

OBJETIVOS DIDÁCTICOS:

- 1.- Analizar si una gráfica es o no función.
- 2.- Analizar las características de una función (dominio, imagen, simetrías, monotonía, periodicidad, extremos absolutos y relativos, acotación y asíntotas) a partir de su gráfica.
- 3.- Calcular el dominio de una función a partir de su expresión analítica.
- 4.- Estudiar la simetría de una función a partir de su expresión analítica.
- 5.- Representar gráficamente funciones a partir de unas características dadas.
- 6.- Interpretar la evolución de un fenómeno asociado a su gráfica.
- 7.- Representar gráficamente y estudiar las características de las funciones elementales: polinómicas hasta 2º grado, racionales, $(x) = \frac{k}{x-a}$, exponenciales, logarítmicas y trigonométricas.
(Trabajo en grupo)
- 8.- Operar con funciones dadas por su expresión analítica.
- 9.- Componer funciones dadas por su expresión analítica.
- 10.- Encontrar la función recíproca de otra dada.

CONCEPTOS:

1. Función: definición y expresión.
2. Dominio y recorrido de una función.
3. Acotación. Extremos absolutos y relativos.
4. Simetrías, periodicidad y monotonía (crecimiento y decrecimiento).
5. Funciones polinómicas, racionales, exponenciales, logarítmicas y trigonométricas.
6. Funciones definidas a trozos.
7. Suma y producto de funciones.
8. Composición de funciones.
9. Función recíproca f^{-1} .

FUNCIONES Y GRÁFICAS

1. INTRODUCCIÓN

El término función fue usado por primera vez por el filósofo francés **René Descartes** en 1637. En 1694, el matemático alemán **Gottfried Wilhelm Leibnitz** (1646-1716) utilizó el término para referirse a varios aspectos de una curva, como su pendiente. Fue él, junto con **Isaac Newton**, quien comenzó a desarrollar el Cálculo Infinitesimal o de funciones. Sin embargo, el gran matemático de la Ilustración **Leonard Euler** (1707-1783) fue quien dio por primera vez una verdadera definición de función, al decir, de una manera un tanto vaga, que $f(x)$ era el valor de la función f asociada al valor de x . (Suyo es el símbolo $f(x)$).

Aún así, el concepto de función que hoy en día todavía utilizamos es el fijado por el alemán **Peter Dirichlet** en 1829. Para él, una función real de variable real f es toda aplicación de un subconjunto D perteneciente a R , en el conjunto R , entendiéndose por aplicación una correspondencia que asocia a cada elemento de D un único elemento de R .

Para llegar a comprender esta definición necesitamos dar algún paso previo a través de ideas intuitivas.

Sabes que algunos conceptos pueden estar conectados entre sí a través de una relación de dependencia. Por ejemplo, el precio del billete de autobús según la distancia recorrida, el peso y la edad de un niño, el área de un círculo según su radio, etc. De hecho, en el lenguaje coloquial, se usa la palabra función para expresar esta dependencia: "El caudal de un río varía en función de la nieve y lluvia acumuladas".

Las matemáticas permiten "cuantificar" esa dependencia, es decir, escribir con precisión cuál es la relación entre ambos conceptos, e incluso medirla.

Todo consiste en nombrar cada uno de los dos conceptos relacionados. Llamaremos a uno x y al otro y . Tendremos en cuenta que siempre hay uno de ellos que depende del valor del otro. Por ejemplo, el área del círculo depende del radio. Para seguir siempre la misma pauta, llamaremos x a la magnitud **independiente** (en este caso, el radio de la circunferencia) e y a la que **depende** de ella (área del círculo).

El esquema sería el siguiente: $x \longrightarrow y$

Radio $\longrightarrow$ Área círculo

Decir que el área está en función del radio puede abreviarse así, si cambiamos función por f : $\text{Área} = f(\text{radio})$

O mejor, si escribimos cada concepto con su nombre

$$y = f(x)$$

Como ya conocemos el área del círculo, podemos escribir $y = f(x) = \pi \cdot x^2$. Es más, solemos cambiar x por la inicial de radio, para que la relación sea más evidente: $f(r) = \pi \cdot r^2$.

También encontrarás funciones de t (tiempo) $f(t)$, de l (lado) $f(l) = l^2$ área de un cuadrado, etc. Incluso funciones de más de una variable como $f(x,y) = 2x+2y$ perímetro de un rectángulo, $f(x,y,z) = x \cdot y \cdot z$ volumen de un ortoedro...

¿Y cuál es la ventaja de esta escritura? Que ya podemos calcular, volviendo al ejemplo anterior, el área de cualquier círculo sin más que sustituir su radio en la fórmula.

Si $r = 2$ unidades

área = 4π unidades cuadradas.

Si $r = 10$ unidades

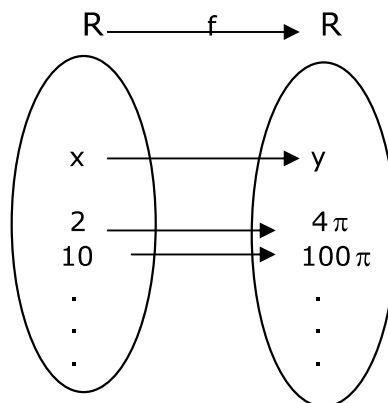
área = 100π unidades cuadradas

Y así con cualquier otro valor.

¿Te das cuenta de que conocer la expresión de la función te permite saber, en todos los casos, cuál es con exactitud la relación de dependencia entre ambas variables? Cada vez que conoces una, puedes calcular la otra.

Es condición imprescindible para que sea función, que a cada valor de x le corresponda un único valor de y , pues no tendría sentido que un mismo radio diera lugar a dos círculos de áreas distintas, o que a una misma distancia recorrida se le adjudicaran dos billetes de precios distintos.

Si utilizamos conjuntos:



El primer conjunto se llamará **conjunto origen** y contendrá a todos los valores de la **variable independiente x** (en este caso todos los radios posibles). Como son números reales, diremos que la variable es real. Pero NO todas las funciones admiten TODOS los números reales. Por ejemplo, $f(x) = \sqrt{x}$ no permitiría que x fuera negativo. Por eso, llamaremos **DOMINIO (D)** al conjunto origen, que será siempre un subconjunto de R ($D \subseteq R$) (se admite que R es un subconjunto de sí mismo).

El segundo conjunto se llamará **conjunto imagen** y englobará a todos los valores de la **variable dependiente y** (todas las áreas posibles). Como serán también números reales, diremos que la función es real. Llamaremos **RECORRIDO o IMAGEN** al conjunto de n^{os} reales que son imagen de algún valor de x . Puede ser todo el conjunto R o sólo algún subconjunto suyo.

Por ejemplo: la función $f(x) = x^2$ tendría como recorrido sólo los reales positivos y el 0.

Definición:

Llamamos **APLICACIÓN** a cualquier correspondencia que se establezca entre dos conjuntos, de manera que a cada elemento del primer conjunto le asocia un único elemento del segundo conjunto

Como tanto x como y son números reales, se dice que f es una función real de variable real.

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

Igualmente, $f: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Q}$ es una función racional de variable natural. Y $f: \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función real de variable entera.

Ahora ya podemos entender la definición de **Dirichlet**.

2. DEFINICIÓN

Una función real de variable real f es toda aplicación de un subconjunto $D \subseteq \mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, de manera que a cada elemento de D le corresponde un único elemento de $\mathbb{R}$. Se expresa:

$$f: D \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longrightarrow y=f(x)$$

o simplemente $y = f(x)$ donde x es la variable independiente e y es la variable dependiente.

El conjunto de todos los pares de puntos $(x, f(x))$ posibles, representados en el plano cartesiano, dará lugar a lo que se conoce como **gráfica** de la función, que viene a ser como una "fotografía" que permite visualizar el comportamiento de la función a través de sus características: puntos máximos y mínimos, crecimiento y decrecimiento, regiones de existencia, etc.

Las funciones pueden venir dadas mediante una fórmula matemática, que se denomina **expresión analítica** (por ejemplo, $f(x) = 2x-1$), mediante una tabla de valores o mediante su gráfica.

Dentro del primer grupo se encuentran las funciones a trozos, que se caracterizan por contener varias expresiones matemáticas según el intervalo de que se trate.

Actividades

1. Dada la función $f(x) = \begin{cases} 2x-1 & x \leq 1 \\ x^2 & 1 < x < 3 \\ 3 & x \geq 3 \end{cases}$ haz su representación gráfica

teniendo en cuenta si los extremos están o no incluidos, poniendo punto cerrado o abierto respectivamente.

2. Representa la función $y = -3x+1$ en el intervalo $[1,5)$.

3. Representa las parábolas: a) $y = x^2-2x+3$ b) $y = \frac{1}{3}x^2-x+3$ en $(-1,3]$.

4. Asocia cada expresión analítica con su respectiva gráfica:

1) $y = -3x + 5$

2) $y = (x + 2)^2$

3) $y = \log_{1/3} x$

4) $y = 3^x$

5) $y = -4x^2$

6) $y = \log_3 x$

7) $y = -\frac{5}{3}x - 1$

8) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$

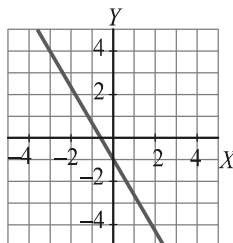
9) $y = \frac{1}{x+3}$

10) $y = \sqrt{3+x}$

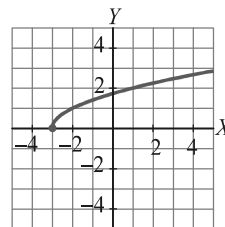
11) $y = \frac{1}{x} + 3$

12) $y = \sqrt{3-x}$

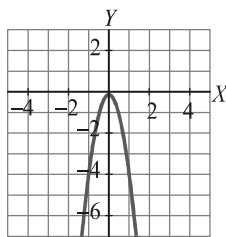
1.



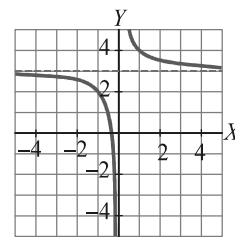
2.



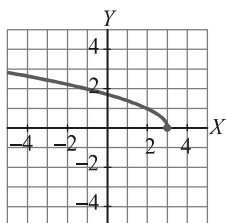
3.



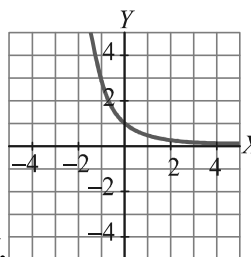
4.



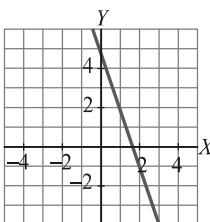
5.



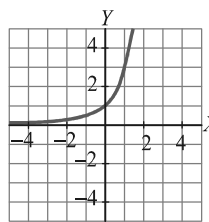
6.



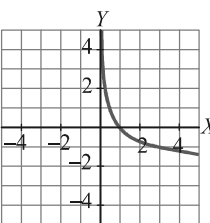
7.



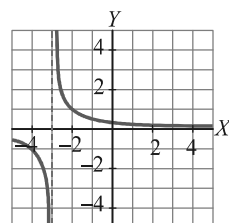
8.



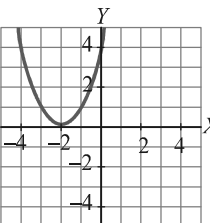
9.



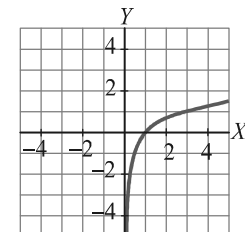
10.



11.



12.



3. DOMINIO Y RECORRIDO DE UNA FUNCIÓN

Definición: Se llama **dominio**, al conjunto de valores de **x** para los que existe imagen mediante la función **f**. Se escribe **Dom(f)**.

Ejemplo: Si $f(x) = \frac{1}{x}$ $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{0\}$
puesto que no se puede dividir entre 0.

Para calcular el dominio de una función tendremos en cuenta que las operaciones que no tienen sentido con números reales son:

1. la división entre 0
2. las raíces de índice par de números negativos
3. los logaritmos de números negativos ó 0.

Por eso, cuando en una función aparezca alguna de estas operaciones "imposibles" deberemos "sacar" del dominio los números que las producen.

Ejemplo:

1. $f(x) = \frac{x+3}{x^2-4}$ Por ser $x^2-4=0 \Rightarrow x^2=4 \Rightarrow x=\pm 2$ el
dominio será: $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{\pm 2\}$

2. $g(x) = \sqrt{x-3}$ Debe cumplirse $x-3 \geq 0 \Rightarrow x \geq 3$
luego $\text{Dom}(g) = [3, \infty)$

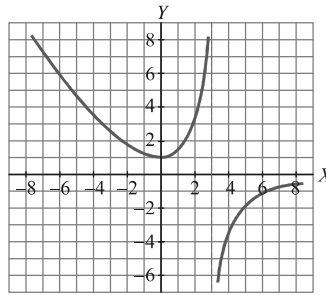
Esto significaría que la gráfica de la función sólo existe desde $x=3$ incluido, en adelante.

3. $h(x) = \ln(2x-1)$ no puede ser $2x-1 \leq 0$, luego quitaremos del dominio los x tales que $x \leq \frac{1}{2}$. Por tanto, $\text{Dom}(h) = \mathbb{R} - (-\infty, \frac{1}{2}]$, o lo que es lo mismo: $\text{Dom}(h) = (\frac{1}{2}, \infty)$.

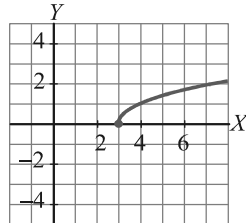
Las funciones que no tengan denominadores, raíces de índice par o logaritmos, tendrán como dominio todos los números reales. Esto ocurre, por ejemplo, con las polinómicas.

$$g(x) = 3x^3 - 2x + 6 \quad \text{Dom}(g) = \mathbb{R}$$

Si disponemos de la gráfica de la función, calcular el dominio es sencillo. Basta con "aplastar" mentalmente la gráfica sobre el eje X. De esta forma, estaríamos colocando cada imagen (**y**) sobre su origen (**x**) y tendríamos así señalados los **x** que tienen imagen, quedando huecos en los **x** que están fuera del dominio.

Ejemplos:

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{3\}$$



$$\text{Dom}(f) = [3, \infty)$$

Actividad

5. Calcula el dominio de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \frac{x^2 - 9}{x + 5}$

b) $f(x) = \sqrt{\frac{x - 4}{2x + 3}}$

c) $f(x) = x^2 + \frac{3}{4}x - \sqrt{5}$

d) $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 8}{5}$

e) $f(x) = \frac{3x + 2}{2x - 1}$

f) $f(x) = \log(5x - 8)$

g) $f(x) = \sqrt{\frac{x + 3}{x - 2}}$

h) $f(x) = \sqrt{(1 - x)(x + 7)}$

i) $f(x) = \frac{5}{3x + 2} + \frac{x}{x - 2}$

j) $f(x) = \log(x^2 - 4)$

k) $f(x) = \log_3(x - 5)$

l) $f(x) = 5^{3x+1}$

Definición: Se llama **recorrido o imagen** al conjunto de todas las imágenes de la función **f**. Se escribe **Im(f)**.

$$\text{Im}(f) = \{x \in \mathbb{R} / x \in \text{Dom}(f)\}$$

Calcular el recorrido a través de la expresión analítica puede ser complicado, pero no lo es si disponemos de la gráfica. Bastaría con "aplastar" mentalmente la curva ahora sobre el eje Y.

Ejemplo: Sobre las mismas gráficas del ejemplo anterior, el recorrido de la primera sería:

$$\text{Im}(f) = (-\infty, 0) \cup [1, \infty) \text{ o lo que es igual, } \text{Im}(f) = \mathbb{R} - [0, 1)$$

Y el de la segunda: $\text{Im}(f) = [0, \infty)$

Actividades

6. Relaciona cada función con su respectivo dominio de definición:

1) $y = \frac{1}{x^2 + 1}$

1. $(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$

2) $y = \frac{2+x}{x^2}$

2. $R - \{-2\}$

3) $y = \sqrt{x-2}$

3. $R - \{3\}$

4) $y = \frac{1}{3x - x^2}$

4. $[-1, +\infty)$

5) $y = \frac{2x}{(x-3)^2}$

5. $[-3, +\infty)$

6) $y = \frac{1}{\sqrt{x-2}}$

6. $R - \{-3, +3\}$

7) $y = \sqrt{x^2 - 1}$

7. $R - \{0, 3\}$

8) $y = \frac{1}{x^2 - 9}$

8. R

9) $y = \sqrt{3x-1}$

9. $[2, +\infty)$

10) $y = \frac{1}{x+2}$

10. $\left[\frac{1}{3}, +\infty\right)$

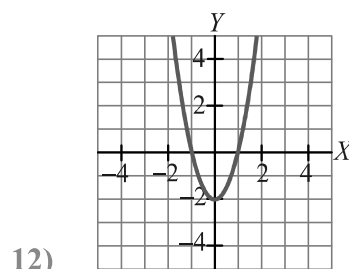
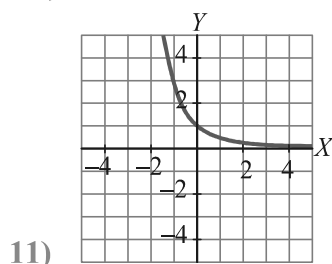
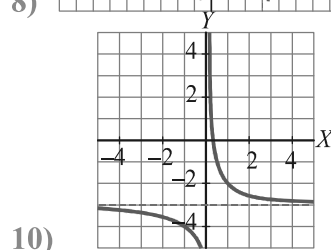
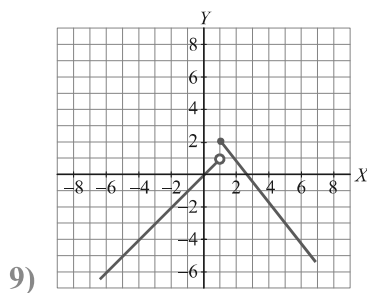
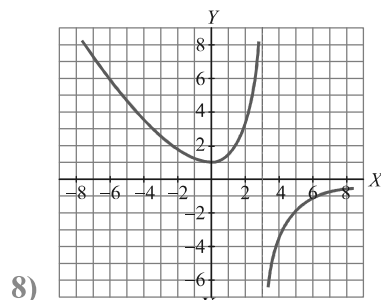
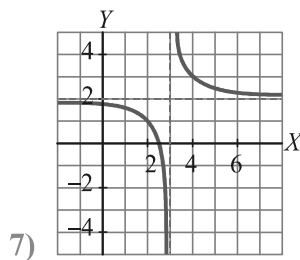
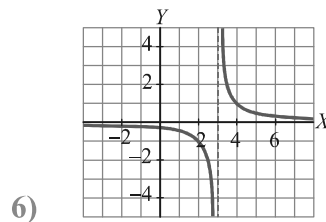
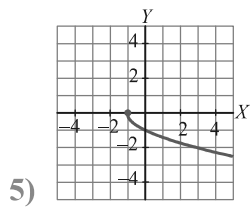
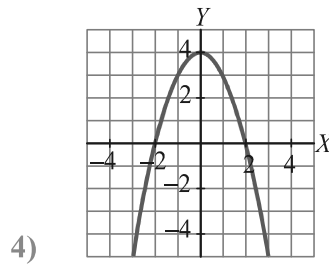
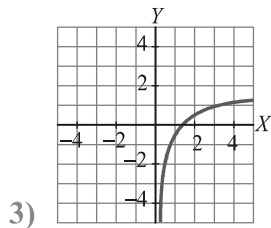
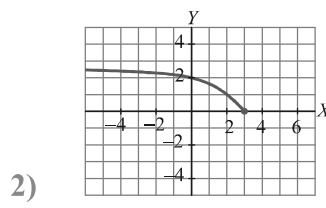
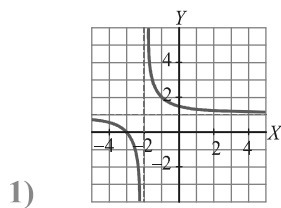
11) $y = \sqrt{x+1}$

11. $(2, +\infty)$

12) $y = \sqrt{x+3}$

12. $R - \{0\}$

7. Relaciona cada gráfica con su recorrido:



1. $(-\infty, 2]$

2. $(-\infty, 0]$

3. $\mathbb{R} - \{1\}$

4. $(-\infty, 4]$

5. $(-\infty, 0) \cup [1, +\infty)$

6. $\mathbb{R} - \{0\}$

7. $(-\infty, 0)$

8. $\mathbb{R}$

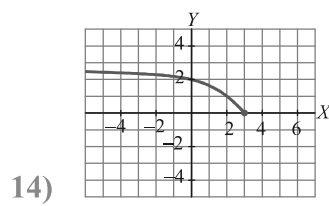
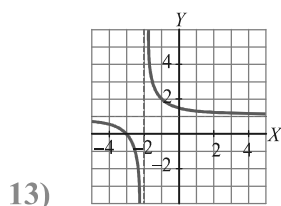
9. $\mathbb{R} - \{2\}$

10. $\mathbb{R} - \{-3\}$

11. $[0, +\infty)$

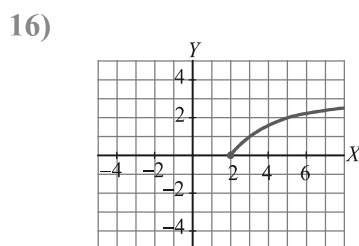
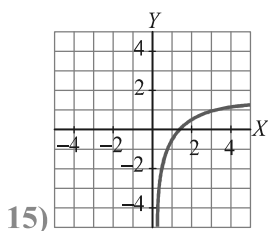
12. $[-2, +\infty)$

8. A partir de la gráfica de estas funciones, indica cuál es su dominio de definición:



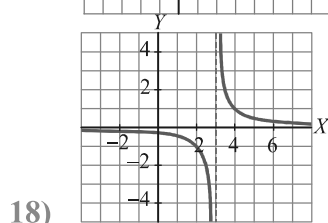
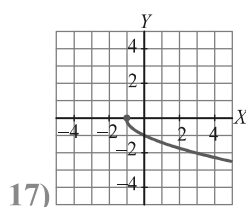
13. R

14. $R - \{3\}$



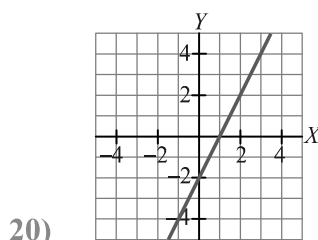
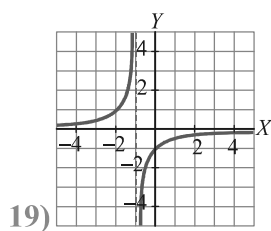
15. $R - \{0\}$

16. $[2, +\infty)$



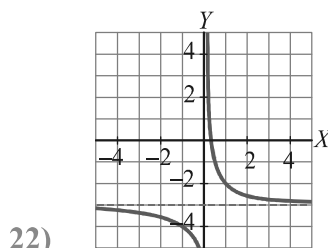
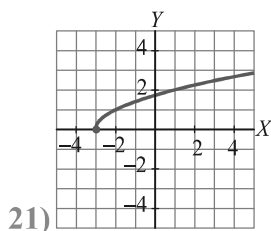
17. $[3, +\infty)$

18. $(0, +\infty)$



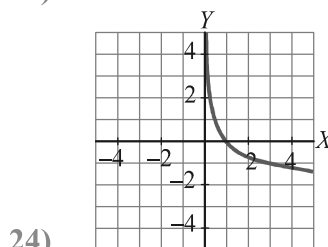
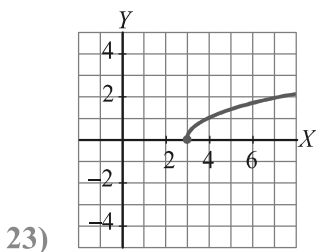
19. $(-\infty, 3]$

20. $(0, +\infty)$



21. $(-\infty, -2) \cup (-2, +\infty)$

22. $R - \{-1\}$



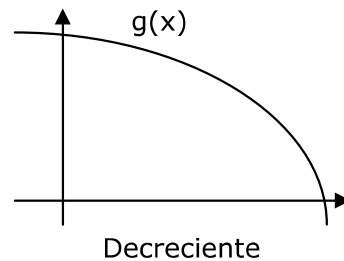
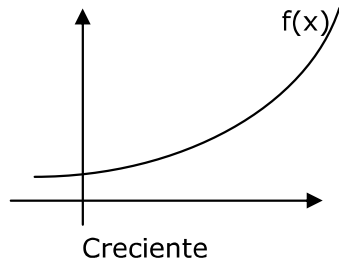
23. $[-3, +\infty)$

24. $[-1, +\infty)$

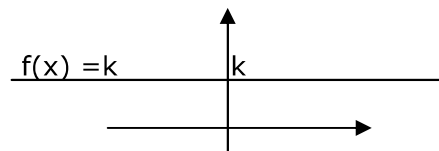
4. MONOTONÍA: CRECIMIENTO Y DECRECIMIENTO

Si dispones de la gráfica de una función y te planteas dónde crece, probablemente asocies crecer con subir.

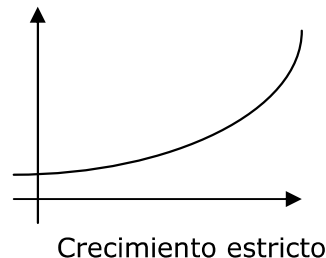
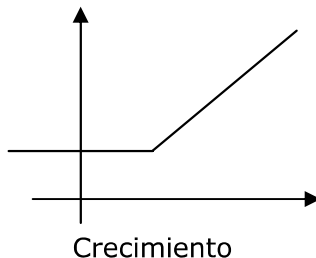
Efectivamente, una función es **creciente** si, al aumentar la variable x , también aumenta la variable y . Y es **decreciente** en caso contrario: si al aumentar las x disminuyen las y .



Si no aclaramos mejor este concepto, quedarían indefinidas las funciones constantes; pues en ellas los valores de y no crecen ni decrecen.



Por eso es necesario desdoblar cada concepto. Distinguiremos entre crecimiento y crecimiento estricto, englobando en el primer caso tanto la idea de crecer como la de "no decrecer".



Como la función puede cambiar de crecimiento a lo largo de su dominio, haremos las definiciones en un punto, entendiéndose por punto, en realidad, un pequeño entorno suyo.

Definición:

Una función $f(x)$ es **estrictamente creciente** en un punto $x=a$, si en un entorno de a ($a-r, a+r$) se cumple:

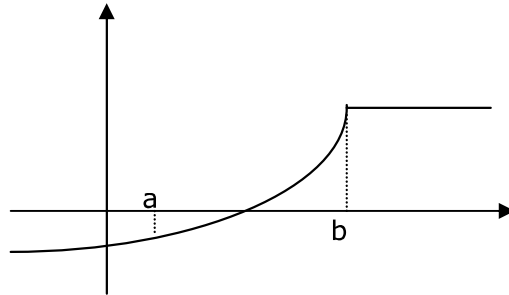
$$\forall x_1, x_2 \in (a-r, a+r) \text{ si } x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

es decir, dentro del entorno los x menores tienen las imágenes más pequeñas. Luego al crecer las x crecen las $f(x)$.

Si permitimos que las imágenes sean iguales, incluiremos a las funciones constantes.

Definición:

Una función es **creciente** en un punto **$x=a$** si en un entorno de **a** $E(a,r)$ se cumple: $\forall x_1, x_2 \in (a-r, a+r)$ si $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$



En **$x=a$** la función es estrictamente creciente y en **$x=b$** es creciente.

Señala más puntos donde la función sea creciente a secas y otros donde lo sea estrictamente.

Haremos definiciones paralelas para el decrecimiento.

Definición:

Una función es **estrictamente decreciente** en un punto **$x=a$** si en un entorno de **a** $(a-r, a+r)$ se cumple: $\forall x_1, x_2 \in (a-r, a+r)$ si $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

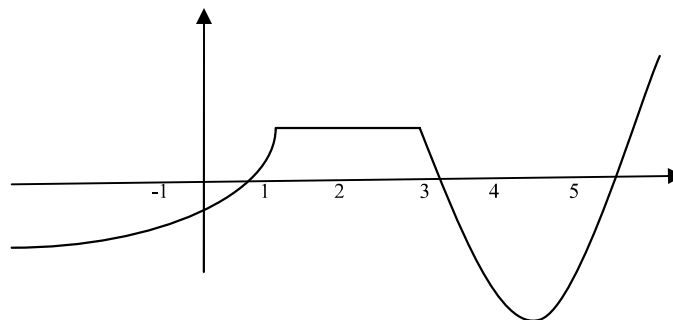
Una función es **decreciente** en un punto **$x=a$** si en un entorno de **a** se cumple: $\forall x_1, x_2 \in (a-r, a+r)$ si $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$.

Las funciones constantes son crecientes y decrecientes a la vez, puesto que verifican ambas definiciones.

Una función será creciente o decreciente en un intervalo si lo es en cada punto de dicho intervalo.

Razona si es cierto que estrictamente creciente $\Rightarrow$ creciente o es cierto su contrario.

Ejemplo:



Es estrictamente creciente en $(-\infty, 1) \cup (4, 5, +\infty)$. Estrictamente decreciente en $(3, 4, 5)$ y creciente y decreciente en $(1, 3)$.
¿Cómo es en los puntos $x = -1, x = 1, x = 2, x = 3, x = 4$ y $x = 4, 5$?

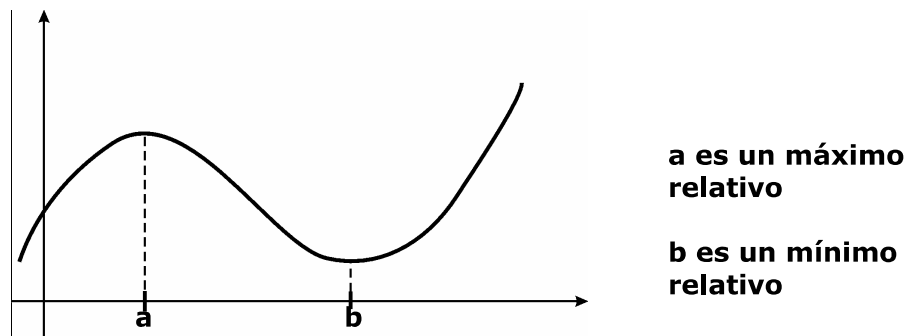
5. EXTREMOS

5.1 Máximo relativo

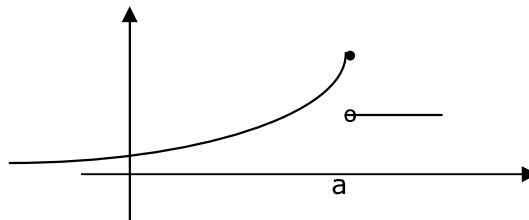
Definición: Una función $f(x)$ alcanza un **máximo relativo** en $x = a$ si su imagen $f(a)$ es el mayor valor que toma la función en un entorno de a , es decir, si existe un entorno de a tal que: $\forall x \in E(a,r), f(x) < f(a)$.

5.2 Mínimo relativo

Definición: Una función $f(x)$ alcanza un **mínimo relativo** en $x = a$ si su imagen $f(a)$ es el menor valor que toma la función en un entorno de a , es decir, si existe un entorno de a tal que: $\forall x \in E(a,r), f(x) > f(a)$



Si $f(x)$ es continua, los máximos relativos son los puntos donde la función pasa de ser creciente a decreciente, y viceversa para los mínimos relativos. Si la función no es continua no tiene por qué ser cierto.



5.3 Máximo absoluto

Una función $f(x)$ alcanza un **máximo absoluto** en $x = a$ si $f(a)$ es el mayor valor que toma la función en todo su dominio.

5.4 Mínimo absoluto

Una función $f(x)$ alcanza un **mínimo absoluto** en $x = a$ si $f(a)$ es el menor valor que toma la función en todo su dominio.

Los máximos y mínimos se conocen con el nombre genérico de extremos.

Lógicamente, los extremos absolutos son también extremos relativos. Pues si $f(a)$ es el mayor o menor valor que toma la función en todo su dominio, también lo será en un entorno de $x=a$.

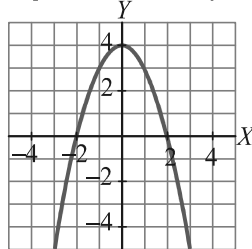
Por tanto, bajo el nombre genérico de extremos relativos incluimos a todos los extremos.

6. ACOTACIÓN

6.1 Función acotada superiormente

Una función $f(x)$ está **acotada superiormente** si todas las imágenes son menores o iguales que un n° real; es decir, si y sólo si $\exists k \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) \leq k$, $\forall x \in \text{Dom}(f)$.

k se llama **cota superior**. Cualquier $n^{\circ} L \geq k$ también será cota superior.

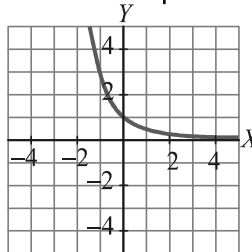


Cualquier $n^{\circ} \geq 4$ es una cota superior.

6.2 Función acotada inferiormente

Una función $f(x)$ está **acotada inferiormente** si y sólo si $\exists k' \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) \geq k'$, $\forall x \in \text{Dom}(f)$, es decir si todas las imágenes son mayores o iguales que un n° real.

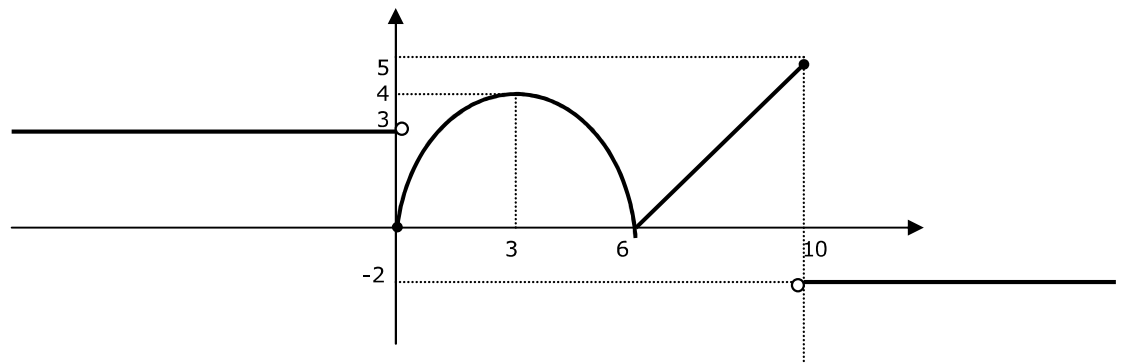
k' se llama **cota inferior**. Cualquier $n^{\circ} N \leq k'$ también será cota inferior.



Cualquier $n^{\circ} \leq 0$ es una cota inferior.

Se dice que una función está acotada si lo está superior e inferiormente.

Gráficamente, si la función es acotada está contenida por completo en una banda horizontal.

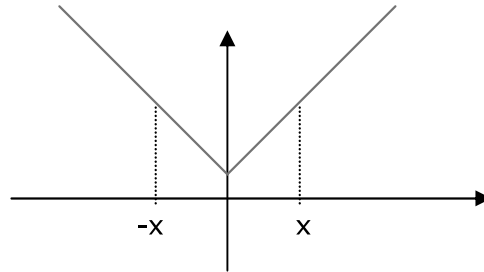


7. SIMETRÍA

Las funciones pueden presentar dos tipos de simetrías:

7.1 SIMETRÍA PAR

Se llaman así las funciones **simétricas respecto al eje Y**.

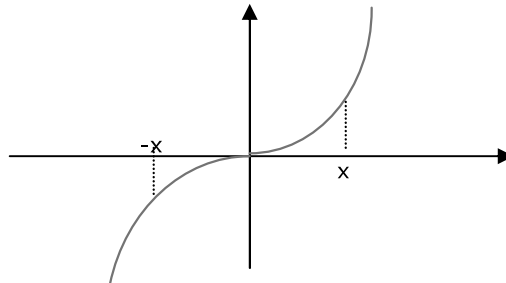


Como verás, se verifica que cada x y su opuesto $-x$ tienen la misma imagen. Luego $f(x)$ es una **función par** si $f(x) = f(-x) \quad \forall x \in \text{Dom}(f)$

Ejemplo: $f(x) = x^4 - 3x^2$ es una función par, pues si calculas $f(-x)$
 $f(-x) = (-x)^4 - 3(-x)^2 = x^4 - 3x^2 = f(x)$

7.2 SIMETRÍA IMPAR

Se llaman así a las funciones **simétricas respecto al origen de coordenadas**, es decir, respecto a los dos ejes coordenados simultáneamente.



Se observa en el dibujo que cada x y su opuesto $-x$ tienen imágenes opuestas, es decir, $f(x) = -f(-x) \quad \forall x \in \text{Dom}(f)$.

Ejemplo: $f(x) = \frac{1}{x}$ es una función impar ya que si calculamos $f(-x)$
 $f(-x) = -\frac{1}{x}$ y, si lo cambiamos de signo: $-f(-x) = -(-\frac{1}{x}) = \frac{1}{x} = f(x)$

a) Una función no puede ser simétrica respecto al eje X, pues para poder serlo cada punto debería tener dos imágenes, lo que contradice la definición de función.

Compruébalo dibujando una función simétrica respecto al eje X.

b) Pueden existir otros ejes o puntos de simetría en una función y, de igual forma, no tiene por qué presentar ningún tipo de simetría.

Actividad

9. Estudia la simetría de las siguientes funciones:

a) $f(x) = x^6 - x^4$

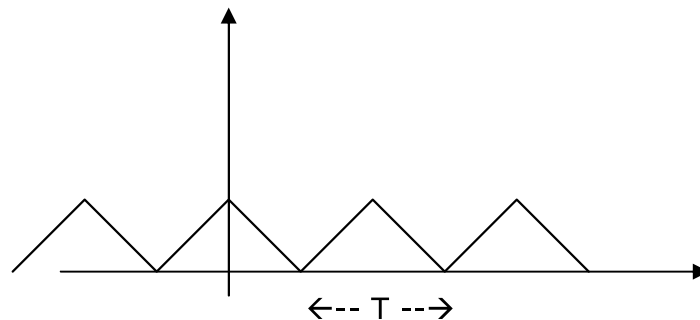
b) $g(x) = |x|$

c) $h(x) = x \cdot e^{x^2}$

8. PERIODICIDAD

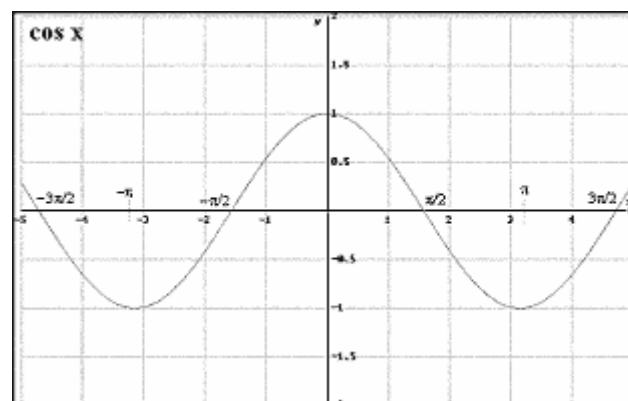
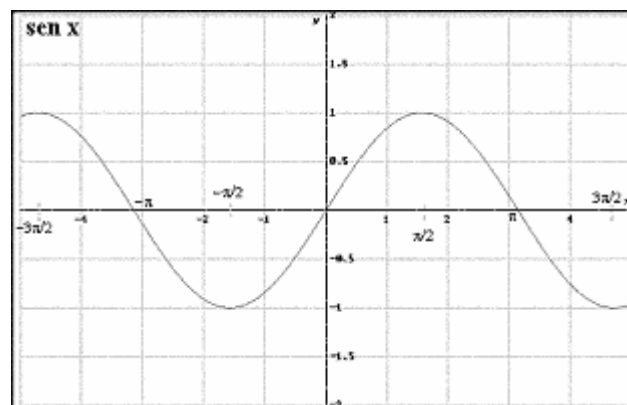
Una función es **periódica de periodo T** si se repite idénticamente en cada intervalo de amplitud T, es decir, si T es el menor número real que cumple:

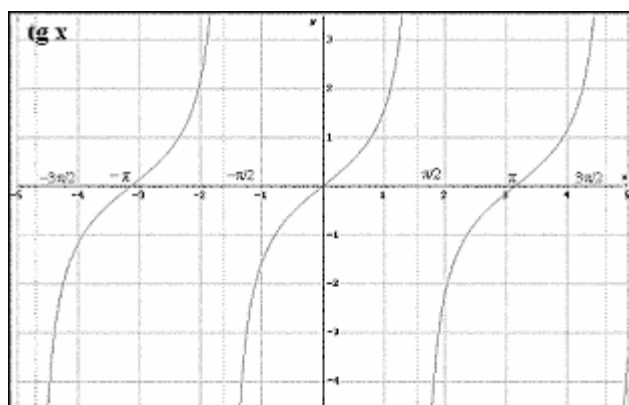
$$f(x) = f(x+T) = f(x+2T) = f(x+3T) = \dots = f(x+nT) \quad \forall x \in \text{Dom}(f).$$



Las funciones periódicas más conocidas son las trigonométricas, siendo $T=2\pi$ en el caso de $y = \text{sen } x$ e $y = \text{cos } x$.

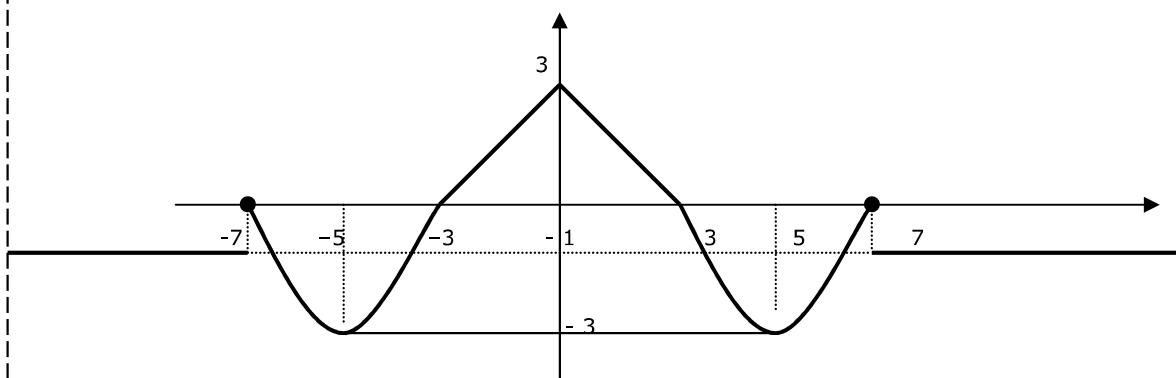
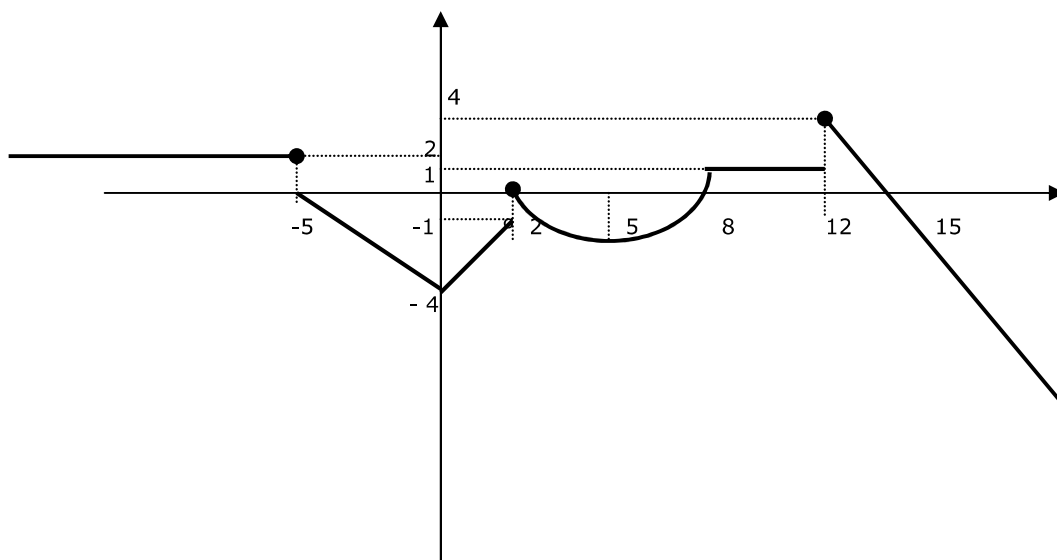
La función $y = \text{tg } x$ tiene período $T = \pi$.





Actividad

10. Analiza las siguientes funciones



9. OPERACIONES CON FUNCIONES

10.1 SUMA Y RESTA DE FUNCIONES

Dadas dos funciones f y g , podremos generar una tercera función que llamaremos $f+g$ a partir de la suma de ambas.

Definición:

Dadas dos funciones $f(x)$ y $g(x)$, llamamos **suma** de f y g a otra función **$f+g$** tal que:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

es decir, definimos la función suma como la suma de las funciones.

El dominio de la suma es la intersección de los dominios, ya que para poder hallar $(f+g)(a)$ es necesario calcular $f(a)$ y $g(a)$. Luego a debe pertenecer al dominio de ambas funciones.

Ejemplo: $f(x) = 3x^3 + x$

$$g(x) = \frac{2x}{x+2} \quad \text{entonces} \quad (f+g)(x) = 3x^3 + x + \frac{2x}{x+2}$$

Como $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$ y $\text{Dom}(g) = \mathbb{R} - \{-2\}$, entonces $\text{Dom}(f+g) = \mathbb{R} - \{-2\}$

****** Si los dominios respectivos son disjuntos (no tienen elementos comunes) no existe la función suma.

Escribe dos funciones cuya función suma no exista.

Definición:

Se llama **función nula** a **$f(x)=0$** . Es el elemento neutro para la suma de funciones, ya que $g(x) + 0 = g(x)$.

Gráficamente, coincide con el eje X.

Definición:

Se llama **función opuesta de f** y se escribe $-f$ a la función

$$(-f)(x) = -f(x)$$

La gráfica de la función opuesta es simétrica de la de la función f respecto al eje X.

Ejemplo: $f(x) = x^2$ $(-f)(x) = -x^2$

Dibuja ambas gráficas y comprueba su simetría.

Definición:

Dadas dos funciones $f(x)$ y $g(x)$ llamamos **resta** de f y g a otra función **$f-g$** tal que:

$$(f-g)(x) = f(x) - g(x).$$

Ejemplo:

$$f(x) = x^2 + 5, \quad g(x) = \frac{1}{x}$$

$$(f - g)(x) = x^2 + 5 - \frac{1}{x}$$

10.2 PRODUCTO Y COCIENTE DE FUNCIONES**Definición:**

Dadas dos funciones f y g , llamamos **producto** de f y g a otra función **$f \cdot g$** definida de la forma:

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x).$$

Igualmente, sólo existirá función producto en los puntos que pertenezcan tanto al dominio de f como al de g , es decir, $\text{Dom}(f \cdot g) = \text{Dom}(f) \cap \text{Dom}(g)$.

Ejemplo:

$$f(x) = 3x - 1, \quad g(x) = \frac{2x}{x + 3} \Rightarrow (f \cdot g)(x) = \frac{6x^2 - 2x}{x + 3}$$

Definición:

Se llama **función unidad** a **$f(x) = 1$** . Es el elemento neutro para el producto de funciones.

Definición:

Se llama **función inversa** de f y se escribe $\frac{1}{f}$ a la función:

$$\left(\frac{1}{f}\right)(x) = \frac{1}{f(x)}$$

El dominio de $\frac{1}{f}$ es: $\text{Dom}\left(\frac{1}{f}\right) = \text{Dom}(f) - \{x/f(x)=0\}$, ya que los x que anulan el denominador (f en este caso), no tienen imagen.

Ejemplo: si $f(x) = \sqrt{x+1}$ entonces $\left(\frac{1}{f}\right)(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1}}$

$$\text{Dom}(f) = [-1, \infty) \quad \text{y} \quad \text{Dom}\left(\frac{1}{f}\right) = (-1, \infty)$$

Definición:

Dadas dos funciones f y g , llamamos **cociente** de f y g a otra función **f/g** tal que:

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

El dominio de f/g es: $\text{Dom}(f/g) = \text{Dom}(f) \cap \text{Dom}(g) - \{x/g(x)=0\}$, es decir, pertenecen al dominio de f/g los x que pertenecen al dominio de ambas funciones y que no anulan el denominador.

Ejemplo:

1. si $f(x) = 3x+2$ y $g(x) = x-1$, entonces: $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{3x+2}{x-1}$

2. si $f(x) = \begin{cases} x^3 & x \leq 2 \\ 4x & x > 2 \end{cases}$ y $g(x) = \sqrt{x}$ entonces:

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \begin{cases} \frac{x^3}{\sqrt{x}} & x \leq 2 \\ \frac{4x}{\sqrt{x}} & x > 2 \end{cases}$$

Calcula el dominio de f/g en ambos casos.

Actividades

11. Sean $f(x) = 2x-1$ y $g(x) = \frac{1}{x+1}$. Calcula:

- a. $(f+g)(2)$
- b. $\text{Dom}(f-g)$

12. Sean $f(x) = \frac{x}{3} - 2$ y $g(x) = 2x^2 + 3$. Calcula:

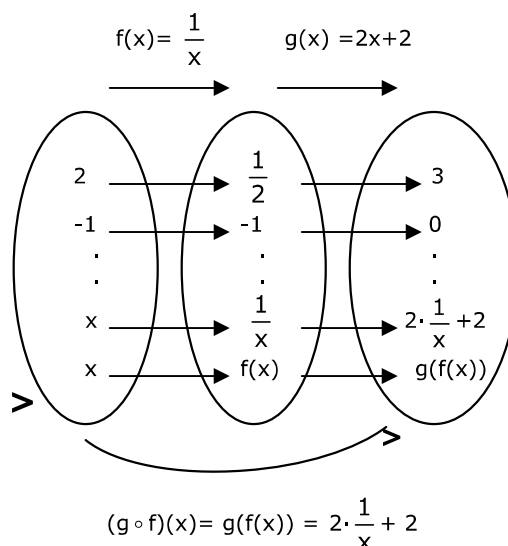
- a. $(f-g)(x)$, $(f-g)(2)$
- b. $(f \cdot g)(x)$, $(f \cdot g)(-1)$
- c. $(f/g)(x)$, $(f/g)(-2)$

9.3 COMPOSICIÓN DE FUNCIONES

Además de sumar, restar, multiplicar y dividir funciones, podemos realizar una nueva operación entre ellas que llamaremos composición.

Intuitivamente, componer funciones vendría a ser algo parecido a “fusionarlas”. Es decir, consistiría en realizar en un solo paso lo que ambas por separado harían en dos.

Supón que dispones de las funciones $f(x) = \frac{1}{x}$ y $g(x) = 2x+2$



El gráfico te permite “visualizar” el efecto de la función composición: realizar en un solo paso lo que por separado harían f y g en dos.

Por ejemplo: f asocia 2 con $1/2$ y g asocia $1/2$ con 3. La función composición, que llamaremos $g \circ f$, asocia directamente 2 con 3.

Definición:

Dadas dos funciones f y g , llamamos **función compuesta de f y g** , y escribimos $g \circ f$, a la función:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

Se escribe $g \circ f$, a pesar de que actúan en orden contrario, primero f y luego g . Ello se debe a que resulta más operativo que el orden coincida con el del 2º miembro $g(f(x))$. Sin embargo, se lee “ f compuesto con g ”.

Ejemplo:

Dadas las funciones: $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x-1}$ y $g(x) = 3x+2$

“ g compuesto con f ” $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(3x+2) = \frac{\sqrt{3x+2}}{3x+2-1} = \frac{\sqrt{3x+2}}{3x+1}$

“ f compuesto con g ” $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g\left(\frac{\sqrt{x}}{x-1}\right) = 3 \cdot \frac{\sqrt{x}}{x-1} + 2$

Has podido observar en el ejemplo anterior que la composición de funciones **NO** cumple la propiedad **conmutativa**. Pero sí se verifica la propiedad **asociativa**: $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$.

Compruébalo con un ejemplo.

Definición:

Se llama **función identidad** a **$f(x) = x$** .

Es el elemento neutro de la composición, ya que si $f(x) = x$ y $g(x)$ es otra función cualquiera, se cumple que $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = g(x)$
 $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x)$

Actividades

13. Si $f(x) = 2x^2 - x + 1$ y $g(x) = x + 1$ halla $f \circ g$ y $g(f(x))$.

14. Si $f(x) = \cos x$ y $g(x) = 2x + 3$, halla $f \circ g$, $g \circ g$, $f \circ f$ y $g \circ f$.

10. FUNCIÓN RECÍPROCA

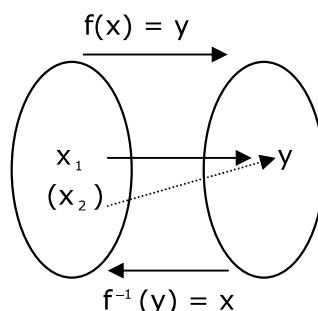
De manera intuitiva, llamaremos función recíproca de una función f , y escribiremos f^{-1} , a aquella que "deshace" lo que hace f . Es decir, si f asocia x con su imagen y , f^{-1} asociará cada y con la que fue su x .

Por esa razón, si $f(x) = 3x$ entonces $f^{-1}(x) = \frac{x}{3}$. Observa que si $f(2) = 6$, entonces $f^{-1}(6) = \frac{6}{3} = 2$. En general:

Definición:

Dada una función $f(x)$ inyectiva*, se llama **función recíproca** de f , y se escribe f^{-1} , a la función que cumple:

$$\text{Si } f(x) = y \Rightarrow f^{-1}(y) = x$$



(*) Para que exista f^{-1} es necesario que sea función, es decir, que cada y tenga una sola imagen x . Para ello, es imprescindible que la función f asocie cada x con una imagen distinta y . Es decir, que f sea **inyectiva**.

Dicho de otra manera, no puede haber dos orígenes distintos x_1 y x_2 que tengan la misma imagen, porque si ocurriera eso, f^{-1} no sería función, ya que "y" debería tener dos imágenes distintas: x_1 y x_2 .

Definición:

Se dice que una función f es **inyectiva** si a orígenes distintos les corresponden imágenes distintas. Es decir, si $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$, o lo que es lo mismo,

$$f \text{ inyectiva si } f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

Si hubiera dos imágenes iguales, sólo podrían proceder de un mismo origen.

Ejemplo:

Hallar la función recíproca de $f(x) = 3x-1$

Comprobamos primero que la función es inyectiva, es decir, $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$.

$$f(x_1) = 3 \cdot x_1 - 1$$

$f(x_2) = 3 \cdot x_2 - 1$ igualando: $3 \cdot x_1 - 1 = 3 \cdot x_2 - 1 \Rightarrow 3x_1 = 3x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$ luego sí es inyectiva y existe la función recíproca.

Para hallar ahora f^{-1} seguiremos la definición: $f(x) = y \Rightarrow f^{-1}(y) = x$

1. Primero igualamos $f(x)$ con y : $3x-1 = y$
2. Despejamos x : $3x = y+1 \Rightarrow x = \frac{y+1}{3}$
3. Igualamos $f^{-1}(y)$ con x : $f^{-1}(y) = \frac{y+1}{3}$
4. Finalmente, cambiamos y por x puesto que es indistinto.

Podemos comprobar que es correcto sustituyendo un punto cualquiera.

$f(2) = 3 \cdot 2 - 1 = 5$ luego $f^{-1}(5)$ debe ser 2. Lo comprobamos:

$$f^{-1}(5) = \frac{5+1}{3} = 2.$$

Además, si la función f multiplica por 3 y resta 1, la función f^{-1} suma 1 y divide entre 3, es decir, "hace lo contrario en el orden contrario".

Se cumple que las gráficas de f y f^{-1} son simétricas respecto a la bisectriz del primer-tercer cuadrantes ($y = x$).

Compruébalo dibujando las gráficas de las funciones del ejemplo anterior.

Piensa cuáles son las funciones recíprocas de $y = \sen x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = 2^x$

Escribe una función que no sea inyectiva.

Actividades

15. Representa $y = 3x$, $y = \frac{x}{3}$ y comprueba que son recíprocas (inversas).

16. Halla, si es posible, la función recíproca de:

a) $f(x) = 2x+4$ **b)** $g(x) = \frac{x+1}{x}$ **c)** $h(x) = 3x^2-1$ **d)** $f(x) = \frac{3x+4}{2x-3}$

17. Sean $f(x) = \frac{3x-1}{x+3}$ y $g(x) = 2x+4$. Calcula:

- a.** $(f \circ g)(x)$
- b.** $(g \circ f)(x)$
- c.** $f^{-1}(x)$
- d.** $f^{-1}(2)$
- e.** $(f - g)(x)$
- f.** $(f - g)(0)$
- g.** $(f / g)(x)$
- h.** $g^{-1}(x)$

18. TRABAJO EN GRUPO

Representación gráfica y análisis de las características (dominio, recorrido, simetrías, periodicidad, monotonía, extremos y acotación) de las siguientes funciones:

- 1.** Polinómicas: de grado 0 ($y=k$), 1 ($y = ax+b$) y 2 ($y = ax^2 + bx + c$)
- 2.** Exponenciales: $y = a^x$ siendo $a > 1$ ó $0 < a < 1$
- 3.** Logarítmicas: $y = \log_a x$ siendo $a > 1$ ó $0 < a < 1$
- 4.** De proporcionalidad inversa: $y = \frac{k}{x}$, $y = \frac{k}{x-a}$ distinguiendo $k > 0$, $k < 0$ y siendo a cualquier nº real.
- 5.** Trigonométricas $y = \text{sen}x$, $y = \text{cos}x$, $y = \text{tg}x$

EJERCICIOS Y CUESTIONES

FUNCIONES Y GRÁFICAS

1. Una función lineal cumple que $f(1)=3$ y $f(-2)=-9$. Halla su expresión analítica.

2. Representa $y = \frac{1}{2}x^2$. Y a partir de ella representa también:

a) $y = \frac{1}{2}x^2 + 3$ b) $y = \frac{1}{2}x^2 - 1$

3. Representa las funciones: a) $f(x) = \begin{cases} x+1 & x \in [-2,1) \\ x^2 - 2x + 1 & x \in [1,4) \\ 2 & x > 4 \end{cases}$

b) $y = |-x^2 + 2x + 4|$

c) $y = \left| \frac{x}{3} - 2 \right|$

4. Dibuja una gráfica que no sea función e indica porqué no lo es.

5. Halla el dominio de las siguientes funciones:

a) $y = \frac{5x}{x^2 + 2x}$

b) $y = \sqrt{2-x}$

c) $y = \sqrt[3]{-x+1}$

d) $y = \frac{2}{\sqrt{-x+1}}$

e) $y = \log_2(x+1)$

f) $y = x^4 + 3x - 1$

6. Representa gráficamente la función $f(x) = \begin{cases} -1 & x < -1 \\ x+2 & -1 \leq x < 2 \\ x-1 & x > 2 \end{cases}$

Indica también su dominio.

7. Dada la función $f(x) = 4x - 6$, se pide:

a. ¿Existe $f^{-1}(x)$?

b. Si existe, calcúlala.

c. Calcula $f^{-1}(f(x))$ y $f(f^{-1}(3))$

8. Dibuja las gráficas correspondientes a las funciones con las características que se citan a continuación:

a. $\text{Dom}(f) = (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$, $\text{Im}(f) = (-2, 2)$ y decreciente en todo el dominio.

b. $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{0\}$, $\text{Im}(f) = \mathbb{R}$, estrictamente creciente en $(-\infty, 0)$ y estrictamente decreciente en $(0, \infty)$

- c. $\text{Dom}(f)=\mathbb{R}$, $\text{Im}(f)=[0,\infty)$, simetría respecto del eje de ordenadas, máximo relativo en el punto $(0,2)$ y mínimos relativos en $(3,0)$ y $(-3,0)$
- d. $\text{Dom}(f)=\mathbb{R}$, simetría respecto del origen de coordenadas, acotada por -1 y 1 , alcanzando la función ambos valores, mínimo relativo en $(-2,-1)$ y máximo relativo en $(2,1)$.

9. Dada la función $f(x) = 2x - 2x^2$, comprueba que verifica $f(-x) = f(x+1)$.

10. Dadas las funciones $f(x) = \frac{x}{2-x}$ y $g(x) = x^2 + 2$, determina, con sus respectivos dominios, las funciones:

- a) $f+g$ b) $f \cdot g$ c) f/g d) $g \circ f$ e) $g \circ g$

11. Analiza el efecto que producen sobre la gráfica de una función $f(x)$ las siguientes transformaciones:

- a) añadir el valor absoluto: $|f(x)|$
 b) **sumar** (restar) un número a $f(x)$: $f(x)+k$
 c) sumar (restar) un número a x : $f(x+k)$
 d) función opuesta: $-f(x)$

* Para pensarlo, puedes empezar por imaginar una función sencilla, por ejemplo $f(x) = x^3$. Intenta dibujar $|x^3|$, x^3+2 y $(x+2)^3$. Después generaliza a cualquier función y cualquier k .

12. A partir de la gráfica de $f(x) = \frac{1}{x}$, representa:

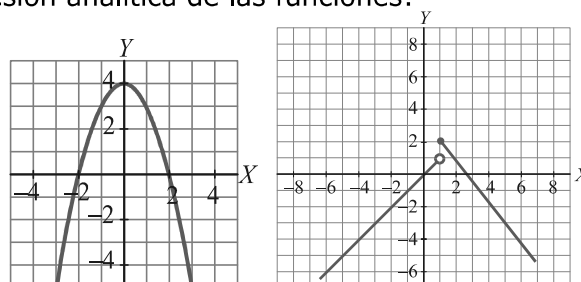
- a) $f(x) - 3$ b) $f(x+2)$ c) $|f(x)|$ d) $-f(x)$

13. Representa gráficamente la función $f(x) = |x-2|$. Escribe su expresión analítica como función a trozos.

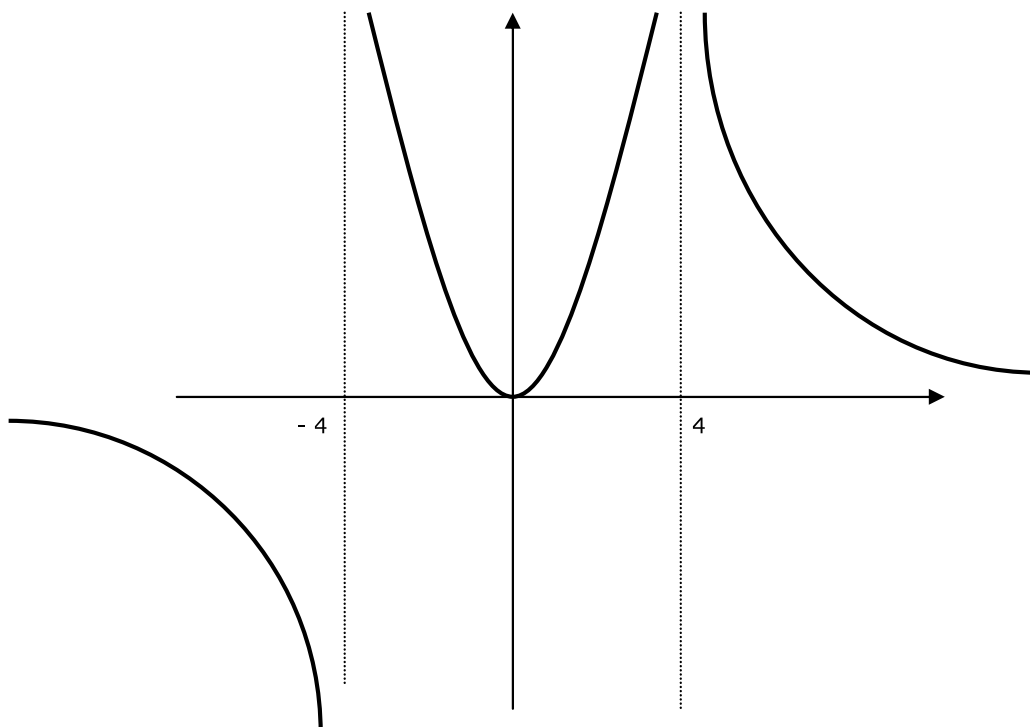
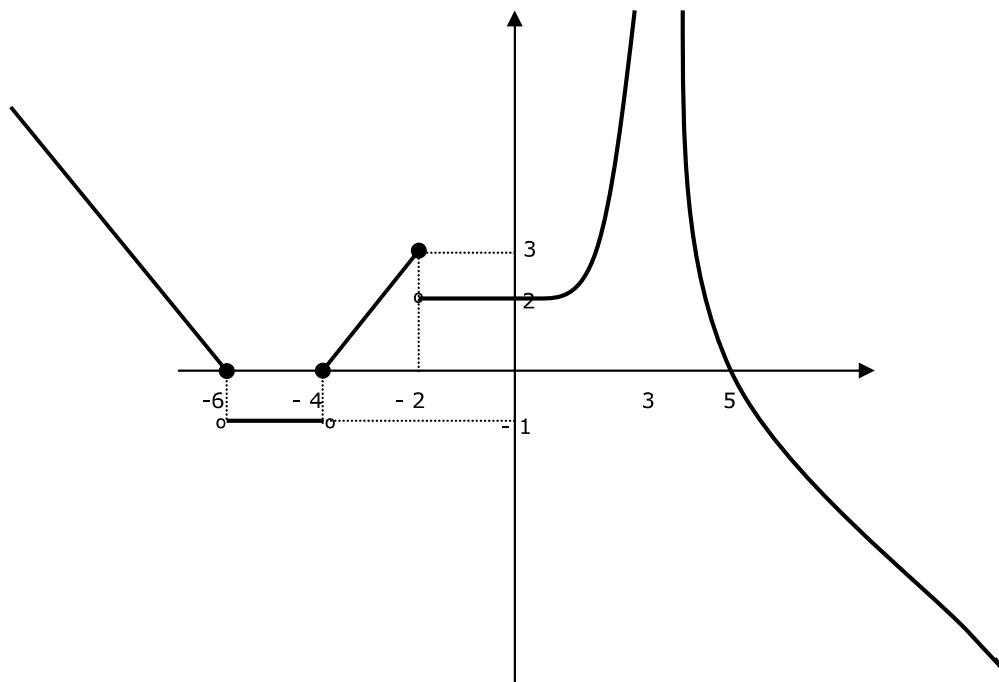
14. Elena va a visitar a su amiga Teresa y tarda 15 minutos en llegar a su casa que está a 1 km. de distancia. Está allí media hora y en el camino de vuelta emplea el mismo tiempo que en el de ida.

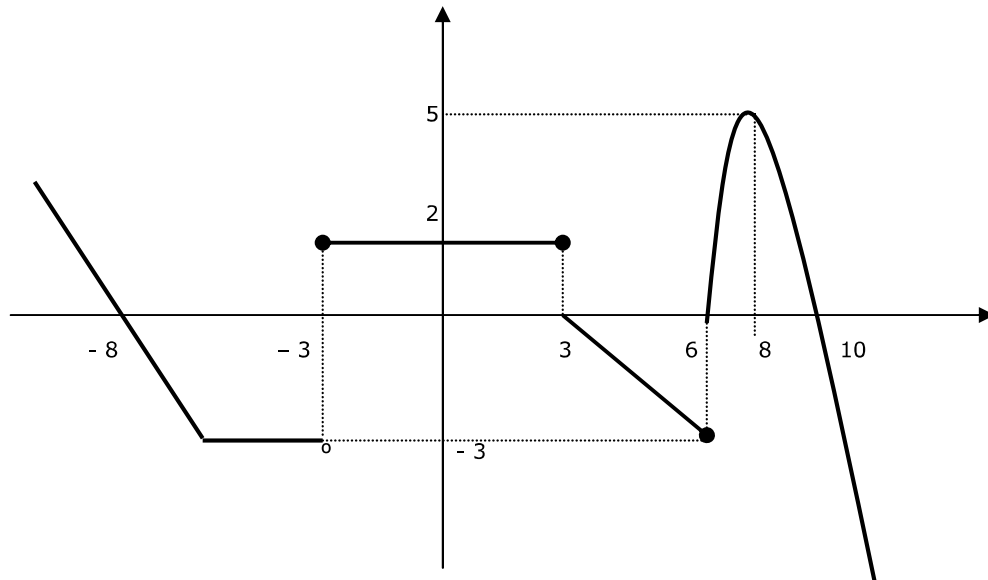
- a) Identifica la variable dependiente y la independiente
 b) Representa la función tiempo-distancia
 c) Encuentra su expresión analítica.

15. Encuentra la expresión analítica de las funciones:



16. Analiza las siguientes funciones:





Halla la expresión analítica de las dos últimas funciones.

17. Calcula la simetría de las siguientes funciones:

a) $f(x) = x^4 - 3x^2$

b) $f(x) = x^5 - 5x^3 + x$

c) $f(x) = x - x^2$

d) $f(x) = \frac{x^2}{x^3 + x}$

e) $f(x) = \frac{x^5}{x^2 + 2}$

f) $f(x) = \sqrt[5]{x^5 + x^3}$

g) $f(x) = \sqrt[3]{1 + x^3}$

18. Representa las siguientes funciones:

a) $f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & x \leq 2 \\ x^2 + 1 & 2 < x < 5 \\ 3 & 5 \leq x \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} x & x < 0 \\ 2 & 0 < x < 2 \\ x - 3 & 3 \leq x \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} \sin x & x \geq 0 \\ x^2 & -1 < x < 0 \\ -2x - 1 & x \leq -1 \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x < 0 \\ 3^x & 0 \leq x \end{cases}$

19. Sean $f(x) = 2x + 5$, $g(x) = \frac{3x+1}{2x-5}$ y $h(x) = \frac{2x+3}{7-5x}$. Calcula:

a) Las recíprocas de $f(x)$, $g(x)$ y $h(x)$.

b) $(f \circ g)(1)$, $(h \circ f)(0)$

c) $(f/g)(-1)$, $(f \cdot g)(2)$, $(h+g)(-2)$ y $(g-h)(3)$

CUESTIONES

1. Dadas las funciones $f(x) = \sqrt{x-9}$ y $g(x) = \frac{1}{\sqrt{4-x}}$, comprueba si existe su función suma $f+g$ o producto $f \cdot g$
2. ¿Existe alguna función par e impar a la vez? ¿Cuál?
3. Dibuja una función periódica que no sea trigonométrica.
4. Si $f(x)$ es estrictamente creciente en $\mathbb{R}$ ¿puede ser par? , ¿puede ser acotada superiormente?
5. La función $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \text{ es racional} \\ 1 & \text{si } x \text{ es irracional} \end{cases}$
 - a) es una función de dominio $\mathbb{R}$
 - b) es una función de dominio $\mathbb{R}-\mathbb{Q}$
 - c) es una función constante
 - d) no es una función.
6. Dadas las funciones $f(x) = \sqrt{x}$ y $g(x) = \frac{1}{x+5}$, la función $f \circ g$ es
 - a) $(f \circ g)(x) = \frac{1}{\sqrt{x+5}}$
 - b) $(f \circ g)(x) = \frac{1}{\sqrt{x}+5}$
 - c) $(f \circ g)(x) = \frac{\sqrt{x}}{x+5}$
 - d) $(f \circ g)(x) = \sqrt{\frac{x}{x+5}}$
7. Sobre las funciones del ítem anterior, podemos afirmar que el dominio de f es:
 - a) $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}$
 - b) $\mathbb{R}_+^* = \text{reales positivos sin el } 0$
 - c) $\mathbb{R}^+ = \text{reales positivos}$
 - d) $\mathbb{R}^- = \text{reales negativos}$
8. El dominio de g es:
 - a) $[-5, \infty)$
 - b) $(-5, \infty)$
 - c) $\mathbb{R} - \{5\}$
 - d) $\mathbb{R} - \{-5\}$
9. El dominio de $f \circ g$ es:
 - a) $\mathbb{R}^+$
 - b) $(-5, \infty)$
 - c) $[-5, \infty)$
 - d) $\mathbb{R} - \{-5\}$
10. Dadas las funciones $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ y $g(x) = x+1$, señala la afirmación correcta:
 - a) Las funciones f y g son iguales, aunque $\text{Dom}(f) \neq \text{Dom}(g)$
 - b) Las funciones f y g son distintas, aunque si $x \neq 1$, $f(x) = g(x)$
 - c) Salvo algún x aislado, $f(x) \neq g(x)$
 - d) Nada de lo anterior es cierto.
11. Dadas las funciones $f(x) = 2 - x$ y $g(x) = x^2 + x - 2$, se puede asegurar que:
 - a) f es una función impar
 - b) g es una función par
 - c) $f+g$ es una función par
 - d) $f+g$ es una función impar.

Relaciona cada dominio de definición con su respectiva función...

1) $(2, +\infty)$

1. $y = \frac{\sqrt{x^2 - x - 2}}{x + 9}$

2) $\mathbb{R} - \{-7\}$

2. $y = \frac{3\sqrt{x}}{x - 8}$

3) $(-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$

3. $y = \frac{1}{\sqrt{x - 2}}$

4) $\mathbb{R} - \{-2, 2\}$

4. $y = \frac{1}{x^2 - 16}$

5) $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

5. $y = \sqrt{3x - 4}$

6) $[0, 8) \cup (8, +\infty)$

6. $y = 3^{\frac{1}{x}}$

7) $(0, +\infty)$

7. $y = \frac{3}{x + 7}$

8) $(-\infty, -9) \cup (-9, -1] \cup [2, +\infty)$

8. $y = \sqrt{2x^2 + 4}$

9) $\left[\frac{4}{3}, +\infty\right)$

9. $y = \log(x + 3)$

10) $(-3, +\infty)$

10. $y = \frac{2x}{\log_2 x}$

11) $[5, +\infty)$

11. $y = \sqrt{x} + \sqrt{x - 5}$

12) $\mathbb{R}$

12. $y = \frac{2x - 4}{x + 1}$

Asocia a cada una de estas gráficas su ecuación:

1) $y = \frac{1}{x-4}$

2) $y = -\sqrt{x+1}$

3) $y = \frac{1}{x} + 2$

4) $y = \sqrt{2x}$

5) $y = \frac{-3x^2}{4}$

6) $y = \frac{-3x}{4}$

7) $y = 2x^2 - 2$

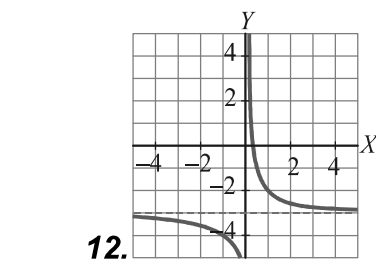
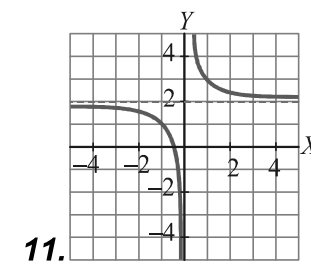
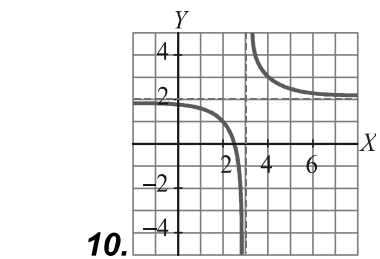
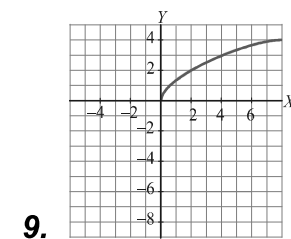
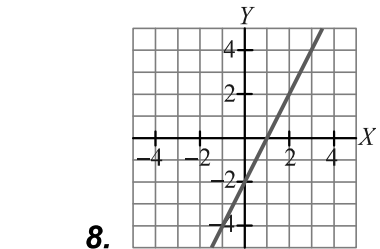
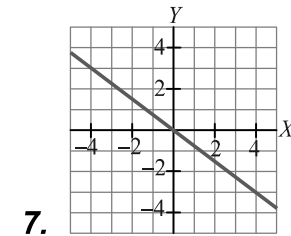
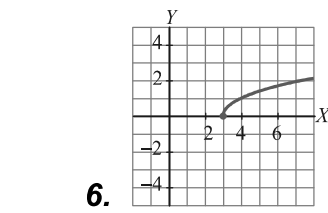
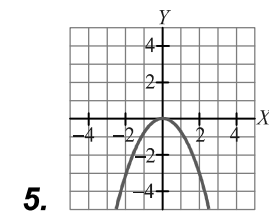
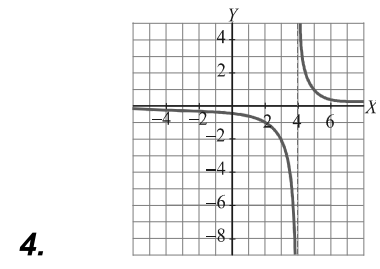
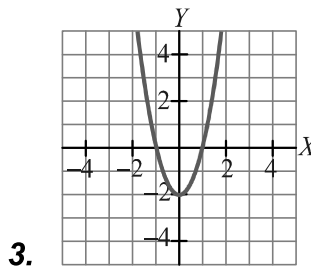
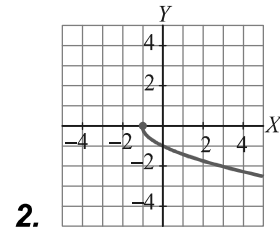
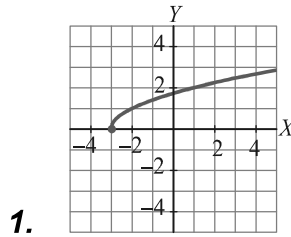
8) $y = 2x - 2$

9) $y = \sqrt{x-3}$

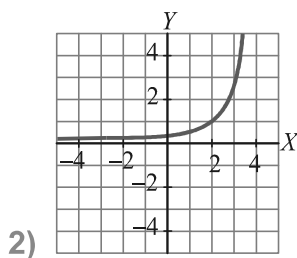
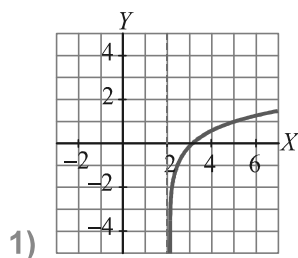
10) $y = \frac{1}{x-3} + 2$

11) $y = \frac{1}{x} - 3$

12) $y = \sqrt{x+3}$

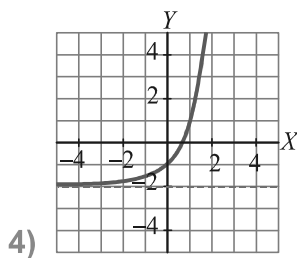
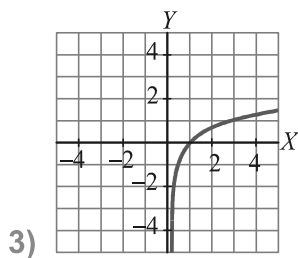


Asocia cada gráfica con su correspondiente ecuación:



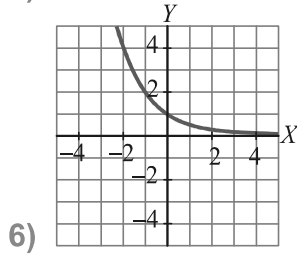
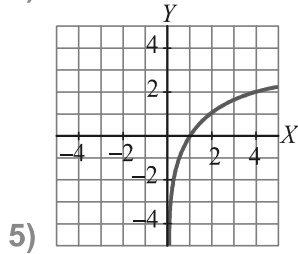
1. $y = 3^{x-2}$

2. $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$



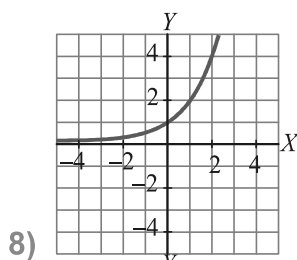
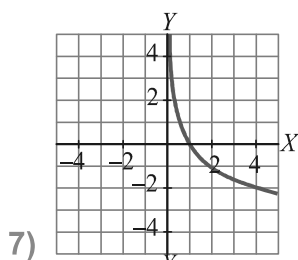
3. $y = 3^x - 2$

4. $y = \log_3(x-2)$



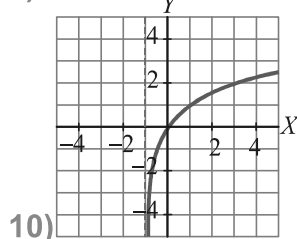
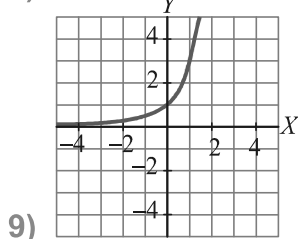
5. $y = 3^x$

6. $y = \log_3 x$



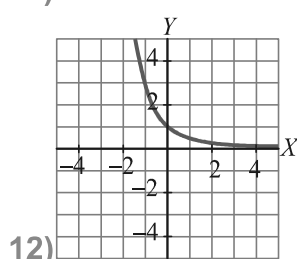
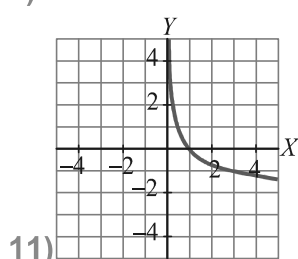
7. $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$

8. $y = 2^x$



9. $y = \log_2(x+1)$

10. $y = \log_{1/2} x$



11. $y = \log_2 x$

12. $y = \log_{1/3} x$

Asocia cada función con su gráfica.

1) $q(x) = \frac{2x}{x-1}$

2) $i(x) = \sqrt{2x+3}$

3) $g(x) = \frac{2x+1}{x-2}$

4) $p(x) = x^2 - x - 2$

5) $s(x) = \sqrt{x^2+1}$

6) $h(x) = \frac{3x-1}{x^2-4}$

7) $m(x) = \sqrt{2-x}$

8) $l(x) = \frac{2x^2}{x^2-1}$

9) $j(x) = \sqrt{x^2-4}$

10) $k(x) = \frac{1}{x+2}$

11) $r(x) = \sqrt{1-x}$

12) $f(x) = \sqrt{x^2-1}$

