

TEMA 11 – LÍMITES, CONTINUIDAD, ASÍNTOTAS

11.1 – LÍMITE DE UNA FUNCIÓN

11.1.1 – LÍMITE DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO

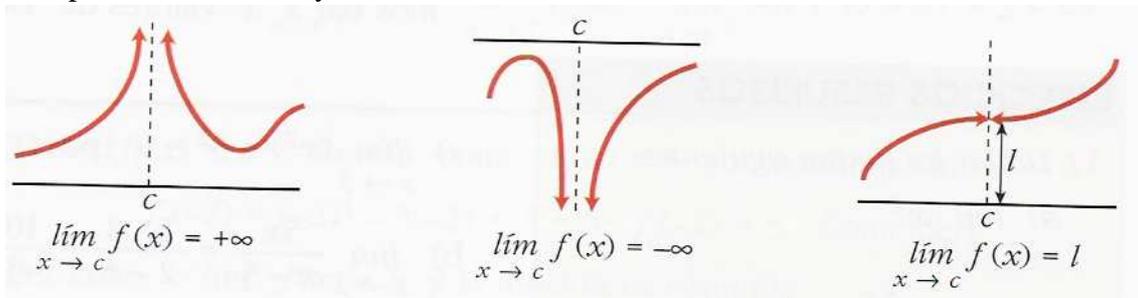
Límite de una función en un punto

$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \ell$ Se lee: El límite cuando x tiende a c de $f(x)$ es ℓ

Significa: ℓ es el valor al que se aproxima $f(x)$ cuando x se aproxima a c

Notas:

- Que x se aproxima a “ c ” significa que toma valores muy cerca de “ c ” (Se puede acercar por la izquierda o por la derecha).
- ℓ puede ser $+\infty$ ó $-\infty$ y entonces $x = c$ es una **asíntota vertical**.

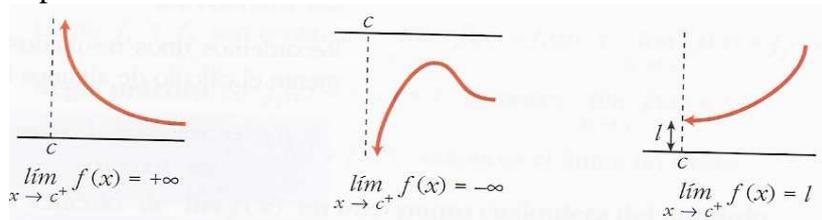


Límites laterales de una función en un punto

- Límite por la derecha:

$\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = \ell$ Se lee: El límite cuando x tiende a c por la derecha de $f(x)$ es ℓ

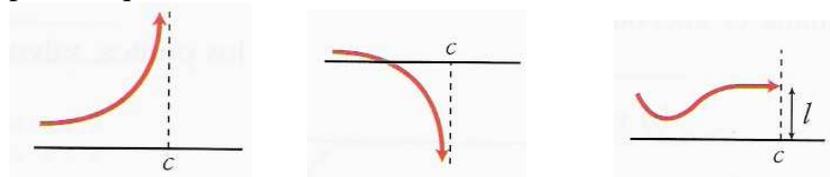
Significa: ℓ es el valor al que se aproxima $f(x)$ cuando x se aproxima a c por la derecha.



- Límite por la izquierda:

$\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = \ell$ Se lee: El límite cuando x tiende a c por la izquierda de $f(x)$ es ℓ

Significa: ℓ es el valor al que se aproxima $f(x)$ cuando x se aproxima a c por la izquierda.



Existen del límite

Para que exista el límite de una función en un punto es necesario que existan los dos límites laterales y sean iguales.

11.1.2 – LÍMITES EN EL INFINITO

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

Se lee: El límite cuando x tiende a más infinito de $f(x)$ es más infinito

Significa: la función toma valores grandes positivos cuando la x toma valores grandes positivos. (1º cuadrante)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$$

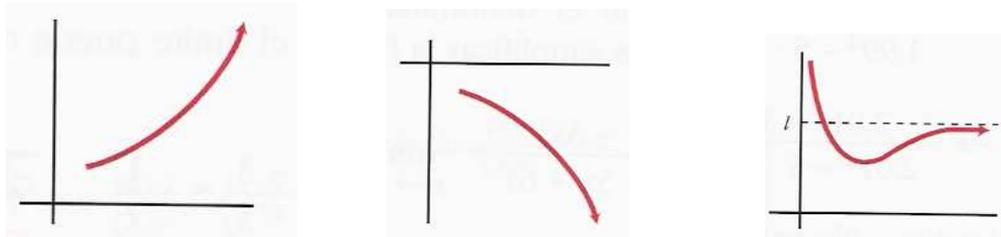
Se lee: El límite cuando x tiende a más infinito de $f(x)$ es menos infinito.

Significa: la función toma valores grandes negativos cuando la x toma valores grandes positivos. (4º cuadrante)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$$

Se lee: El límite cuando x tiende a más infinito de $f(x)$ es ℓ

Significa: ℓ es el valor al que se aproxima $f(x)$ cuando x toma valores muy grandes positivos: $y = \ell$ es **una asíntota vertical**.



$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

Se lee: El límite cuando x tiende a menos infinito de $f(x)$ es más infinito

Significa: la función toma valores grandes positivos cuando la x toma valores grandes negativos. (2º cuadrante)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

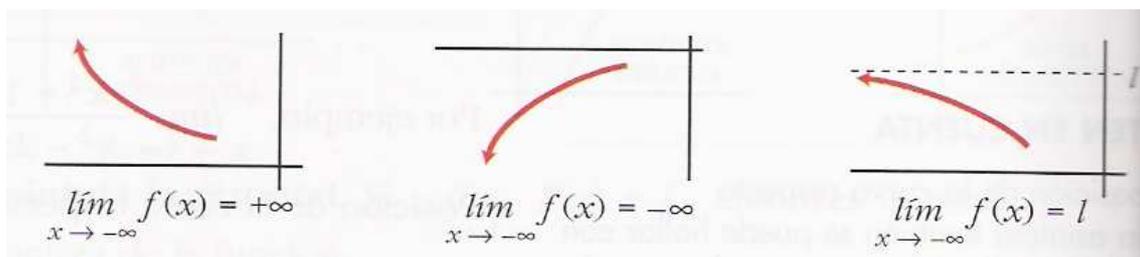
Se lee: El límite cuando x tiende a menos infinito de $f(x)$ es menos infinito.

Significa: la función toma valores grandes negativos cuando la x toma valores grandes negativos. (3º cuadrante)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \ell$$

Se lee: El límite cuando x tiende a menos infinito de $f(x)$ es ℓ

Significa: ℓ es el valor al que se aproxima $f(x)$ cuando x toma valores muy grandes negativos: $y = \ell$ es **una asíntota vertical**.



11.1.3 – CÁLCULO DE LÍMITES

1 – Se sustituye la “x” por el valor al que tiende

- | | | |
|--|--|--|
| a) $\lim_{x \rightarrow 3} x^2$ | b) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{5x}{x-5}$ | c) $\lim_{x \rightarrow 7} \sqrt{3x+4}$ |
| d) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\sin x + 3)$ | e) $\lim_{x \rightarrow 0,1} \log_{10} x$ | f) $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x^2 + 4x + 7$ |
| g) $\lim_{x \rightarrow +\infty} -2x^2 - 4x + 7$ | h) $\lim_{x \rightarrow -\infty} 2x^2 - 4x + 7$ | i) $\lim_{x \rightarrow -\infty} -2x^2 + 4x + 7$ |
| j) $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x + x^3 - 3$ | k) $\lim_{x \rightarrow -\infty} 2x + x^3 - 3$ | l) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{3x}$ |
| m) $\lim_{x \rightarrow -\infty} -\frac{1}{x^2}$ | n) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - 1}{-5}$ | ñ) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 - 1}{-5}$ |

2 – Indeterminaciones:

$\frac{k}{0}$ **Hallar límites laterales**

- | | | |
|--|--|--|
| a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2}{x-2}$ | b) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{-2}{x-2}$ | c) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3}{2-x}$ |
| d) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{-3}{2-x}$ | e) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x}{(x-2)^2}$ | f) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{-3}{(x-2)^2}$ |

$\frac{0}{0}$ **Factorizar y simplificar**

- | | | |
|--|---|---|
| a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 + 3x - 10}$ | b) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 5x^2 + 6x}{x^3 - 7x^2 + 16x - 12}$ | c) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 5x^2 + 6x}{x^3 - 7x^2 + 16x - 12}$ |
|--|---|---|

$\left. \begin{array}{l} \pm \infty \\ \frac{\infty}{\infty} \\ 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Si grado del numerador} > \text{grado del denominador } r \text{ (El signo depende de los} \\ \text{coeficientes de la } x \text{ de mayor grado del numerador y del denominador } r) \\ \\ \text{Si grado del numerador} = \text{grado del denominador } r \text{ (a y b son los coeficientes} \\ \text{de la } x \text{ de mayor grado del numerador y del denominador } r) \\ \\ \text{Si grado del numerador} < \text{grado del denominador } r \end{array}$

- | | |
|---|---|
| a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 5x + 3}{3x - 5}$ | b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 3}{x^3}$ |
| c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 5x + 1}{2x^2 - 5}$ | d) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 3}{-x^3}$ |

$\infty - \infty$ Se hacen operaciones. Cuando aparecen radicales, multiplicamos y dividimos por la expresión conjugada.

- | | |
|--|--|
| a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{x} - \frac{2x}{x^2 + 1} \right)$ | b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{1-x}}{x}$ |
|--|--|

1º : Tipo número e : Aplicar : $\lim_{x \rightarrow \begin{cases} a \\ \infty \end{cases}} \left(1 + \frac{1}{f(x)} \right)^{f(x)} = e$ ó

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x)^{g(x)} = e^{\lim_{x \rightarrow a} g(x) \cdot [f(x) - 1]}$$

3- En funciones definidas a trozos, en los puntos donde esté definida de distinta forma si me aproximo por valores más pequeños, que por valores más grandes, habrá que hacer límites laterales.

a) Dada la función $f(x) = \begin{cases} 2x - 5 & \text{si } x < 3 \\ -x + 7 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$ Calcular su límite en los puntos 3, 1, 7

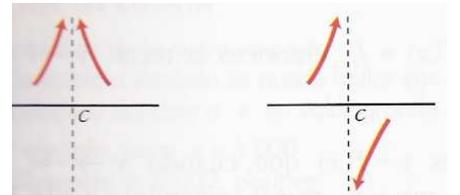
11. 2 – ASÍNTOTAS Y RAMAS INFINITAS

- **Asíntotas verticales:** $x = c$ y $\rightarrow \infty$

Cálculo: Puntos que anulan el denominador

Puntos que anulan lo que está dentro del logaritmo

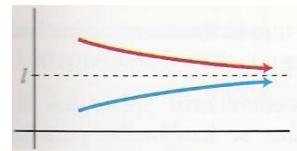
Aproximación: Calcular los límites laterales $\begin{cases} -\infty & \text{Por abajo} \\ +\infty & \text{Por arriba} \end{cases}$



- **Asíntotas horizontales:** $x \rightarrow \infty$ y $y = b$ (Grado numerador \leq Grado denominador)

Cálculo: $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b$

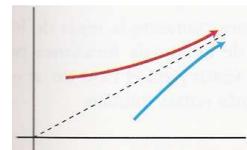
Aproximación: $f(\pm 1000) - \text{Asíntota}$ $\begin{cases} < 0 & \text{Por debajo} \\ > 0 & \text{Por encima} \end{cases}$



- **Asíntotas oblicuas:** $y = mx + n$ (Grado Numerador – Grado denominador = 1)

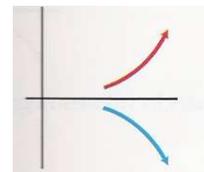
Cálculo: $m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$; $n = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx)$

Aproximación: $f(\pm 1000) - \text{Asíntota}(\pm 1000)$ $\begin{cases} < 0 & \text{Por debajo} \\ > 0 & \text{Por encima} \end{cases}$



RAMAS INFINITAS (Grado Numerador – Grado denominador ≥ 2)

Cálculo: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$



a) $y = \frac{x^2 - 5x + 7}{x - 2}$

b) $y = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 2x}$

c) $y = \frac{2x}{x^2 + 2x}$

d) $y = \frac{3x - 5}{x^2 + 3x + 2}$

e) $y = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 2x}$

f) $y = \frac{x^3 - 5x^2}{-x + 3}$

11.3 - CONTINUIDAD

La idea de función continua es la de que “puede ser construida con un solo trazo”.

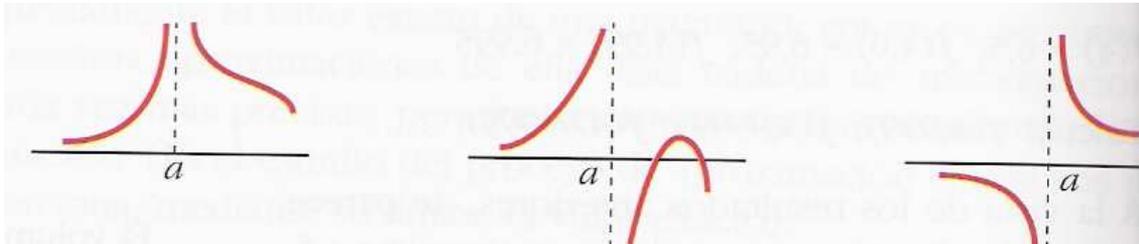
Una función $f(x)$ es continua en el punto $x = a$ si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

Todas las funciones definidas por expresiones analíticas elementales (es decir, todas las que conocemos hasta ahora, exceptuando las funciones a trozos), son continuas en todos los puntos de su dominio.

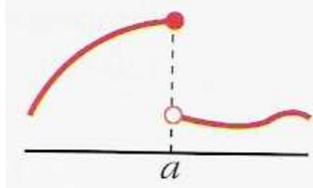
Las funciones a trozos habrá que estudiarlas en los extremos de sus trozos que pertenezcan al dominio.

Tipos de discontinuidades

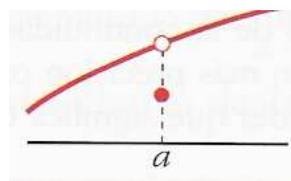
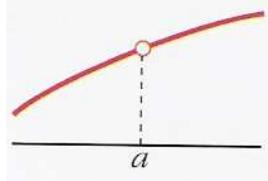
- **Discontinua inevitable de salto infinito:** Si alguno de los límites laterales es infinito o no existe.



- **Discontinua inevitable de salto finito:** Si los dos límites laterales son finitos pero distintos. El salto es la diferencia, en valor absoluto, de los límites laterales.



- **Discontinua evitable:** Si los dos límites laterales son finitos e iguales, pero su valor no coincide con $f(a)$ o no existe $f(a)$



a) $y = x^2 - 5$ b) $y = \frac{x^2 - 3}{x}$ c) $y = \frac{x + 2}{x - 3}$ d) $\log x$

e) $y = \sqrt{x + 2}$ f) $y = \begin{cases} 3x - 4 & \text{si } x < 3 \\ x + 1 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$ g) $y = \begin{cases} 3 & \text{si } x \neq 4 \\ 1 & \text{si } x = 4 \end{cases}$

h) Calcular el valor de n para que la función $f(x) = \begin{cases} x^2 - 5x + 1 & \text{si } x \leq 4 \\ 2x + n & \text{si } x > 4 \end{cases}$ sea continua en todo \mathbb{R} .

i) Calcular k para que $y = \begin{cases} x^3 - 2x + k & \text{si } x \neq 3 \\ 7 & \text{si } x = 3 \end{cases}$ sea continua en \mathbb{R}