

Apellidos:**Nombre:****Grupo:**

1.- (20 puntos) Dadas las funciones $f(x) = x^2 - 1$, $g(x) = \sqrt{x+1}$ y $h(x) = 2^{x+1}$

a) Demostrar que f y g son inversas.

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = (\sqrt{x+1})^2 - 1 = x + 1 - 1 = x$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \sqrt{x^2 - 1 + 1} = \sqrt{x^2} = x$$

b) Hallar $(h \circ g)(3) = h(g(3)) = h(\sqrt{3+1}) = h(2) = 2^{2+1} = 8$

$$(f \circ h)(-1) = f(h(-1)) = f(2^0) = f(1) = 0$$

2.- (10 puntos) La población de una ciudad es de 2 500 000 habitantes, aumenta a un ritmo anual del 8 por ciento. Calcular el número de habitantes de la ciudad dentro de 50 años . ¿Cuántos años tardará en duplicarse la población?

$$P = 2500000 \cdot 1,08^t$$

$$\text{para } t = 50 \Rightarrow P = 2500000 \cdot 1,08^{50} = 117254031,3 \approx 117\,254\,031 \text{ habitantes}$$

$$5000000 = 2500000 \cdot 1,08^t \Rightarrow 2 = 1,08^t \Rightarrow t = \frac{\ln 2}{\ln 1,08} \approx 9 \text{ años}$$

3.- (40 puntos) Hallar los siguientes límites:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1} = \frac{\sqrt{1}}{1} = 1$

b) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 3x} = \left(\frac{0}{0} \text{ Ind.} \right) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-2)(\cancel{x-3})}{x(\cancel{x-3})} = \frac{3-2}{3} = \frac{1}{3}$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 - 4x^2 - 12}{2 - 3x^3} = \left(\frac{\infty}{\infty} \text{ Ind.} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3}{-3x^3} = -\frac{2}{3}$

d) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 - 9}{6\sqrt{x+3}} = \left(\frac{0}{0} \text{ Ind.} \right) = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{(x-3)(\cancel{x+3})\sqrt{x+3}}{6\sqrt{x+3}\sqrt{x+3}} = \frac{0}{6} = 0$

e) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^4 - 5x^3 - 1}{x^3 + 12} \underset{C.V. t = -x}{=} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t^4 + 5t^3 - 1}{-t^3 + 12} = \left(\frac{\infty}{\infty} \text{ Ind.} \right) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t^4}{-t^3} = \lim_{t \rightarrow \infty} -t = -\infty$

f) $\lim_{x \rightarrow 2} (5x - 6)^{x-2} = (10 - 6)^0 = 4^0 = 1$

g) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x^2 - x}{x+1} - \frac{2x^2}{x-1} \right) = (\infty - \infty \text{ Ind.}) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{(2x^2 - x)(x-1) - 2x^2(x+1)}{(x+1)(x-1)} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{-5x^2 + x}{x^2 - 1} \right) =$

$$= \left(\frac{\infty}{\infty} \text{ Ind.} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-5\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}} = -5$$

$$\begin{aligned}
 \text{h) } \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 5x - 3} - x) &= (\infty - \infty \text{ Ind.}) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 5x - 3} - x)(\sqrt{x^2 + 5x - 3} + x)}{\sqrt{x^2 + 5x - 3} + x} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 5x - 3 - x^2}{\sqrt{x^2 + 5x - 3} + x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x - 3}{\sqrt{x^2 + 5x - 3} + x} = \left(\frac{\infty}{\infty} \text{ Ind.} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x}{\sqrt{x^2} + x} = \frac{5}{2}
 \end{aligned}$$

4.- (20 puntos) Estudiar la continuidad de la función y clasificar las discontinuidades si existen:

$$\text{a) } f(x) = \frac{x^2 - 1}{2x + 2}$$

$\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{-1\} \Rightarrow$ como es una función racional es continua en $\mathbb{R} - \{-1\}$

$$x = -1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{2(x + 1)} = \left(\frac{0}{0} \text{ Ind.} \right) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(x-1)}{2(x+1)} = \frac{-2}{2} = -1 \text{ y } \nexists f(-1) \Rightarrow \text{discontinuidad evitable.}$$

$$\text{b) } f(x) = \begin{cases} \frac{x+1}{x} & \text{si } x < -2 \\ 5 - 2x & \text{si } x \geq -2 \end{cases}$$

⊙ $y = \frac{x+1}{x}$ es continua en $\mathbb{R} - \{0\}$ y por tanto continua en $x < -2$

⊙ $y = 5 - 2x$ es continua en $\mathbb{R}$ y por tanto en $x > -2$

$$\left. \begin{aligned}
 &\rightarrow \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^+} 5 - 2x = 9 \\
 &\rightarrow \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{x+1}{x} = \frac{1}{2}
 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{discontinuidad no evitable de salto finito.}$$

$y=f(x)$ es continua en $\mathbb{R} - \{-2\}$

5.- (10 puntos) Hallar el valor del parámetro “a” para que la $f(x) = \begin{cases} x^2 + ax - 1 & \text{si } x \leq 1 \\ x + 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$ sea continua en

todo $\mathbb{R}$.

⊙ $y = x^2 + ax - 1$ y $y = 2^x$ son funciones continuas en $\mathbb{R}$.

$$\left. \begin{aligned}
 &\rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} 2^x = 2 \\
 &\rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} x^2 + ax - 1 = a \\
 &\rightarrow f(1) = a
 \end{aligned} \right\} \Rightarrow a = 2$$

para $a=2$ la función es continua en todo $\mathbb{R}$