

EJERCICIOS DE CONTINUIDAD CON SOLUCIÓN

1. Calcula el $\lim_{x \rightarrow 1}$ y $\lim_{x \rightarrow -2}$ de las siguientes funciones definidas a trozos:

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} 5x+3 & x \leq 1 \\ 9x-1 & x > 1 \end{cases} \quad \text{b) } f(x) = \begin{cases} 6x-3 & x < -2 \\ x^2-4 & x \geq -2 \end{cases} \quad \text{c) } f(x) = \begin{cases} 3 & x \leq -2 \\ 9x+21 & -2 \leq x < 1 \\ 29x^2+1 & x \geq 1 \end{cases}$$

Sol: a) 8, -7 b) -3, no existe c) no existe, 30

2. Estudia la continuidad de la función $f(x) = \begin{cases} \ln(x-2) & \text{si } x \geq 3 \\ \text{sen}(x-3) & \text{si } x < 3 \end{cases}$ en el punto $x=3$.

Sol: La función es continua.

3. Estudia la continuidad de la función $f(x) = \frac{x^2-1}{x+1}$ en el punto $x=-1$. Define la función para que sea continua.

$$\text{Sol: } f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x+1} & \text{si } x \neq -1 \\ -2 & \text{si } x = -1 \end{cases}$$

4. Estudia la continuidad de la función $f(x)=1/x$ en $x=0$.

Sol: La función tiene una discontinuidad de salto infinito en $x=0$.

5. Estudia la continuidad en $x=2$ de la función $f(x) = \begin{cases} x-1 & \text{si } x \leq 2 \\ 3 & \text{si } x > 2 \\ \frac{3}{x-2} & \end{cases}$

Sol: La función tiene una discontinuidad de salto infinito en $x=2$.

6. Estudia la continuidad de las siguientes funciones, sin indicar los tipos de discontinuidad:

$$\text{a) } f(x) = \frac{x+1}{x^2-16} \quad \text{b) } g(x) = x^2 + \ln x \quad \text{c) } h(x) = \sqrt{x-2} \quad \text{d) } j(x) = \sqrt[3]{6x^3 - 3x + 2}$$

Sol: a) Continua en todo $\mathbb{R} - \{4, -4\}$.

b) Continua en $(0, +\infty)$

c) Continua en $[2, +\infty)$

d) Continua en todos los números reales.

7. Estudia la continuidad de las siguientes funciones:

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} \frac{4}{x-6} & \text{si } x < 2 \\ 3x-1 & \text{si } 2 \leq x < 3 \\ 2x+2 & \text{si } x \geq 3 \end{cases} \quad \text{b) } g(x) = \begin{cases} \text{sen } x & \text{si } x < 0 \\ \frac{2x-4}{x^2-4} & \text{si } 0 \leq x < 2 \\ \frac{1}{2} & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

Sol: a) Continua salvo en $x=2$, donde hay una discontinuidad de salto finito de valor $S=6$.

b) Continua salvo en $x=0$. En $x=0$ hay una discontinuidad de salto finito de valor $S=1$.

8. Halla el valor que debe tener k para que la función $f(x) = \frac{2x^2 + 4kx + 10}{x-1}$ tenga una discontinuidad evitable en $x=1$.

Sol: Nótese que para que sea evitable debe existir límite finito, para ello la única posibilidad es que en $x=1$ halla una indeterminación del tipo $0/0$. Debe ser $k = -3$.

9. Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 & x \leq 0 \\ ax+b & 0 < x \leq 2 \\ \frac{1}{x-1} & 2 < x \end{cases}$$

Encuentra un valor de b para que la función sea continua en $x=0$. Para ese valor de b , encuentra un valor de a que haga que la función sea también continua en $x=2$.

Sol: $a=1/2$ y $b=0$.