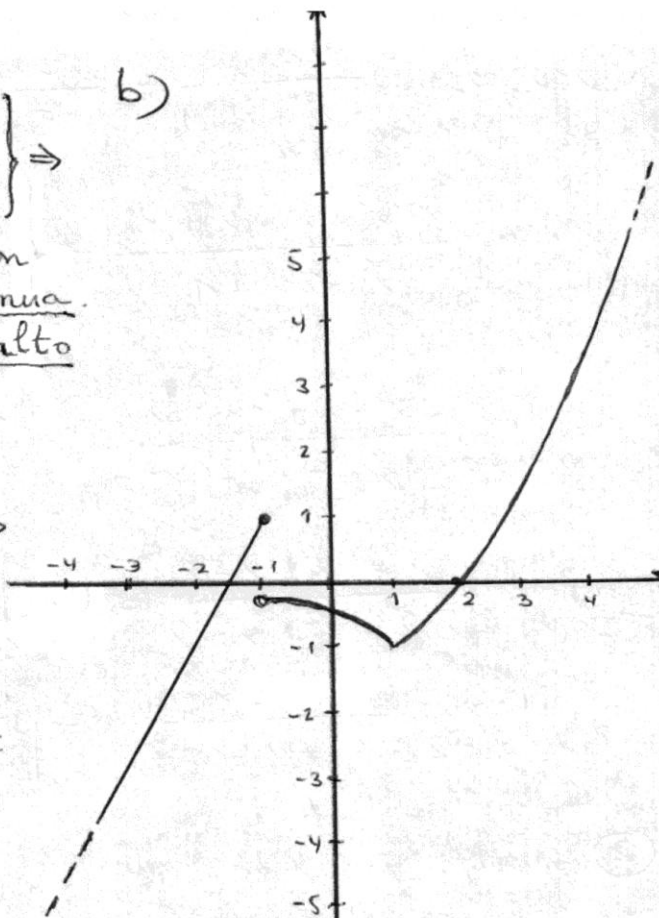
Como los límites laterales son distintos, en $x = -1$, no es continua. Hay una discontinuidad de salto finito.

$x = 1$

$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-2} = -1$
 $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - 2x) = -1$ $\Rightarrow$

$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -1 = f(1)$

Por tanto f es continua en $x = 1$.



4) a) $\log x = \frac{1}{2} \log(x+2)$;

$2 \log x = \log(x+2)$; $\log x^2 = \log(x+2)$;

$x^2 = x + 2$; $x^2 - x - 2 = 0$;

$x = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} = \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = -1 \end{cases}$

La solución $x_2 = -1$ hay que descartarla porque $\log x$ no tiene sentido si x es negativo.

b) $\log \sqrt{x} = 1 - \log \sqrt{3x+5}$; $\log \sqrt{x} = \log 10 - \log \sqrt{3x+5}$;

$\log \sqrt{x} = \log \frac{10}{\sqrt{3x+5}}$; $\sqrt{x} = \frac{10}{\sqrt{3x+5}}$; $x = \frac{100}{3x+5}$;

$x(3x+5) = 100$; $3x^2 + 5x - 100 = 0$;

$x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-100)}}{2 \cdot 3} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 + 1200}}{6} =$

$= \frac{-5 \pm \sqrt{1225}}{6} = \frac{-5 \pm 35}{6} = \begin{cases} x_1 = 5 \\ x_2 = \frac{-40}{6} = -\frac{20}{3} \end{cases}$

(la 2ª solución hay que descartarla)