Ejercicio 1.

Resuelve, por el método de Gauss, el sistema:

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ 3x+2y-z=0 \\ 2x+4y+3z=-6 \end{cases}$$

Solución:

Escribimos el sistema en forma de matriz y aplicamos el método de Gauss para obtener un sistema escalonado:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 3 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3=F_3-3F_1]{F_2=F_2+F_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -9 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 \rightleftarrows F_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -9 \\ 4 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3=F_3-3F_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -9 \\ 7 & 0 & 0 & 28 \end{pmatrix}$$

$$\text{Entonces, el sistema queda: } \begin{cases} x+y+z=1 \;\rightarrow\; 4-5+z=1 \;\rightarrow\; z=2 \\ -x+y=-9 \;\rightarrow\; -4+y=-9 \;\rightarrow\; y=-5 \\ 7x=28 \;\rightarrow\; x=4 \end{cases} \Rightarrow \text{solución: } \begin{cases} x=4 \\ y=-5 \\ z=2 \end{cases}$$

Ejercicio 2.

Resuelve las siguientes inecuaciones:

$a)\;\; x^3+4x^2-21x<0$ $\qquad\qquad$ $b)\;\; \dfrac{x^2}{2-x} \geq 1$

Solución:

$a)\;\; x^3+4x^2-21x<0$

Descomponemos en factores el polinomio: $x^3+4x^2-21x = x\left(x^2+4x-21\right) = x(x+7)(x-3)$

ya que la ecuación $x^2+4x-21=0$ *tiene por soluciones* $\begin{cases} x=-7 \\ x=3 \end{cases}$

Ahora, veamos cuándo $x(x+7)(x-3)<0$

	$(-\infty,-7)$	-7	$(-7\ ,\ 0)$	0	$(0\ ,\ 3)$	3	$(3,+\infty)$
x	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$(x+7)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$(x-3)$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$x(x+7)(x-3)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Solución: $(-\infty,-7)\cup(0,3)$

b) $\dfrac{x^2}{2-x} \geq 1 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{x^2}{2-x} - 1 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{x^2}{2-x} - \dfrac{2-x}{2-x} \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{x^2+x-2}{2-x} \geq 0$

Factorizamos el numerador y nos queda $\dfrac{(x-1)(x+2)}{2-x} \geq 0$. *Ahora, analicemos el signo de la fracción:*

	$(-\infty\,,-2)$	-2	$(-2\,,\,1)$	1	$(1\,,\,2)$	2	$(2\,,+\infty)$
$(x+2)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$(x-1)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$(2-x)$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	0	$-$
$\dfrac{(x+2)(x-1)}{2-x}$	$+$	0	$-$	0	$+$	$\nexists$	$-$

Solución: $(-\infty,-2] \cup [1,2)$

Ejercicio 3.

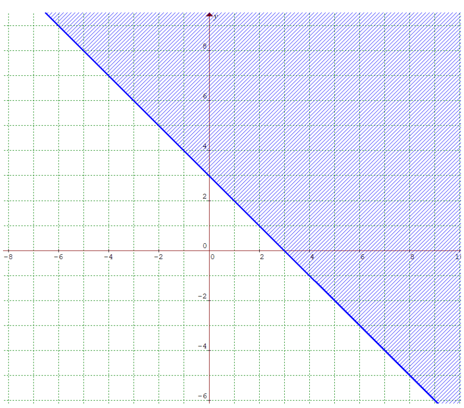
Resuelve el siguiente sistema de inecuaciones lineales:

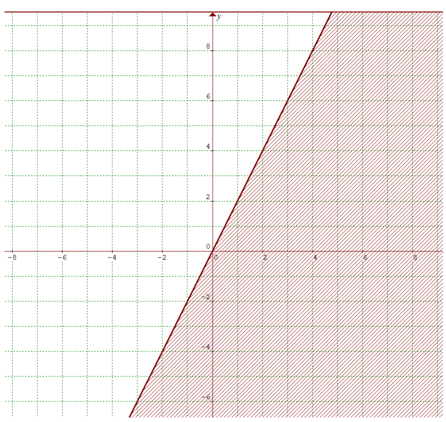
$$\begin{cases} x+y \geq 3 \\ 2x-y \geq 0 \\ x \leq 4 \end{cases}$$

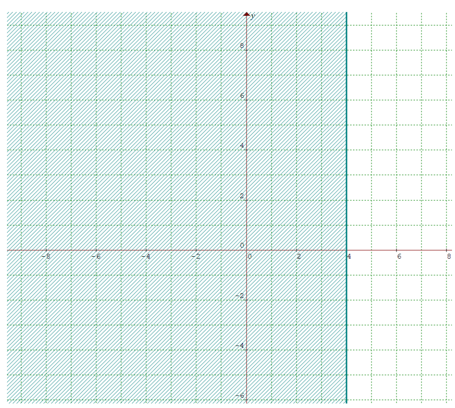
Solución:

Los sistemas de inecuaciones lineales con dos incógnitas, los resolvemos gráficamente. Para ello, representamos las rectas y vemos la región del plano que cumple cada desigualdad. Nos quedaremos con los puntos del plano que cumplan todas las desigualdades, es decir, con la intersección de las regiones.

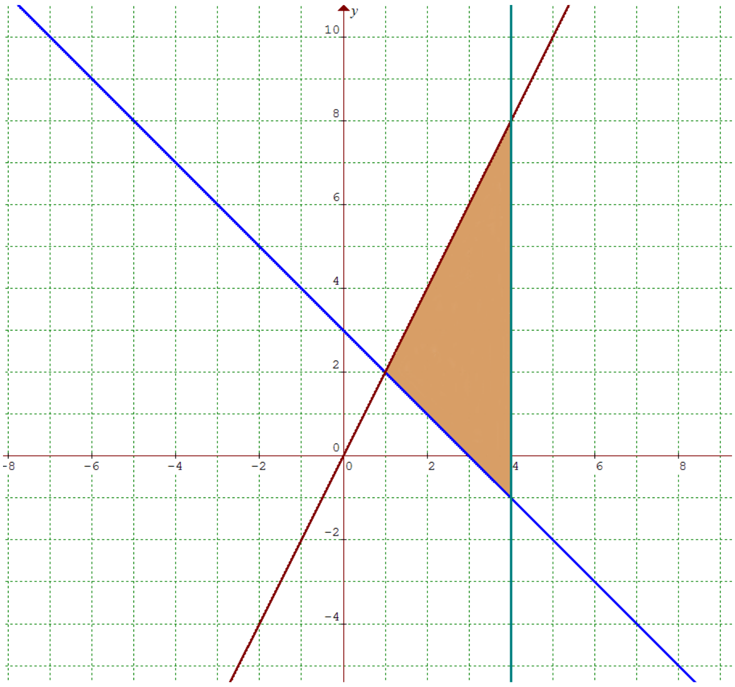
$x+y \geq 3 \quad \Rightarrow \quad y \geq 3-x$ $\qquad 2x-y \geq 0 \quad \Rightarrow \quad y \leq 2x$ $\qquad x \leq 4$







Luego la solución del sistema será la región coloreada en la gráfica siguiente, incluyendo los puntos que están sobre las rectas:



Ejercicio 4.

Resuelve las siguientes ecuaciones:

$$a)\quad 1-\log x=\log(2x-3)+\log(x+3)$$

$$b)\quad 3^{2-x}+3^{x+1}=28$$

Solución:

$a)\ 1-\log x=\log(2x-3)+\log(x+3) \quad\Rightarrow\quad 1=\log x+\log(2x-3)+\log(x+3) \quad\Rightarrow\quad 1=\log\left[x(2x-3)(x+3)\right] \quad\Rightarrow$

$\Rightarrow\quad x(2x-3)(x+3)=10 \quad\Rightarrow\quad 2x^3+3x^2-9x-10=0$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & 3 & -9 & -10 \\ -1 & & -2 & -1 & 10 \\ \hline & 2 & 1 & -10 & 0 \\ 2 & & 4 & 10 & \\ \hline & 2 & 5 & 0 & \end{array} \qquad (x+1)(x-2)(2x+5)=0 \quad\Rightarrow\quad \left\{\cancel{x=-1}\ ,\ x=2\ ,\ \cancel{x=-\frac{5}{2}}\right\}$$

$b)\ 3^{2-x}+3^{x+1}=28 \quad\Rightarrow\quad \dfrac{3^2}{3^x}+3\cdot 3^x=28 \quad \left(\text{cambio de variable }\ 3^x=t\right) \quad\Rightarrow\quad \dfrac{9}{t}+3t=28 \quad\Rightarrow\quad 9+3t^2=28t$

$$3t^2-28t+9=0 \quad\Rightarrow\quad t=\frac{28\pm\sqrt{(-28)^2-4\cdot 3\cdot 9}}{6}=\frac{28\pm\sqrt{676}}{6}=\frac{28\pm 26}{6}\Rightarrow\left\langle\begin{array}{l} t=9 \quad\Rightarrow\quad 3^x=9 \quad\Rightarrow\quad x=2 \\ t=\dfrac{1}{3} \quad\Rightarrow\quad 3^x=3^{-1} \quad\Rightarrow\quad x=-1 \end{array}\right.$$

Ejercicio 5.

Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones:

$$a)\ \begin{cases} \dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{y}=7 \\ x-2y=1 \end{cases} \qquad b)\ \begin{cases} \log(x+y)+\log(x-y)=\log 40 \\ 2^x\cdot 2^y=1024 \end{cases}$$

Solución:

$$a)\ \begin{cases} \dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{y}=7 \\ x-2y=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{2y}{xy}+\dfrac{3x}{xy}=\dfrac{7xy}{xy} \\ x-2y=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x+2y=7xy \\ x=2y+1 \end{cases} \Rightarrow 3(2y+1)+2y=7(2y+1)y$$

$$\Rightarrow 6y+3+2y=14y^2+7y \Rightarrow 14y^2-y-3=0 \Rightarrow y=\frac{1\pm\sqrt{1+168}}{28}=\frac{1\pm 13}{28} \Rightarrow \begin{cases} y=\dfrac{1}{2} \\ y=-\dfrac{3}{7} \end{cases}$$

$$soluciones: \begin{cases} \boxed{y=\dfrac{1}{2} \quad , \quad x=2} \\ \boxed{y=-\dfrac{3}{7} \quad , \quad x=\dfrac{1}{7}} \end{cases}$$

$$b)\ \begin{cases} \log(x+y)+\log(x-y)=\log 40 \\ 2^x\cdot 2^y=1024 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \log\left[(x+y)(x-y)\right]=\log 40 \\ 2^{x+y}=2^{10} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x+y)(x-y)=40 \\ x+y=10 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2-y^2=40 \\ y=10-x \end{cases} \Rightarrow x^2-(10-x)^2=40 \Rightarrow x^2-(100-20x+x^2)=40 \Rightarrow 20x=140 \Rightarrow x=7$$

$$solución: \{x=7 \ , \ y=3\}$$