LÍMITES DE FUNCIONES
CONTINUIDAD

MATEMÁTICAS I 1º Bachillerato

Alfonso González
IES Fernando de Mena
Dpto. de Matemáticas

I.E.S. "Fernando de Mena"
Socuéllamos (Ciudad Real)

I) IDEA INTUITIVA DE $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ *(Ver págs. 274 a 277 del libro de texto)*

Ejemplo 1: La función $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x-1}$ no está definida en x=1; investigar, rellenando las siguientes tablas (mediante calculadora), su comportamiento en las proximidades de dicho punto, y explicar gráficamente la situación:

NUMÉRICAMENTE

$x\to 1^-$	0,9	0,99	0,999…
$f(x)\to$			

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) =$

$x\to 1^+$	1,1	1,01	1,001…
$f(x)\to$			

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) =$

$\Rightarrow \boxed{\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \quad}$

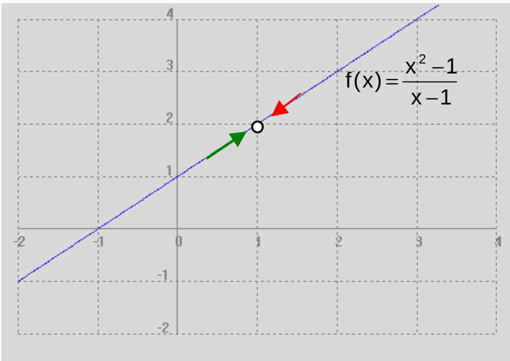
ANALÍTICAMENTE

En la práctica, los límites no se suelen calcular de esta forma, sino operando:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x+1)\cancel{(x-1)}}{\cancel{x-1}} = \lim_{x\to 1}(x+1) = 2$$

Es decir, nótese que la f(x) del enunciado se comporta como la recta y=x+1, salvo en x=1 (punto en el cual no está definida); por lo tanto, su representación gráfica es:

GRÁFICAMENTE



Vemos que cuando las x se acercan a 1^- (flecha izqda.; 1ª tabla) las imágenes correspondientes tienden a 2^-, mientras que cuando las x se acercan a 1^+ (flecha dcha.; 2ª tabla) las imágenes correspondientes tienden a 2^+. Y todo ello es independiente de que, exactamente en x=1, la función no está definida.

■ Conclusiones:

1º Para que exista límite han de coincidir los límites laterales.

2º A efectos de $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, no hay que tener en cuenta lo que ocurre exactamente en x=a, sino en las proximidades; de hecho, hay casos en los que en un punto no existe imagen pero sí límite (como en el ejemplo anterior), y esta es precisamente la utilidad del concepto de límite.

3º De todos modos, normalmente existen límite e imagen, y ambos coinciden, como en el siguiente ejemplo:

Ejemplo 2: Dada $f(x)=x^2$, obtener numéricamente, mediante las siguientes tablas, $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$:

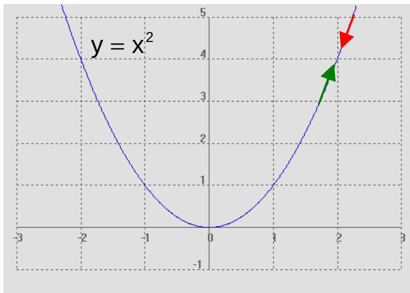
$x\to 2^-$	1,9	1,99	1,999…
$f(x)\to$			

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) =$

$x\to 2^+$	2,1	2,01	2,001…
$f(x)\to$			

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) =$

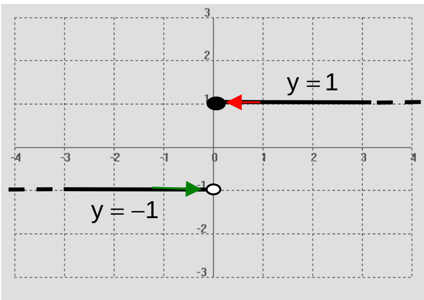
$\Rightarrow \boxed{\lim\limits_{x\to 2} f(x) =}$



Es decir, cuando las x se acercan a 2^- (flecha izqda.; 1ª tabla) las imágenes correspondientes tienden a 4^-, mientras que cuando las x se acercan a 2^+ (flecha dcha.; 2ª tabla) las imágenes correspondientes tienden a 4^+. En este caso, la función sí está definida precisamente en x=2, y su valor es 4; es decir, en este ejemplo límite e imagen coinciden (lo cual, por cierto, es lo más habitual).

■ Veamos ahora un ejemplo de función en el que no hay límite:

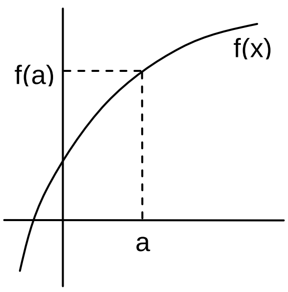
Ejemplo 3: Dada $f(x)=\begin{cases} -1 & \text{si } x<0 \\ 1 & \text{si } x\ge 0 \end{cases}$ se pide: **a)** Representarla. **b)** Hallar $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ gráficamente.



$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} (-1) = -1 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \ \ 1 \ \ = \ \ 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\nexists \lim\limits_{x\to 0} f(x)}$$

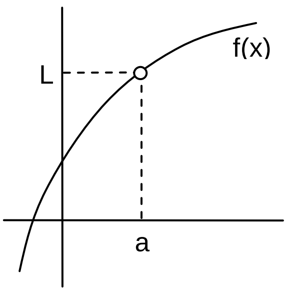
En este caso, al acercarnos a $x=0^-$ por la rama izquierda, las imágenes tienden exactamente a -1 (aunque precisamente en x=0 no tengan el valor esperado, sino 1; de nuevo, téngase en cuenta que a efectos del límite no hay que tener en cuenta lo que hace la función exactamente en el punto sino en sus proximidades…), mientras que al acercarnos a $x=0^+$ por la rama derecha, las imágenes tienden exactamente a 1. Por lo tanto, **como no coinciden los límites laterales, el límite global no existe**.

■ Podríamos ver más ejemplos, pero todos ellos se resumirían en alguno de los 4 casos del siguiente esquema; va a existir límite cuando $x\to a$ sólo en los tres primeros supuestos:



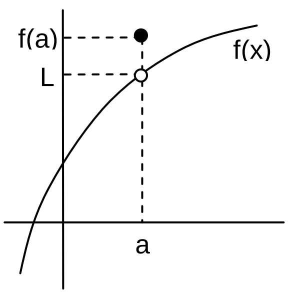
$\exists \lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$

[Lo más habitual]

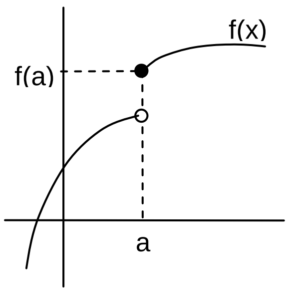


$\exists \lim\limits_{x\to a} f(x) = L$

[aunque $\nexists f(a)$]



$\exists \lim\limits_{x\to a} f(x) = L \neq f(a)$



$\nexists \lim\limits_{x\to a} f(x)$

[aunque $\exists f(a)$]

Como resumen: **«A efectos gráficos, no va a haber $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ si en x=a las dos ramas no coinciden»**

Ejercicios final tema: 1, 2, 3

Ejercicios libro: ***pág. 296: 11*** *(función definida a trozos, analíticamente)*

II) $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$. ASÍNTOTA VERTICAL *(Ver pág. 285 del libro de texto)*

Ejemplo 4: Vemos fácilmente que la función $f(x)=\dfrac{1}{(x-3)^2}$ no está definida en x=3; investigar, rellenando las siguientes tablas (inténtese sin calculadora), su comportamiento en las proximidades de dicho punto, y explicar analítica y gráficamente la situación:

NUMÉRICAMENTE

$x\to 3^-$	2,9	2,99	2,999…
$f(x)\to$			

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=$

$x\to 3^+$	3,1	3,01	3,001…
$f(x)\to$			

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=$

$\Rightarrow \boxed{\lim\limits_{x\to 3} f(x)=\quad}$

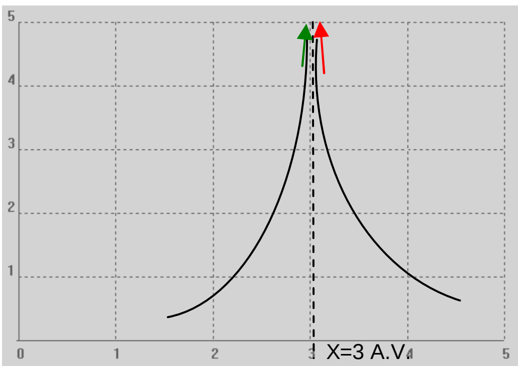
ANALÍTICAMENTE

En la práctica, se procede así[1]:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{1}{(x-3)^2}=\dfrac{1}{(0^-)^2}=\dfrac{1}{0^+}=\infty\\ \lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{1}{(x-3)^2}=\dfrac{1}{(0^+)^2}=\dfrac{1}{0^+}=\infty\end{array}\right\}\Rightarrow \lim\limits_{x\to 3}\dfrac{1}{(x-3)^2}=\infty$$

GRÁFICAMENTE

Gráficamente, la situación es la siguiente:



Es decir, cuando las x se acercan a 3^- (flecha izqda; rama izquierda) las imágenes correspondientes tienden a hacerse infinitamente grandes i.e. ∞, y cuando las x se aproximan a 3^+ (flecha dcha.; rama derecha) las imágenes tienden también a ∞. Y todo ello, volvemos a insistir, es independiente de que concretamente en x=3 la función no está definida. Esta es precisamente la **utilidad de la noción de límite:** incluso **aunque la función no esté definida en un punto, el límite da cuenta del comportamiento de la función en dicho punto**.

---

[1] 0^+ o 0^- se conocen como *infinitésimos*.

En el ejemplo anterior, se dice que f(x) presenta una asíntota vertical en x=3.

- **Observaciones:**

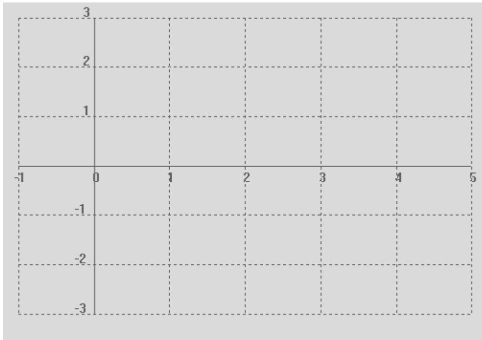
1º Cuando por sustitución directa en un límite obtengamos k/0, automáticamente tenemos que plantear límites laterales, para discernir si el denominador es 0^+ o 0^-, lo cual determinará si el límite finalmente es ∞ o $-\infty$ (en función también del signo de k).

2º Nótese que, a la hora de calcular un límite, en el momento en que sustituyamos en la función, desaparece el símbolo de lim.

- **Definición de asíntota vertical:** $\boxed{\lim_{x\to a} f(x) = \underset{(o\ -\infty)}{\infty} \Leftrightarrow x = a \ \text{A.V.}}$

Ejemplo 5: Estudiar analíticamente $\lim_{x\to 3}\frac{1}{x-3}$ y explicar gráficamente la situación. ¿Qué asíntota vertical presenta la función?

$$\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to 3^-}\frac{1}{x-3}= \\ \lim_{x\to 3^+}\frac{1}{x-3}=\end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\lim_{x\to 3}\frac{1}{x-3}=}$$



Ejercicios final tema: 4, 5

Ejercicios libro: ***pág. 285: 1 y 2*** *(analíticamente);* ***pág. 296: 8*** *(gráficamente)*

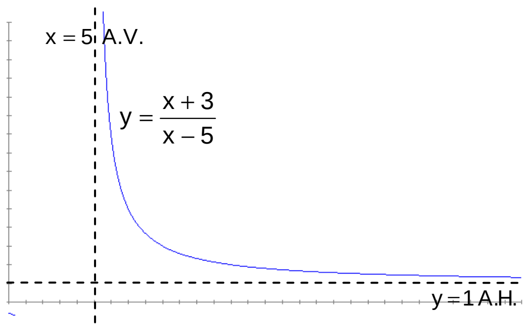
III) $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$. ASÍNTOTA HORIZONTAL *(Ver págs. 282–283 y 286 del libro de texto)*

Ejemplo 6: Estudiar, mediante la siguiente tabla de valores, $\lim_{x\to\infty}\frac{x+3}{x-5}$

x	10	100	1 000	10 000… ∞
$f(x)=\frac{x+3}{x-5}$				

$\Rightarrow \boxed{\lim_{x\to\infty}\frac{x+3}{x-5}=}$

En la práctica, como $x\to\infty$, lógicamente podemos despreciar el efecto de sumar o restar un número finito a x, por lo cual podemos proceder de la siguiente forma:



$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+3}{x-5} \approx \lim_{x\to\infty}\frac{x}{x} = \lim_{x\to\infty} 1 = 1$$

Es decir, **cuando $x\to\infty$** (o $-\infty$), **nos quedaremos con el término de mayor grado del polinomio** (lo que se conoce como **término dominante**), y despreciaremos términos de menor grado. ¡Nótese que esto sólo tiene sentido cuando $x\to\infty$ (o $-\infty$)! Ésta será una técnica muy utilizada para calcular límites.

Gráficamente, la situación está indicada al margen.

Es decir, cuando las x se hacen cada vez más grandes, las imágenes correspondientes tienden a aproximarse cada vez más a 1^+, pero sin llegar a alcanzar jamás el valor 1. Se dice entonces que f(x) presenta una asíntota horizontal de ecuación y=1. (Por cierto que, por las razones explicadas en el anterior apartado, también presenta una A.V. en x=5).

- **Definición de asíntota horizontal**: $\boxed{\lim\limits_{\substack{x\to\infty \\ (o\ -\infty)}} f(x) = L \Leftrightarrow y = L \text{ A.H.}}$

- **Observaciones**: **1º** La gráfica puede cortar a la A.H. para valores finitos de x

  2º En cambio, la gráfica de una función nunca puede cortar a una A.V.

  3º En el próximo tema veremos un tercer tipo: las asíntotas oblicuas

Ejercicio final tema: 6

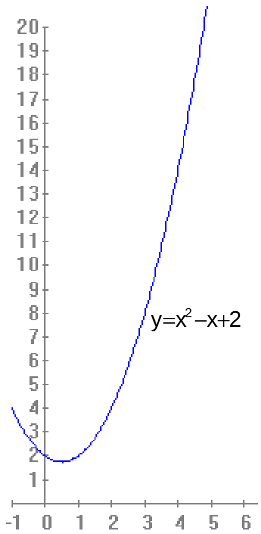
Ejercicios libro: ***pág. 283: 1*** *(analíticamente)*

IV) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$. RAMAS INFINITAS *(Ver págs. 286 a 289 del libro de texto)*

Ejemplo 7: Obtener $\lim\limits_{x\to\infty} (x^2 - x + 2)$ mediante la siguiente tabla de valores:

x	10	100	1 000… ∞
$f(x)=x^2-x+2$			

$\Rightarrow \boxed{\lim\limits_{x\to\infty} (x^2 - x + 2) = \qquad}$



Es decir, cuando las x se hacen cada vez más grandes, las imágenes correspondientes tienden a hacerse tan grandes como queramos, como queda reflejado en la gráfica adjunta. En la práctica, y como ya hemos comentado en el apartado anterior, **cuando x→∞** (o -∞) **nos quedaremos con el término de mayor grado del polinomio** (lo que se conoce como **término dominante**), y despreciaremos términos de menor grado:

$$\lim_{x\to\infty} (x^2 - x + 2) \approx \lim_{x\to\infty} x^2 = \infty^2 = \infty$$

De nuevo, adviértase que esta forma de proceder sólo tiene sentido cuando x→∞ (o -∞), no cuando x tiende a un número finito. En el ejemplo anterior, se dice además que f(x) presenta una rama infinita.

- **Regla práctica:** $\boxed{\lim\limits_{\substack{x\to\infty \\ (o\ -\infty)}} P(x) = \lim\limits_{\substack{x\to\infty \\ (o\ -\infty)}} (\text{tº de mayor grado})}$

Ejercicio final tema: 7

Ejercicios libro: ***pág. 282: 1***; ***pág. 296: 9*** *(gráficamente);*
pág. 287: 3 y 4; ***pág. 288: 1 y 2***; ***pág. 289: 3 y 4*** *(analíticamente)*

V) PROPIEDADES DE LOS LÍMITES[2]

1º) «El límite –en caso de existir– es único»

2º) $\boxed{\lim [f(x) \pm g(x)] = \lim f(x) \pm \lim g(x)}$ es decir, «El límite de la suma (diferencia) es la suma (diferencia) de los límites».

3º) $\boxed{\lim [f(x) \cdot g(x)] = \lim f(x) \cdot \lim g(x)}$ es decir, «El límite del producto es el producto de los límites».

4º) $\boxed{\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim f(x)}{\lim g(x)}}$ (siempre y cuando lim g(x)≠0)

5º) $\boxed{\lim k = k}$ es decir, «El límite de una constante es igual a dicha constante»

6º) $\boxed{\lim [k \cdot f(x)] = k \cdot \lim f(x)}$ es decir, «Las constantes multiplicativas pueden salir (o entrar) en el límite».

7º) Límite de una potencia: $\boxed{\lim [f(x)]^{g(x)} = [\lim f(x)]^{\lim g(x)}}$ **Ejemplo:** $\lim_{x\to\infty} e^x = e^\infty = \infty$

8º) Límite de una raíz: $\boxed{\lim \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim f(x)}}$

9º) Límite de un logaritmo: $\boxed{\lim \log f(x) = \log \lim f(x)}$

VI) LÍMITES INFINITOS E INDETERMINACIONES

- **SUMA Y RESTA:** $\boxed{\infty+\infty=\infty \qquad \infty+k=\infty \qquad \infty-\infty=\textbf{INDTDO.} \qquad -\infty-\infty=-\infty}$

Nótese que no podemos concluir que ∞–∞ sea siempre igual a 0, puesto que ambos ∞ pueden ser, en general, de distinto orden[3]; por lo tanto, **el resultado de ∞–∞ tendrá valores distintos dependiendo de cada ejemplo concreto, y se dice entonces que su resultado es indeterminado, o bien que se trata de una indeterminación**. La mayor parte de las indeterminaciones se deshacen operando. Veamos un sencillo ejemplo justificativo:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{2}-\frac{x}{2}\right)=\infty-\infty=\text{INDTDO.}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+2-x}{2}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{2}=\lim_{x\to\infty}1=1$$

Es decir, en este caso concreto ∞–∞ ha resultado ser igual a 1, pero veremos muchos más ejemplos en los que puede resultar otro número (incluido, por supuesto 0), o ∞, o –∞, o incluso no existir.

[2] Todas estas propiedades son válidas independientemente de que x→∞ o a un valor finito. Pueden consultarse las demostraciones de estas propiedades en el libro de texto.

[3] En el caso de una incógnita, sí es cierto que **a–a**, o **x–x**, etc. es obviamente igual a cero; ahora bien, adviértase que en el caso de ∞–∞ estamos hablando de límites, es decir, ambos ∞ no tienen por qué ser exactamente iguales, sino que pueden ser de distinto orden.

▪ **PRODUCTO:**

$$\infty\cdot\infty=\infty \qquad \infty\cdot(-\infty)=-\infty \qquad -\infty\cdot(-\infty)=\infty \qquad \infty\cdot k=\begin{cases}\infty & \text{si } k>0\\ \textbf{INDTDO.} & \text{si } k=0\\ -\infty & \text{si } k<0\end{cases}$$

Veamos un ejemplo justificativo de la indeterminación anterior:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x-2}{2}\cdot\frac{1}{x}=\infty\cdot 0=\text{INDTDO.}=\lim_{x\to\infty}\frac{x-2}{2x}\approx\lim_{x\to\infty}\frac{x}{2x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

▪ **COCIENTE:**

$$\frac{\infty}{k}=\begin{cases}\infty & \text{si } k>0\\ \text{operar y/o hacer lim laterales} & \text{si } k=0\\ -\infty & \text{si } k<0\end{cases} \qquad \frac{k}{\infty}=0 \qquad \frac{\pm\infty}{\pm\infty}=\textbf{INDTDO.}$$

$$\frac{0}{0}=\textbf{INDTDO.} \qquad \frac{k}{0}=\text{hacer lim laterales}$$

Veamos ejemplos prácticos de algunos de los casos anteriores:

a) $$\lim_{x\to\infty}\frac{x+2}{\frac{1}{x}}=\frac{\infty}{0}=\lim_{x\to\infty}[(x+2)x]=\lim_{x\to\infty}(x^2+2x)\approx\lim_{x\to\infty}x^2=\infty^2=\infty$$

b) $$\lim_{x\to\infty}\frac{3x+3}{x}=\frac{\infty}{\infty}=\text{INDTDO}\approx\lim_{x\to\infty}\frac{3x}{x}=\lim_{x\to\infty}3=3$$

c) $$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=\frac{0}{0}=\text{INDTDO}=\lim_{x\to 1}\frac{(x+1)(x-1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}(x+1)=2$$

d) $$\lim_{x\to 1}\frac{x+3}{x-1}=\frac{4}{0}=\begin{cases}\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{x+3}{x-1}=\frac{4}{0^-}=-\infty\\ \lim\limits_{x\to 1^+}\frac{x+3}{x-1}=\frac{4}{0^+}=\infty\end{cases}\Rightarrow\nexists\lim_{x\to 1}\frac{x+3}{x-1}\quad\left(\text{o bien, }\lim_{x\to 1}\frac{x+3}{x-1}=\pm\infty\right)$$

e) $$\lim_{x\to 1}\frac{x+3}{(x-1)^2}=\frac{4}{0}=\begin{cases}\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{x+3}{(x-1)^2}=\frac{4}{(0^-)^2}=\frac{4}{0^+}=\infty\\ \lim\limits_{x\to 1^+}\frac{x+3}{(x-1)^2}=\frac{4}{(0^+)^2}=\frac{4}{0^+}=\infty\end{cases}\Rightarrow\lim_{x\to 1}\frac{x+3}{(x-1)^2}=\infty$$

Como conclusión, hemos visto una serie de indeterminaciones que podemos resumir en cuatro[4]:

$$\frac{0}{0},\quad\frac{\pm\infty}{\pm\infty},\quad 0\cdot(\pm\infty),\quad \infty-\infty$$

Ejercicios final tema: 8, 9

Ejercicios libro: ***pág. 278: 1 y 2***; ***pág. 296: 10*** *(no indeterminados);*
pág. 283: 1; ***págs. 296 y ss: 12, 36 y 37*** *(indeterminaciones sencillas)*

[4] El próximo curso veremos las indeterminaciones de tipo exponencial: $1^{\pm\infty}$, $(\pm\infty)^0$, 0^0

VII) CÁLCULO DE LÍMITES INDETERMINADOS

1º) Límites de polinomios: $\boxed{\lim\limits_{\substack{x\to\infty \\ (o\,-\infty)}} P(x) = \lim\limits_{\substack{x\to\infty \\ (o\,-\infty)}} (\text{tº de mayor grado})}$

Un ejemplo sería el ejercicio 7 ya realizado.

<u>Ejercicios libro</u>: *pág. 296: 15 y 16*

2º) Límites de cocientes de polinomios:

a) $\boxed{\lim\limits_{x\to a}\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{0}{0}}$ «Se resuelve factorizando numerador y denominador (habitualmente por Ruffini) y eliminando a continuación el factor x–a que figura repetido en ambos términos de la fracción»

(Ver págs. 280 y 281 del libro de texto)

Ejemplo:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+2x-8}{x^2-x-2}=\frac{0}{0}=\text{INDTDO}=\lim_{x\to 2}\frac{\cancel{(x-2)}(x+4)}{\cancel{(x-2)}(x+1)}=\lim_{x\to 2}\frac{x+4}{x+1}=\frac{6}{3}=2$$

<u>Ejercicio final tema</u>: 10

<u>Ejercicios libro</u>: *pág. 281: 4*; *págs. 296 y ss.: 13, 14, 27, 31 y 32*

b) $\boxed{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{\infty}{\infty}}$ «Se resuelve recurriendo en numerador y denominador a los términos de mayor grado de cada polinomio[5]»

(Ver pág. 284 del libro de texto)

Ejemplos: Hay tres posibilidades:

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x^2+x+2}{2x^2+3x-1}=\frac{\infty}{\infty}=\text{INDTDO}\approx\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x^2}{2x^2}=\lim\limits_{x\to\infty}2=2$

b) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+x+3}{x+3}=\frac{\infty}{\infty}=\text{INDTDO}\approx\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2}{x}\approx\lim\limits_{x\to\infty}x=\infty$

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+3}{x^2+x+3}=\frac{\infty}{\infty}=\text{INDTDO}\approx\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{x^2}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=\frac{1}{\infty}=0^+$

<u>Ejercicios final tema</u>: 11, 12, 13 y 14

<u>Ejercicios libro</u>: *pág. 284: 4 y 5; págs. 296 y ss.: 17 a 22* *(resolución de una indeterminación)*
págs. 297 y ss.: 23, 24, 25 y 30 *(cálculo de asíntotas)*

3º) Límites de funciones irracionales:

a) $\boxed{\frac{0}{0}}$ «Se resuelve multiplicando numerador y denominador por el conjugado[6] de la expresión radical, y operando a continuación»

(NOTA: Caso de existir dos expresiones radicales, una en el numerador y otra en el denominador, habría que realizar el procedimiento anterior dos veces, una por cada expresión)

[5] Existe otra forma alternativa, en general más laboriosa, que consiste en dividir numerador y denominador por la mayor potencia de x que aparezca en ambos polinomios.

[6] El conjugado de un binomio radical consiste en cambiar el signo intermedio de éste; por ejemplo, el conjugado de $\sqrt{x}+2$ es $\sqrt{x}-2$

Ejemplo:

$$\lim_{x\to 4}\frac{x-4}{\sqrt{x}-2}=\frac{0}{0}=\text{INDTDO}=\lim_{x\to 4}\frac{(x-4)\left(\sqrt{x}+2\right)}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}=\lim_{x\to 4}\frac{\cancel{(x-4)}\left(\sqrt{x}+2\right)}{\cancel{x-4}}=\lim_{x\to 4}\left(\sqrt{x}+2\right)=4$$

b) $\boxed{\frac{\infty}{\infty}}$ «Se resuelve dividiendo numerador y denominador por la mayor potencia **efectiva**[7] de x que aparezca en cualquiera de las expresiones»

Ejemplo:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x-4}{\sqrt{x^2-2}}=\frac{\infty}{\infty}=\text{INDTDO}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x-4}{x}}{\frac{\sqrt{x^2-2}}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{4}{x}}{\sqrt{\frac{x^2-2}{x^2}}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\overbrace{\frac{4}{x}}^{\frac{4}{\infty}=0^+}}{\sqrt{1-\underbrace{\frac{2}{x^2}}_{\frac{2}{\infty}=0^+}}}=\frac{1}{1}=1$$

Obsérvese en el ejemplo anterior dos detalles importantes:

- La x entra dividiendo en una raíz cuadrada también dividiendo, pero al cuadrado.
- El hecho de dividir por la mayor potencia efectiva de x nos garantiza que los límites parciales que aparecen al final serán siempre cero.

c) $\boxed{\infty-\infty}$ «Se resuelve:

1º) Multiplicando y dividiendo por el conjugado de la expresión radical, y operando a continuación; en algunos casos (cuando el numerador resultante dependa de x), como la indeterminación no desaparece sino que pasa a ser ∞/∞, además hay que recurrir al siguiente paso:

2º) Dividiendo a continuación numerador y denominador por la mayor potencia **efectiva** de x»

Ejemplos:

a) $$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)=\infty-\infty=\text{INDTDO}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}{\sqrt{x^2+1}+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}=\frac{1}{\infty}=0^+$$

b) $$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)=\infty-\infty=\text{INDTDO}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)\left(\sqrt{x^2+x}+x\right)}{\sqrt{x^2+x}+x}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+x-x^2}{\sqrt{x^2+x}+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+x}+x}=\frac{\infty}{\infty}=\text{INDTDO}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x}{x}}{\frac{\sqrt{x^2+x}}{x}+\frac{x}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{x^2}+\frac{x}{x^2}}+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\underbrace{\frac{1}{x}}_{\frac{1}{\infty}=0^+}}+1}=\frac{1}{2}$$

[7] El adjetivo «efectiva» alude al hecho de que hay que tener en cuenta que, por ejemplo, en la expresión $\sqrt{x^2-2}$, la x no se comporta como x^2 sino, de forma efectiva, como x

Nótese que en el primer ejemplo ha bastado con aplicar el primer paso del procedimiento, mientras que en el segundo ha habido que aplicar los dos pasos.

CONSEJO: En los casos en que $x \to -\infty$, se recomienda hacer el cambio de variable $z=-x$, que hace que $z \to \infty$, como puede verse en el siguiente ejemplo:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1-x}}=\frac{\infty}{\infty}=\text{INDTDO}\underset{\text{cambio de variable } x=-z}{=}\lim_{z\to\infty}\frac{\sqrt{1+z^2}}{\sqrt{1+z}}=\lim_{z\to\infty}\frac{\frac{\sqrt{1+z^2}}{z}}{\frac{\sqrt{1+z}}{z}}=$$

$$=\lim_{z\to\infty}\frac{\sqrt{\frac{1}{z^2}+\frac{z^2}{z^2}}}{\sqrt{\frac{1}{z^2}+\frac{z}{z^2}}}=\lim_{z\to\infty}\frac{\sqrt{\underbrace{\frac{1}{z^2}}_{0^+}+1}}{\sqrt{\underbrace{\frac{1}{z^2}}_{0^+}+\underbrace{\frac{1}{z}}_{0^+}}}=\frac{1}{0^+}=\infty$$

<u>Ejercicios final tema</u>: 15, 16

<u>Ejercicios libro</u>: ***pág. 299: 47 y 49***

VIII) <u>CONTINUIDAD</u> *(Ver pág. 276 del libro de texto)*

Intuitivamente, una función es continua cuando se puede dibujar sin levantar el lápiz del papel.

Más formalmente, se define **función continua en un punto** de la siguiente forma:

$$\boxed{f(x) \text{ continua en } x=a \Leftrightarrow \lim_{x\to a} f(x)=f(a)}$$

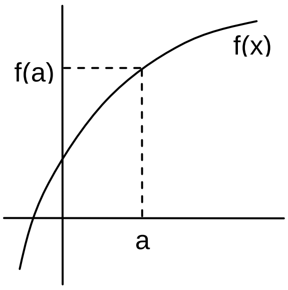
Es decir: **"Una función es continua en un punto si el límite coincide con la imagen en dicho punto"**.

A efectos prácticos, para estudiar si una función es continua en un punto, hay que comprobar:

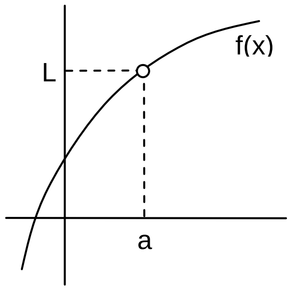
1) que exista imagen
2) que exista límite
3) y que ambos coincidan

(En caso de no ser continua en un punto, se dice que es discontinua).

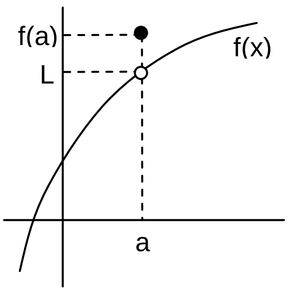
Por extensión, diremos que una función es **continua en un intervalo** cuando lo es en todos los puntos de dicho intervalo.
Vamos a recordar de nuevo el esquema-resumen visto en el apartado I del tema, e investigar en cada uno de los cuatro casos si la función es continua en x=a, para lo cual aplicaremos los tres requisitos de la continuidad arriba mencionados; observamos que la función es continua en x=a sólo en el primer supuesto:



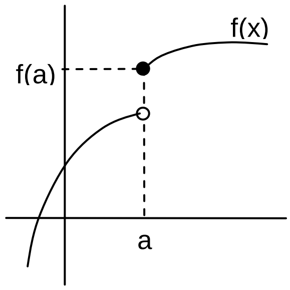
$\exists \lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a) \Rightarrow$ f(x) CONTINUA en x=a



$\left.\begin{array}{l} \nexists\, f(a) \\ \exists \lim\limits_{x\to a} f(x) = L \end{array}\right\} \Rightarrow$ f(x) DISCONTINUA en x=a



$\exists \lim\limits_{x\to a} f(x) = L \neq f(a) \Rightarrow$ f(x) DISCONTINUA en x=a



$\nexists \lim\limits_{x\to a} f(x) \Rightarrow$ f(x) DISCONTINUA en x=a

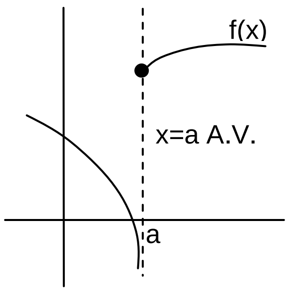
Nótese que en el último caso la función es discontinua, independientemente de que exista o no imagen. Este hecho conduce a los siguientes **5 tipos de discontinuidades:**

1) Evitable: *«la función no es continua en x=a, pero $\exists \lim\limits_{x\to a} f(x)$ finito»*; se llama evitable porque podemos redefinir $f(a) = \lim\limits_{x\to a} f(x)$ de modo que la función pasará a ser continua. A este tipo responden los supuestos 2º y 3º anteriores.

2) De 1ª especie: Existen tres tipos:

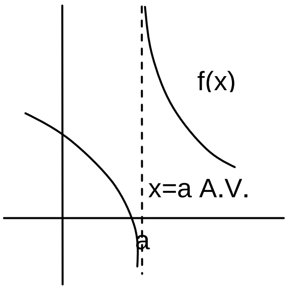
2.1) De salto finito: *«Existen ambos límites laterales y son finitos, pero no coinciden»*. El salto viene dado por la diferencia entre los límites. A este caso pertenece el 4º gráfico.

2.2) De salto infinito: *«Un límite lateral es finito y el otro infinito»*. Se presenta entonces una asíntota vertical, pero por un lado. Gráficamente, la situación es la siguiente:



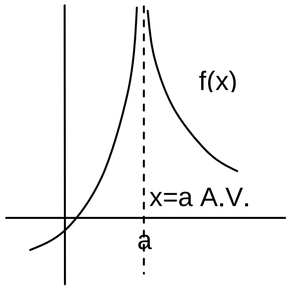
$\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = -\infty$ y $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = f(a)$

2.3) Asintótica: *«Los dos límites laterales son infinitos»*. Se da entonces una asíntota vertical, por ambos lados. Gráficamente, la situación puede ser la siguiente:



$\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = -\infty$ y $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \infty$

o bien:



$\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \infty$

3) Esencial, o de 2ª especie: «*Uno, o los dos límites laterales, no existe*»

Ejemplo 8: Dada $f(x)=\frac{x^2-4}{x-2}$, estudiar su continuidad en x=2

Aplicando los tres requisitos de la continuidad, vemos que falla el 1º, ya que $\nexists\, f(2) \Rightarrow$ f(x) es discontinua en x=2 $\Rightarrow$ $\boxed{f(x) \text{ continua } \forall\, x \in \Re-\{2\}}$

(Nótese que ello es independiente de que exista límite, como de hecho ocurre:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2} \underset{\text{INDTDO.}}{\overset{0/0}{=}} \lim_{x\to 2}\frac{(x+2)\cancel{(x-2)}}{\cancel{x-2}} = \lim_{x\to 2}(x+2) = 4$$

Por lo tanto, se trata de discontinuidad evitable, es decir, bastaría redefinir la función de la siguiente forma:

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x-2} & \text{si } x \neq 2 \\ 4 & \text{si } x = 2 \end{cases}$$

para que pasara a ser continua en x=2

Ejercicio 1: Representar las siguientes funciones, y estudiar su continuidad. Caso de presentar discontinuidades, clasificarlas razonadamente:

a) $f(x)=\frac{|x|}{x}$

b) $f(x)=\begin{cases} x+3 & \text{si } x\le 0 \\ \ln x & \text{si } x>0 \end{cases}$

c) $f(x)=\dfrac{1}{x}$

Continuidad lateral: Se dice que una función es continua por la derecha bajo la siguiente condición:

$$\boxed{f(x) \text{ continua en } x=a^{+} \Leftrightarrow \lim_{x\to a^{+}} f(x)=f(a)}$$

Análogamente se define la continuidad por la izquierda.

Observaciones: **1º** Obviamente, $\boxed{f(x) \text{ continua en } x=a^{+} \text{ y } a^{-} \Leftrightarrow f(x) \text{ continua en } x=a}$

2º La continuidad lateral se suele aplicar a funciones definidas por ramas (ver, por ejemplo, el ejercicio 18, o la pág. 279 del libro)

Ejercicios final tema: 17 y ss.

Ejercicios libro: ***pág. 275: 1 a, b, c; 2 a, b; págs. 295: 2, 3 y 4*** *(funciones definidas por expresión analítica)*

pág. 275: 1 d; 2 c, d; págs. 295 y ss.: 5, 6, 7, 34, 35 y 39 *(funciones a trozos)*

pág. 295: 1 *(funciones a trozos, gráficamente)*

pág. 279: 3; pág. 298: 38 y 40 (hallar k para que una función a trozos sea continua)

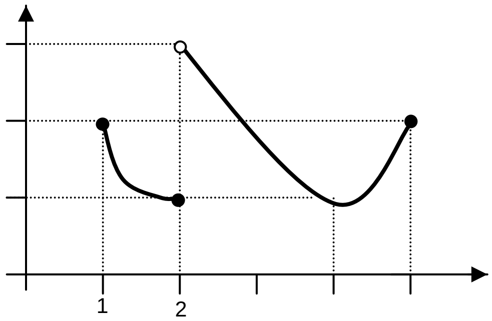
32 EJERCICIOS de LÍMITES DE FUNCIONES y CONTINUIDAD

1. Calcular los siguientes límites no indeterminados[1]:

a) $\lim\limits_{x\to 3} \frac{1}{x}$ **b)** $\lim\limits_{x\to 3} \frac{x-1}{x+2}$ **c)** $\lim\limits_{x\to 4} (x^2-4x+3)$ **d)** $\lim\limits_{x\to 1} (x^2+4x)$ **e)** $\lim\limits_{x\to -1} (3x+5)$

f) $\lim\limits_{x\to e} (1+\ln x)$ **g)** $\lim\limits_{x\to 0,1} \log x$ **h)** $\lim\limits_{x\to -2} (x^3-3x^2+4x)$ **i)** $\lim\limits_{x\to 0^+} \sqrt{x}$ **j)** $\lim\limits_{x\to 4} \frac{1}{\sqrt{x}}$

2.



Dada la gráfica de la figura, indicar si existe lim f(x) en los siguientes casos:

a) Cuando x → 1

b) Cuando x → 2

c) Cuando x → 4

d) Cuando x → 5

3. Representar la función

$$f(x)=\begin{cases} 2 & \text{si } x<1 \\ 4-x & \text{si } 1\le x<3 \\ x-2 & \text{si } x\ge 3 \end{cases}$$

y obtener analíticamente lim f(x) cuando x →1, x →3, x →5, x → ∞, x → -∞

4. Dados los siguientes límites, se pide: **i)** Calcularlos. **ii)** En caso de deducirse de ellos la existencia de A.V., indicar su ecuación. **iii)** Explicar gráficamente el comportamiento a ambos lados de la hipotética asíntota:

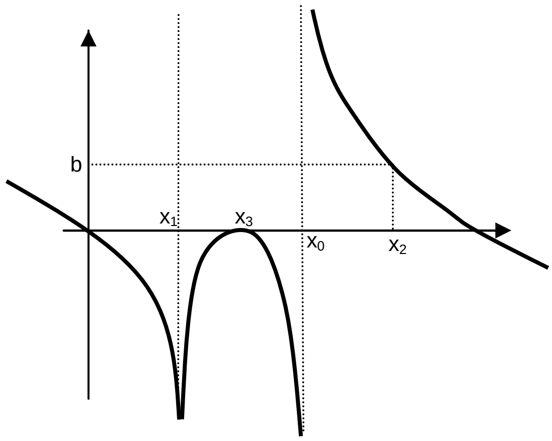
a) $\lim\limits_{x\to 4} \frac{1}{(x-4)^2}$ **b)** $\lim\limits_{x\to 1} \frac{-2}{(x-1)^2}$ **c)** $\lim\limits_{x\to 3} \frac{2}{x-3}$ **d)** $\lim\limits_{x\to 4} \frac{x-2}{(x-1)(x-4)}$ **e)** $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x-1}{(x-2)(x-5)}$

f) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x-1}{(x-2)(x-3)}$ **g)** $\lim\limits_{x\to -1} \frac{x-1}{(x+1)^3}$ **h)** $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}}$ **i)** $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x+3}{(x-2)^3}$ **j)** $\lim\limits_{x\to 3} \frac{x-1}{x^2-2x-3}$

k) $\lim\limits_{x\to -2} \frac{x-1}{x^2+6x+8}$ **l)** $\lim\limits_{x\to -2} \frac{x+2}{x^2-5x+6}$ **m)** $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x-3}{x^2-3x+2}$ (*Soluc: a)∞; b)−∞; c)±∞; d)±∞; e)±∞; f) 0; g)±∞; h)∞; i)±∞; j)±∞; k)±∞; l)±∞; m)±∞*)

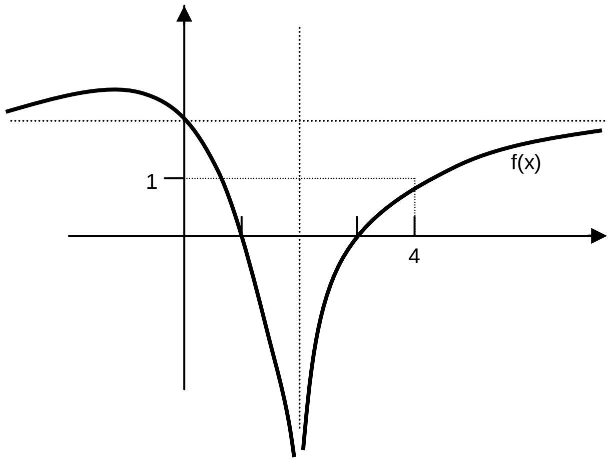
5. a) Si la gráfica de una función f(x) es la de la figura, averiguar lim f(x) cuando x →0, x →x_1, x →x_3, x →x_0, x →x_2

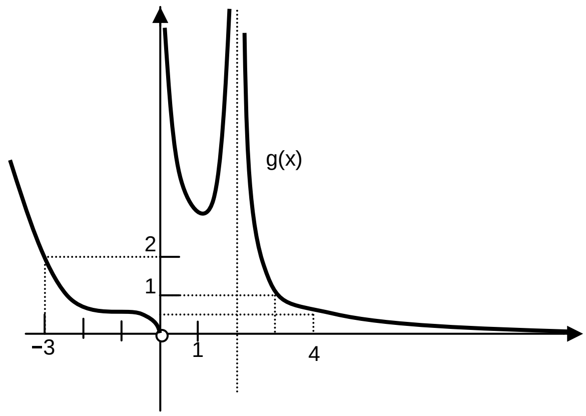
b) ¿Qué rectas son asíntotas?

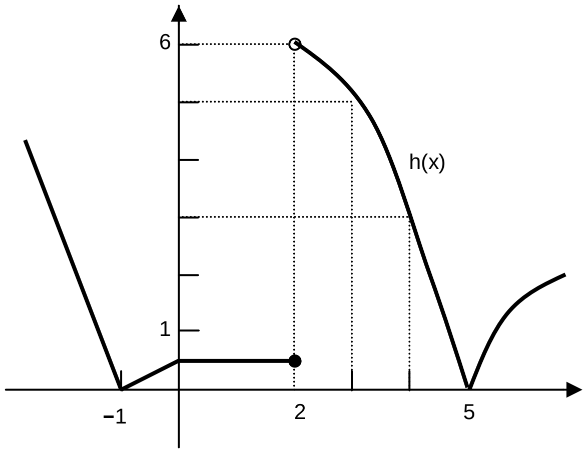


[1] Es decir, se pueden hacer por sustitución directa, ya que límite e imagen coinciden.

6.







a) Dadas las funciones cuyas gráficas aparecen en las figuras, calcular sus límites cuando x →0, x →2, x →3, x →4, x →∞, x→ − ∞

b) ¿Cuáles son las asíntotas en cada gráfica?

7. Calcular los siguientes límites de funciones polinómicas:

a) $\lim\limits_{x\to 2}(x^2+x+1)$ **b)** $\lim\limits_{x\to\infty}(x^2+x+1)$ **c)** $\lim\limits_{x\to 1}(x-1)^7$ **d)** $\lim\limits_{x\to\infty}(x-1)^7$

e) $\lim\limits_{x\to\infty}(x^3-2x^2-3x-10)$ **f)** $\lim\limits_{x\to\infty}(-x^2+2x+5)$ **g)** $\lim\limits_{x\to -\infty}(x^2+3x+1)$ **h)** $\lim\limits_{x\to -\infty}(x^3+x^2+x+7)$

i) $\lim\limits_{x\to\infty}(3x^2-100x-50)$ **j)** $\lim\limits_{x\to -\infty}(-2x^3+100x+200)$

(Soluc: a) 7; b) ∞; c) 0; d) ∞; e) ∞; f) −∞; g) ∞; h) −∞; i) ∞ ; j) ∞)

8. Calcular:

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x^2}+3\right)$ **b)** $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}$ **c)** $\lim\limits_{x\to 1}\left(5-\frac{1}{x^2}\right)$ **d)** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(5-\frac{1}{x^2}\right)$ **e)** $\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{1}{x}$

f) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{2}{x}$ **g)** $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2}{x}$ **h)** $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{9x+2}{x^2}$ **i)** $\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{9x+2}{x^2}$ **j)** $\lim\limits_{x\to 2}\frac{9x+2}{x^2}$

k) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{9x+2}{x^2}$ **l)** $\lim\limits_{x\to\infty}2^{x-1}$ **m)** $\lim\limits_{x\to -\infty}2^{x-1}$ **n)** $\lim\limits_{x\to\infty}0{,}5^{x-1}$ **o)** $\lim\limits_{x\to -\infty}0{,}5^{x-1}$

p) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+e^x\right)$ **q)** $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(1+e^x\right)$ **r)** $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{e^x}$ **s)** $\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{1}{e^x}$ **t)** $\lim\limits_{x\to\infty}\log x$

u) $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x$ **v)** $\lim\limits_{x\to\infty}\log(x^2+1)$ **w)** $\lim\limits_{x\to\infty}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$ **x)** $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{1+\log\sqrt{x}}$ **y)** $\lim\limits_{x\to -\infty}\ln\frac{1}{x^2}$

z) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\log x+\dfrac{3x+2}{x^2}\right)$ **α)** $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\dfrac{1}{e^x}\right)$ **β)** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2}{x+3}\ln x\right)$ **γ)** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x+2}{x^2\log x}$ **δ)** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1}{x^2}-x\right)$

ε) $\lim\limits_{x\to0^+}\left(\ln x-\dfrac{3x+2}{x^2}\right)$ **ζ)** $\lim\limits_{x\to0^+}\left(\dfrac{3x^2+2}{x^2+3}\log x\right)$ **η)** $\lim\limits_{x\to0}x^2\,\text{sen}\dfrac{1}{x}$ **θ)** $\lim\limits_{x\to\infty}x^2\,\text{sen}\dfrac{1}{x}$

(Soluc: a) 3; b) 0; c) 4; d) 5; e) 0; f) 1; g) 0; h) 0; i) 0; j) 5; k) ∞; l) ∞; m) 0; n) 0; o) ∞; p) ∞; q) 1; r) 0; s) ∞; t) ∞; u) −∞; v) ∞; w) 0; x) 0; y) −∞; z) ∞; α) ∞; β) ∞; γ) 0; δ) −∞; ε) −∞; ζ) −∞; η) 0; θ) ∞)

9. Calcular los siguientes límites por sustitución directa y, en algunos casos, operando:

a) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2x^3-3x^2\right)$ **b)** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(2x^3-3x^2\right)$ **c)** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+1}{4}$ **d)** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-x^2}{x}$ **e)** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+x^2}{x}$

f) $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{x-2}$ **g)** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x-1}{x^2}$ *(Soluc: a) -∞; b) ∞; c) ∞; d) −∞; e) ∞; f) ∞; g) 0^+)*

Resolución de indeterminaciones:

10. Calcular los siguientes límites de funciones racionales (nótese que en el 2º miembro de la igualdad se indica la solución):

a) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^3-8}{x^2-4}=3$

b) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2+x-2}{x^4+x^2+x-3}=\dfrac{3}{7}$

c) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x-2}{2x-4}=\dfrac{1}{2}$

d) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3+x-2}{x^2-1}=2$

e) $\lim\limits_{x\to-4}\dfrac{x^3+9x^2+24x+16}{x^3+11x^2+40x+48}=3$

f) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2-4x+3}{x^3-5x^2+3x+9}=\pm\infty$

g) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{2x^2+ax-3a^2}{3x^2-ax-2a^2}=1$

h) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^3-3x^2+4}{3x^3-18x^2+36x-24}=\pm\infty$

i) $\lim\limits_{x\to1/2}\dfrac{2x^3+3x^2-1}{4x^3+16x^2-19x+5}=\pm\infty$

j) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^4-5x^3+6x^2+4x-8}{x^3-4x^2+4x}=0$

k) $\lim\limits_{x\to b}\dfrac{b^2-bx}{b^3+5b^2x-3bx^2-3x^3}=\dfrac{1}{10b}$

l) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3-1}{x^2-2x+1}=\pm\infty$

m) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-2x+5}{x^2+6}=\dfrac{1}{2}$

n) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^3+a^3}{x^2-a^2}=\pm\infty$

o) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^3+2}{x+5}=-2$

p) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^3-3x^2+4}{x^3-2x^2-4x+8}=\dfrac{3}{4}$

q) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3+2x^2-3x}{x^3-1}=\dfrac{4}{3}$

r) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^2-4}{x^3+3x^2-4}=\pm\infty$

s) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x+3+\dfrac{x-2}{x+1}}{x+\dfrac{x^2}{x-2}}=0$

NOTA: *Cuando señalamos que el resultado de un límite es ±∞, no estamos indicando que haya dos límites (recordar que el límite, caso de existir, es único), sino que, a ambos lados de un valor finito, la función diverge a ∞ o −∞*

11. Calcular los siguientes límites infinitos (en algunos casos figura la solución):

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-8}{x^2-4}$

b) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+x-2}{x^4+x^2+x-3}$

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-2}{2x-4}$

d) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^3+x-2}{x^2-1}$

e) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2-4x+3}{x^3-5x^2+3x+9}$

f) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{2x^2+ax-3a^2}{3x^2-ax-2a^2}$

g) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^3+3x^2-1}{4x^3+16x^2-19x+5}$

h) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x^3-3x^2+4}{3x^3-18x^2+36x-24}$

i) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^4-5x^3+6x^2+4x-8}{x^3-4x^2+4x}$

j) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3+a^3}{x^2-a^2}$

k) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{b^2-bx}{b^3+5b^2x-3bx^2-3x^3}$

l) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x^2-2x+5}{x^2+6}$

m) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3+2}{x+5}$

n) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3-3x^2+4}{x^3-2x^2-4x+8}$

o) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x^3-1}{x^3+2x^2-3x}$

p) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x+3+\dfrac{x-2}{x+1}}{x+\dfrac{x^2}{x-2}} = \dfrac{1}{2}$

q) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x-3}{x^2-3x+2}$

r) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x^2-3x+2}{x-3}$

s) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x^3-1}{x^2-2x+1}$

t) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x^2-4}{x^3+3x^2-4}$

12. En una empresa se ha comprobado que el número de unidades diarias producidas depende de los días trabajados, de acuerdo con la siguiente función:

$$N(t) = \frac{30t}{t+4} \qquad \text{(donde t viene expresado en días)}$$

a) ¿Cuántas unidades se producen el primer día? ¿Y el décimo?

b) Representar la función N(t). ¿Qué ocurre si el período de producción se hace muy grande?

13. Siendo $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2+x}$, $g(x)=\dfrac{x-1}{x}$ y $h(x)=\dfrac{2x-1}{3x+2}$, hallar:

a) $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = \pm\infty$ **b)** $\lim\limits_{x\to 0} h(x) = -1/2$ **c)** $\lim\limits_{x\to 0} [f(x)\cdot g(x)] = -\infty$ **d)** $\lim\limits_{x\to\infty} h(x) = 2/3$

e) $\lim\limits_{x\to 0} [f(x)-g(x)] = \pm\infty$ **f)** $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = 1$ **g)** $\lim\limits_{x\to\infty} [f(x)\cdot g(x)] = 0$

14. Hallar una función f(x) que cumpla a la vez $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \infty$ y $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 4$

15. Calcular los siguientes límites de funciones irracionales (en el 2º miembro de la igualdad se indica la solución):

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{1-\sqrt{x+1}} = -2$ **b)** $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+x}}{x} = 1$ **c)** $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+x}-x\right) = 1/2$ **d)** $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{x+1}-2}{x-3} = 1/4$

e) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{x+1}-x\right) = -\infty$ **f)** $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1} = 1/2$ **g)** $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+1}+1} = 1$ **h)** $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{x+2}-\sqrt{x-2}\right) = 0$

i) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1-x}-1}{x} = -1/2$ **j)** $\lim\limits_{x\to\infty} \left[\sqrt{(x+2)(x-3)}-x\right] = -1/2$ **k)** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{x} = -1$ **l)** $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\right) = 0$

m) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{x} = 0$ **n)** $\lim\limits_{x\to -\infty} \left(\sqrt{x^2+1}-x\right) = \infty$ **o)** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x+9}-3}{\sqrt{x+16}-4} = 4/3$ **p)** $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}$

q) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{3}}{x^2+2x-3}=\sqrt{3}/6$ **r)** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{\sqrt{x^3+x+x}}=0$ **s)** $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+x}}{x}=-1$ **t)** $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x^2+5}-3}{x^2-2x}=1/3$

u) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{2x}-5}=\sqrt{2}/2$ **v)** $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-x}+x\right)$ **w)** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{1-\sqrt{x+1}}=-\infty$ **x)** $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{x-1}=-1$

y) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x+2}{\sqrt{x+3}-1}$ **z)** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2+1}\right)=1/2$

16. Calcular los siguientes límites, aplicando el procedimiento apropiado en cada caso (en el 2º miembro de la igualdad se indica la solución):

a) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+x-6}{x^3-6x^2+12x-8}=\infty$ **b)** $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^3-6x^2+12x-8}{x^2+x-6}=-\infty$ **c)** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x+1}-\dfrac{x^2-1}{x-1}\right)=-2$

d) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^3+3x^2+3x+1}{x^3+x^2-x-1}=0$ **e)** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+3x}-\sqrt{x^2+1}\right)=\dfrac{3}{2}$ **f)** $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^3+4x^2+5x+2}{x^3+2x^2-x-2}$

g) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x-1}}{x-1}$ **h)** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-3x^2+3x-1}{x^3-x^2-x+1}=0$ **i)** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-3x^2+3x-1}{x^3-x^2-x+1}=1$

j) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+2x}-x\right)=1$ **k)** $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-3}{x^2-5x+6}$ **l)** $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x^3+x}{x^2-1}-\dfrac{x^2+1}{x+1}\right)=0$

Continuidad:

RECORDAR:

$$\boxed{f(x)\text{ continua en }x=a \iff \lim_{x\to a} f(x)=f(a)}$$

Es decir: "*Una función es continua en un punto si el límite coincide con la imagen en dicho punto*".

- A efectos prácticos, para estudiar si una función es continua en un punto, hay que comprobar:
  1) que exista imagen
  2) que exista límite
  3) y que coincidan

17. Indicar en qué puntos son discontinuas las funciones cuyas gráficas se muestran en los ejercicios gráficos 2, 5 y 6, razonando el porqué e indicando el tipo de discontinuidad.

18. Estudiar la continuidad de las siguientes funciones, indicando el tipo de discontinuidad:

a) $f(x)=\dfrac{x+1}{x-2}$ **b)** $f(x)=\dfrac{2x}{x^2-5x+6}$ **c)** $f(x)=\dfrac{x^2+x}{x^2+x+1}$ **d)** $f(x)=\dfrac{1}{\text{sen } x}$

e) $f(x)=\sqrt{x-3}$ **f)** $f(x)=\sqrt{x^2-x-6}$ **g)** $f(x)=\sqrt{x^2+4}$ **h)** f(x)=tg x

i) f(x)=log (x+3) **j)** $f(x)=\ln(x^2-4)$ **k)** $f(x)=\ln(x^2+4)$

(*Soluc: a) discont. asintótica en x=2; b) discont. asintótica en x=2 y x=3; c) continua $\forall\Re$; d) discont. asintótica en x=n·π donde n∈Z; e) continua en [3,∞); f) continua en (−∞,−2] ∪ [3, ∞); g) continua $\forall\Re$; h) discont. asintótica en x=(2n+1)· π/2; i) continua en (−3,∞) ; j) continua en (−∞,−2]U[2, ∞); k) continua $\forall\Re$*)

19. Estudiar la continuidad de las siguientes funciones (caso de presentar discontinuidades, clasificarlas) y representarlas gráficamente:

a) $f(x)=\begin{cases} x+1 & \text{si } x\geq 0 \\ x-1 & \text{si } x<0 \end{cases}$ **b)** $f(x)=\begin{cases} x^2-1 & \text{si } x<0 \\ 2 & \text{si } x=0 \\ 2x-1 & \text{si } x>0 \end{cases}$ **c)** $f(x)=\begin{cases} x+1 & \text{si } x\in(-\infty,2) \\ 2x-1 & \text{si } x\in(2,\infty) \end{cases}$

d) $f(x)=\begin{cases} 2-x^2 & \text{si } x\leq 2 \\ 2x-6 & \text{si } x>2 \end{cases}$ **e)** $f(x)=\begin{cases} 1/x & \text{si } x\in(-\infty,1) \\ \sqrt{x+1} & \text{si } x\in[1,\infty) \end{cases}$ **f)** $f(x)=\begin{cases} x+1 & \text{si } x<3 \\ x^2 & \text{si } 3\leq x<4 \\ 0 & \text{si } x\geq 4 \end{cases}$

g) $f(x)=\begin{cases} x-1 & \text{si } x\leq 1 \\ x^2-1 & \text{si } 1<x\leq 2 \\ x^2 & \text{si } x>2 \end{cases}$ **h)** $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x-1}{x-2} & \text{si } x\in(-\infty,1) \\ \operatorname{Ln} x & \text{si } x\in[1,\infty) \end{cases}$ **i)** $f(x)=\begin{cases} e^x & \text{si } x\leq 0 \\ \sqrt{x+2} & \text{si } x>0 \end{cases}$

(Soluc: a) discont de salto finito en x=0; b) discont evitable en x=0; c) discont evitable en x=2; d) continua $\forall\Re$; e) discont asintótica en x=0 y de salto finito en x=1; f) discont. de salto finito en x=3 y x=4; g) discontinua de salto finito en x=2; h) continua $\forall\Re$; i) discont. de salto finito en x=0)

20. TEORÍA: **a)** ¿Se puede calcular el límite de una función en un punto en el que la función no está definida? ¿Puede ser la función continua en ese punto? Razonar la respuesta con ejemplos.

b) ¿Puede tener una función dos asíntotas verticales? En caso afirmativo, poner algún ejemplo.

c) El denominador de una determinada función se anula en x=a ¿Presenta necesariamente una asíntota vertical en x=a? Poner ejemplos.

d) ¿Puede tener una función más de dos asíntotas horizontales? ¿Por qué?

e) Si $\lim_{x\to 2} f(x)=5$, ¿podemos afirmar que f(x) es continua en x=2?

21. Probar que la función

$$f(x)=\frac{x^2-1}{x^3+7x-8}$$

no es continua en x=1 e indicar qué tipo de discontinuidad presenta en dicho punto.

(Soluc: no es continua pues $\nexists$ f(1); discontinuidad evitable)

22. Considerar la siguiente función:

$$f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}$$

a) ¿Es discontinua en algún punto? ¿Por qué?

b) En x=1 la función no está definida. Ampliar esta función de modo que sea continua $\forall\Re$.

(Soluc: discontinua en x=1 pues $\nexists$ f(1); basta hacer f(1)=2)

23. La función $f(x)=\dfrac{x^3+x^2+x+a}{x-1}$ no está definida en x=1. Hallar el valor de **a** para que sea posible definir el valor de f(1), resultando así una función continua. *(Soluc: a=-3; f(1)=6)*

24. Hallar el valor de **k** para que la función

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-9}{x-3} & \text{si } x\neq 3\\ k & \text{si } x=3\end{cases}$$

sea continua $\forall\Re$. *(Soluc: k=6)*

25. Estudiar la continuidad de la siguiente función:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2x^2+3x-2}{2x^2-5x+2} & \text{si } x\neq 1/2\\ 5/3 & \text{si } x=1/2\end{cases}$$

(Soluc: discontinua asintótica en x=2)

26. Calcular cuánto debe valer **a** para que la siguiente función sea continua $\forall\Re$:

$$f(x)=\begin{cases}x+1 & \text{si } x\leq 2\\ 3-ax^2 & \text{si } x>2\end{cases}$$

(Soluc: a=0)

27. Se considera la función

$$f(x)=\begin{cases}\text{Ln } x & \text{si } 0<x<1\\ ax^2+b & \text{si } 1\leq x<\infty\end{cases}$$

Determinar los valores de *a* y *b* para que f(x) sea continua y f(2)=3
(Soluc: a=1 y b=−1)

28. Dada la función

$$f(x)=\begin{cases}x^2+2x-1 & \text{si } x<0\\ ax+b & \text{si } 0\leq x<1\\ 2 & \text{si } x\geq 1\end{cases}$$

hallar **a** y **b** para que la función sea continua y dibujar la gráfica de la función.
(Soluc: a=3 y b=−1)

29. Dada la función

$$f(x)=\begin{cases}x+3 & \text{si } x\leq 1\\ mx+n & \text{si } 1<x\leq 3\\ -x^2+10x-11 & \text{si } x>3\end{cases}$$

hallar los valores de **m** y **n** para que f(x) sea continua (puede ser útil dibujar la gráfica).
(Soluc: m=3, n=1)

30. Ídem:

$$f(x)=\begin{cases}-2x+1 & \text{si } x\leq -2\\ ax+2 & \text{si } -2\leq x\leq 2\\ x^2+b & \text{si } x\geq 2\end{cases}$$

(Soluc: a=−1/2, b=−3)

31. Ídem:

$$f(x)=\begin{cases} -x^2+a & \text{si } x<-1 \\ x^2-4 & \text{si } -1\le x<2 \\ \ln(x-b) & \text{si } x\ge 2 \end{cases}$$

(Soluc: a=−2, b=1)

32. Ídem:

$$f(x)=\begin{cases} ax+2 & \text{si } x<-1 \\ b/x^2 & \text{si } -1\le x<3 \\ cx & \text{si } 3\le x<5 \\ 10 & \text{si } x\ge 5 \end{cases}$$

(Soluc: a=−52, b=54, c=2)