Ejercicio 1.

Resuelve, por el método de Gauss, el sistema:

$$\begin{cases} 2x+y-z=0 \\ x-y+2z=5 \\ x+y+z=3 \end{cases}$$

Solución:

Escribimos el sistema en forma de matriz y aplicamos el método de Gauss para obtener un sistema escalonado:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_1=F_1-2F_3]{F_2=F_2-F_3} \begin{pmatrix} 0 & -1 & -3 & -6 \\ 0 & -2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1 \rightleftarrows F_2} \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -3 & -6 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1=F_1-2F_2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 7 & 14 \\ 0 & -1 & -3 & -6 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{Entonces, el sistema queda: } \begin{cases} 7z=14 \;\rightarrow\; z=2 \\ -y-3z=-6 \;\rightarrow\; -y-6=-6 \;\rightarrow\; y=0 \\ x+y+z=3 \;\rightarrow\; x+2=3 \;\rightarrow\; x=1 \end{cases} \Rightarrow \text{solución: } \begin{cases} x=1 \\ y=0 \\ z=2 \end{cases}$$

Ejercicio 2.

Calcula el dominio de las siguientes funciones:

$a)\ f(x)=\dfrac{\sqrt{2-x}}{x+1}$ $\qquad b)\ g(x)=\dfrac{\ln\left(4-x^2\right)}{x}$

Solución:

$a)\ f(x)=\dfrac{\sqrt{2-x}}{x+1}$

El dominio de la función es el conjunto de números reales x tales que su imagen $f(x)$ es un número real.

$$\text{Para que } f(x) \text{ sea un número real, debe cumplirse: } \begin{cases} 2-x\ge 0 \\ x+1\ne 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\ge x \\ x\ne -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\in(-\infty,2] \\ x\ne -1 \end{cases}$$

Entonces tenemos que $Dom\, f(x)=(-\infty,-1)\cup(-1,2]$

$b)\ g(x)=\dfrac{\ln\left(4-x^2\right)}{x}$

$$\text{Para que } g(x) \text{ sea un número real, debe cumplirse: } \begin{cases} 4-x^2>0 \\ x\ne 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (2+x)(2-x)>0 \\ x\ne 0 \end{cases}$$

Resolvamos la inecuación $(2+x)(2-x)>0$

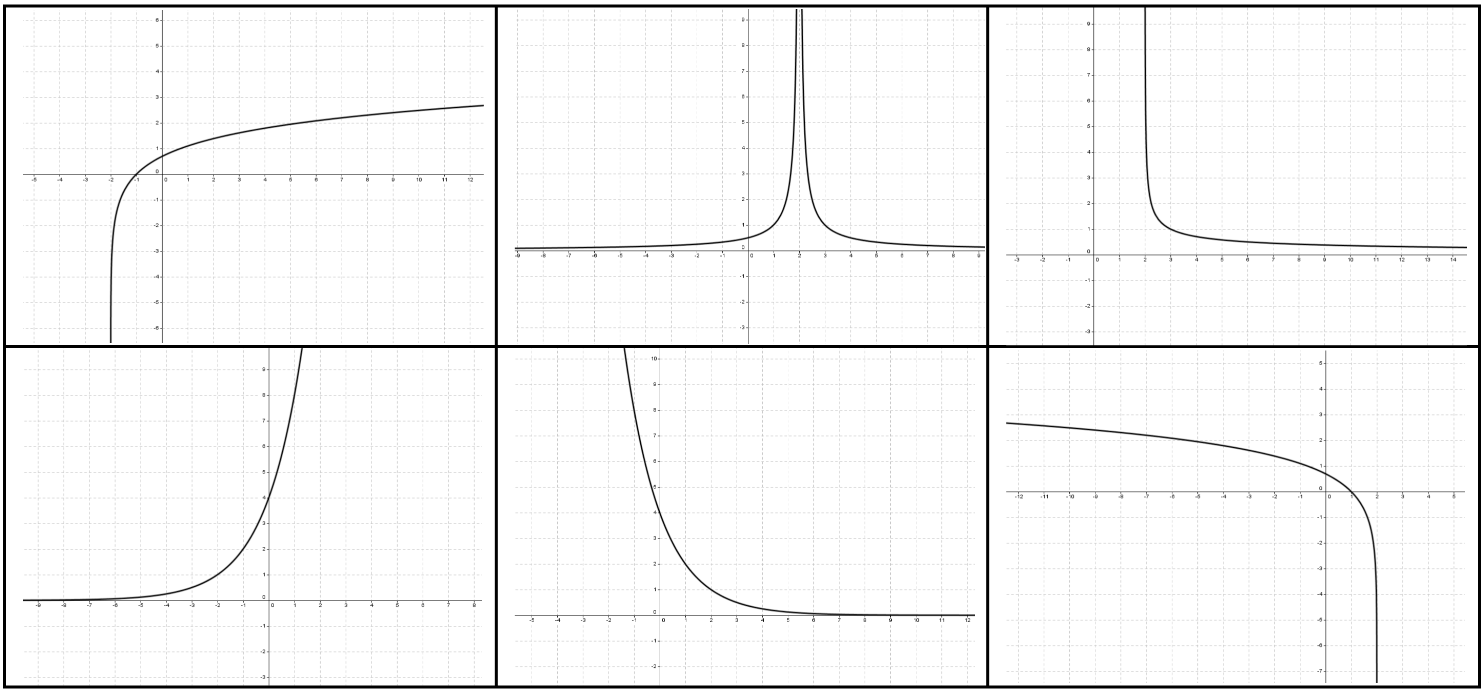
	$(-\infty\ ,-2)$	-2	$(-2\ ,\ 2)$	2	$(2\ ,\ +\infty)$
$(2+x)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$(2-x)$	$+$	$+$	$+$	0	$-$
$(2+x)(2-x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

Entonces, $x\in(-2\ ,\ 2)$ *y además* $x\neq 0$, *con lo que* $Dom\, g(x)=(-2\ ,\ 0)\cup(0\ ,\ 2)$

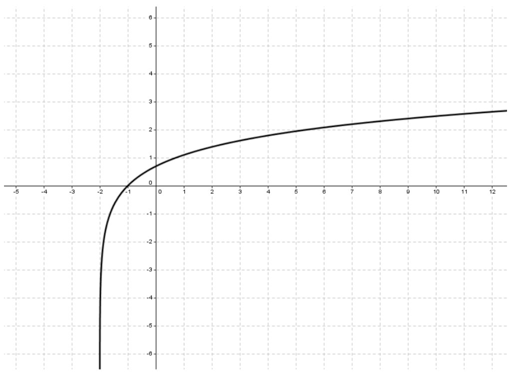
Ejercicio 3.

Asigna a cada una de las siguientes gráficas la expresión correspondiente:

$$y=2^{x+2}\quad ;\quad y=\ln(2-x)\quad ;\quad y=\frac{2}{|x-2|}\quad ;\quad y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x-2}\quad ;\quad y=\ln(x+2)\quad ;\quad y=\frac{1}{\sqrt{x-2}}$$



Solución:



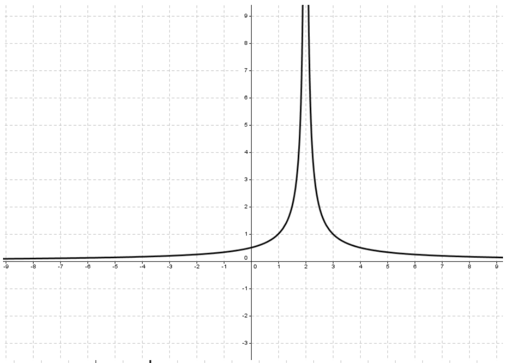
–. *Es una función con un crecimiento logarítmico.*

–. *Su dominio es* $(-2\ ,+\infty)$

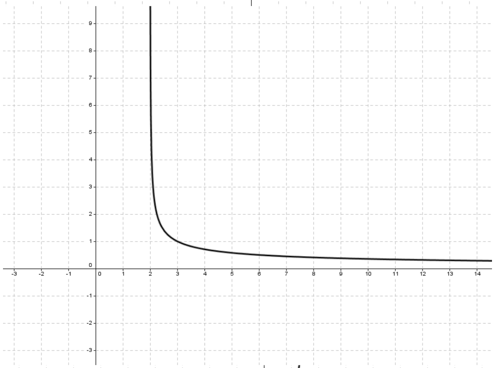
–. *Pasa por el punto* $(-1,0)$

–. *Esta gráfica se corresponde con la expresión*:

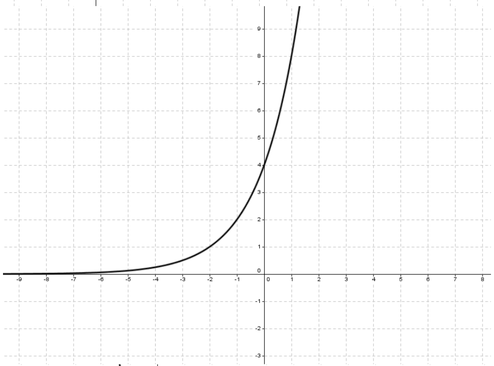
$$f(x)=\ln(x+2)$$



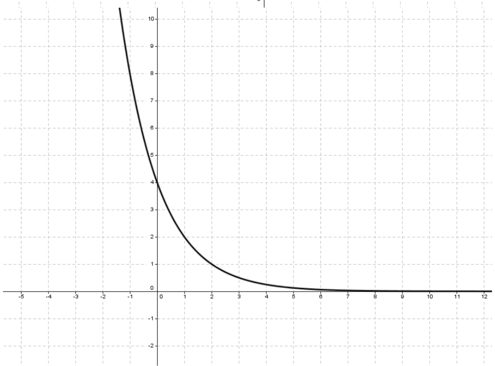
–. *Es una función siempre positiva.*
–. *Su dominio es* $(-\infty\ ,2)\cup(2\ ,+\infty)$
–. *Pasa por los puntos* $(1,1)$ *y* $(3,1)$
–. *Es una hipérbola en la que las imágenes negativas se han cambiado por sus simétricas con respecto al eje OX.*
–. *Esta gráfica se corresponde con la expresión*: $f(x)=\dfrac{2}{|x-2|}$



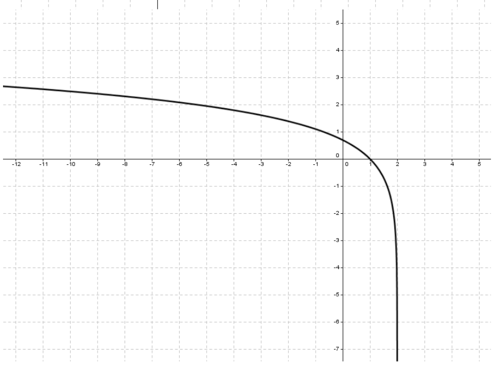
–. *Es una función siempre positiva.*
–. *Decreciente: cuanto mayor es el valor de x, menores son sus imágenes.*
–. *Su dominio es* $(2\ ,+\infty)$
–. *Pasa por el punto* $(3,1)$
–. *Esta gráfica se corresponde con la expresión*: $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x-2}}$



–. *Es una función siempre positiva.*
–. *Presenta un crecimiento exponencial, de base mayor que* 1.
–. *Su dominio es* $(-\infty\ ,+\infty)$
–. *Pasa por el punto* $(0,4)$
–. *Esta gráfica se corresponde con la expresión*: $f(x)=2^{x+2}$



–. *Es una función siempre positiva.*
–. *Presenta un decrecimiento exponencial, de base menor que* 1.
–. *Su dominio es* $(-\infty\ ,+\infty)$
–. *Pasa por el punto* $(0,4)$
–. *Esta gráfica se corresponde con la expresión*: $f(x)=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x-2}$



–. *Es una función con un aspecto logarítmico.*
–. *Siempre decreciente.*
–. *Su dominio es* $(-\infty\ ,2)$
–. *Pasa por el punto* $(1,0)$
–. *Esta gráfica se corresponde con la expresión*: $f(x)=\ln(2-x)$

Ejercicio 4.

Resuelve las siguientes ecuaciones:

$$a)\ \ 2\log(x-1)+1=\log(x+86) \qquad\qquad b)\ \ 2^{x+1}+4^{x-1}=96$$

Solución:

$$a)\ \ 2\log(x-1)+1=\log(x+86) \quad\Rightarrow\quad \log(x-1)^2+\log 10=\log(x+86) \quad\Rightarrow\quad \log\left[(x-1)^2\cdot 10\right]=\log(x+86) \quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad (x-1)^2\cdot 10=x+86 \quad\Rightarrow\quad 10\left(x^2-2x+1\right)=x+86 \quad\Rightarrow\quad 10x^2-20x+10-x-86=0$$

$$10x^2-21x-76=0 \quad\Rightarrow\quad x=\frac{21\pm\sqrt{441+3040}}{20}=\frac{21\pm 59}{20}\Rightarrow\begin{cases} x=4 \\ \cancel{x=\dfrac{19}{10}} \end{cases} \Rightarrow\ \textit{solución}\ x=4$$

$$b)\ \ 2^{x+1}+4^{x-1}=96 \quad\Rightarrow\quad 2\cdot 2^x+\frac{4^x}{4}=96 \quad\Rightarrow\quad 2\cdot 2^x+\frac{2^{2x}}{4}=96 \quad \left(\textit{cambio de variable}\ 2^x=t\right) \quad\Rightarrow\quad 2t+\frac{t^2}{4}=96$$

$$t^2+8t-384=0 \quad\Rightarrow\quad t=\frac{-8\pm\sqrt{(-8)^2-4\cdot(-384)}}{2}=\frac{-8\pm\sqrt{1600}}{2}=\frac{-8\pm 40}{2}\Rightarrow\begin{cases} t=16 \ \Rightarrow\ 2^x=16 \ \Rightarrow\ x=4 \\ t=-24 \ \Rightarrow\ \cancel{2^x=-24} \end{cases}$$

$$\textit{solución}\quad x=4$$

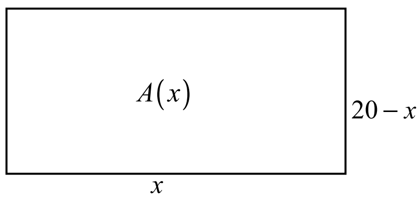
Ejercicio 5.

Encuentra la función que define el área de los rectángulos de 40 cm de perímetro, dependiendo de la longitud x de la base. Entre esos rectángulos, calcula las dimensiones del que tiene área máxima.

Solución:

En los rectángulos con 40 *cm de perímetro, la base y la altura suman* 20 *cm. Por tanto, si llamamos* x *a la medida de la base en cm, la altura medirá* $(20-x)$.

La función área, que depende del valor de x, *vendrá dada por la expresión* $A(x)=x\cdot(20-x)\ \Rightarrow\ A(x)=20x-x^2$
Esta función área, está definida por una parábola con coeficiente de x^2 *negativo, por lo que en su vértice tendrá el máximo.*



Dada una parábola $y=ax^2+bx+c$, *el vértice se encuentra en el punto* (x_0, y_0), *que lo obtenemos asi:*

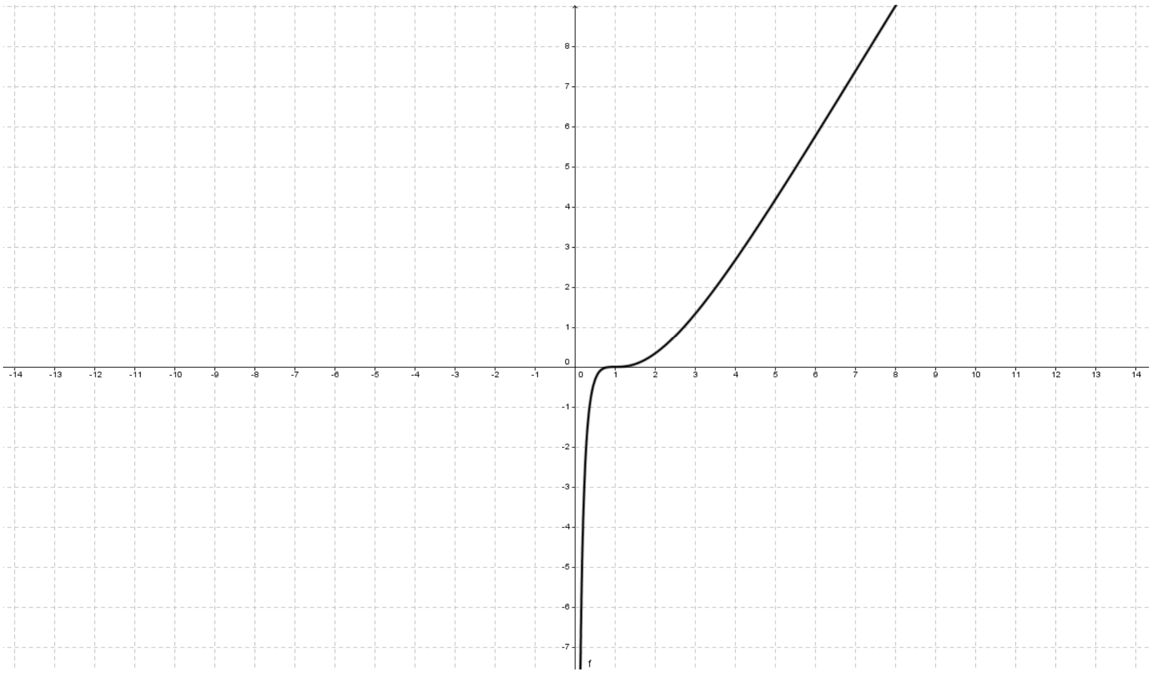
$$x_0=-\frac{b}{2a}\ ,\ y_0=f(x_0) \quad\Rightarrow\quad x_0=-\frac{20}{2\cdot(-1)}=10\ ,\ y_0=f(10)=20\cdot 10-10^2=100 \quad\Rightarrow\quad \textit{vértice}:(10,100)$$

Esto quiere decir que el máximo de la función área lo tenemos para el valor de x *(base)* 10 *cm y nos da un área máxima de* 100 cm^2.
Como no podía ser de otra forma, ese máximo se obtiene cuando el rectángulo es un cuadrado.

Ejercicio 6.

Dada la función $f(x)=(\ln x)^3$, cuya gráfica aparece debajo, se pide:

- Calcula la función inversa de $f(x)$.
- Comprueba, componiendo ambas funciones, que la función obtenida es $f^{-1}(x)$.
- Apoyándote en la gráfica de $f(x)$, esboza la gráfica de $f^{-1}(x)$.



Solución:

Calculemos la función inversa de $f(x)=(\ln x)^3$

$$y=(\ln x)^3 \xrightarrow{\text{intercambiamos variables}} x=(\ln y)^3 \xrightarrow{\text{despejamos } y} \sqrt[3]{x}=\ln y \Rightarrow y=e^{\sqrt[3]{x}} \Rightarrow f^{-1}(x)=e^{\sqrt[3]{x}}$$

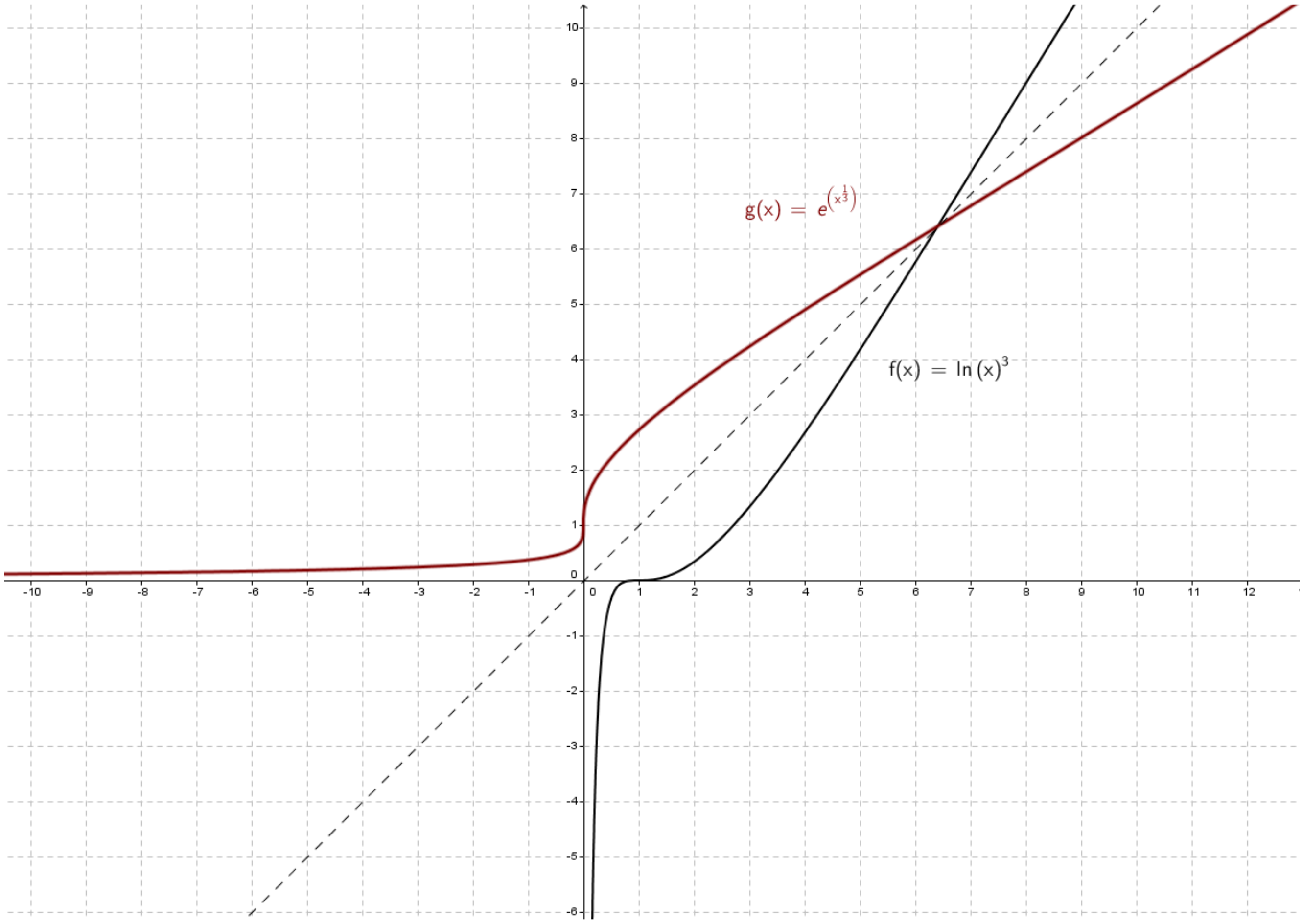
Comprobemos que realmente son funciones inversas, para ello debe cumplirse que $(f^{-1}\circ f)(x)=(f\circ f^{-1})(x)=x$

$$f^{-1}\circ f : x \xrightarrow{f} f(x)=(\ln x)^3 \xrightarrow{f^{-1}} f^{-1}\left((\ln x)^3\right)=e^{\sqrt[3]{(\ln x)^3}}=e^{\ln x}=x \quad \Rightarrow \quad (f^{-1}\circ f)(x)=x$$

$$f\circ f^{-1} : x \xrightarrow{f^{-1}} f^{-1}(x)=e^{\sqrt[3]{x}} \xrightarrow{f} f\left(e^{\sqrt[3]{x}}\right)=\left(\ln e^{\sqrt[3]{x}}\right)^3=\left(\sqrt[3]{x}\right)^3=x \quad \Rightarrow \quad (f\circ f^{-1})(x)=x$$

Dos funciones inversas tienen gráficas simétricas respecto de la bisectriz del 1º *y* 3º *cuadrante, es decir, simétricas respecto de la función identidad* $y=x$.

Como nos dan la gráfica de $f(x)$, *trazamos la recta* $y=x$. *Luego buscamos la simetría de* $f(x)=(\ln x)^3$ *con respecto a esa recta y obtendremos la gráfica de* $f^{-1}(x)=e^{\sqrt[3]{x}}$. *Hay que observar que el punto de corte entre* $f(x)$ *y la recta* $y=x$ *es invariable por la simetría, es decir, es simétrico de sí mismo.*



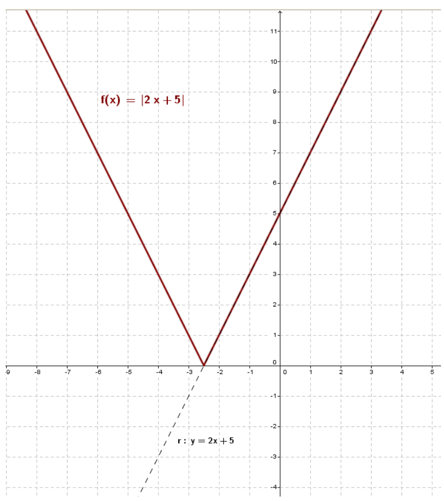
Ejercicio 7.

Representa gráficamente la función e indica si es continua y dónde están sus máximos y mínimos:

$$f(x)=\begin{cases} |2x+5| & si \quad x\le -1 \\ 4-x^2 & si \quad -1<x<2 \\ x^2-10x+16 & si \quad x\ge 2 \end{cases}$$

Solución:

Para representar la función $y=|2x+5|$, *obtenemos la gráfica de la recta* $y=2x+5$, *ahora la parte negativa de la función la trasladamos simétricamente con respecto al eje* OX. *Posteriormente ajustaremos el dominio al intervalo* $(-\infty\,,-1]$



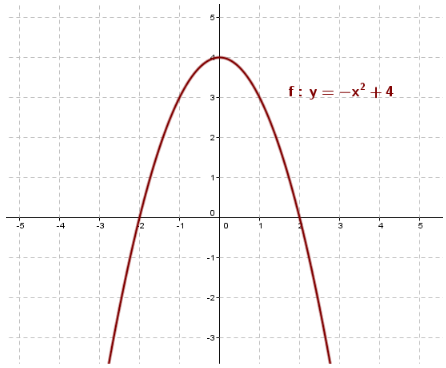
En la parábola $y = 4 - x^2$, *analizamos* :

Corte con OY : $x = 0 \Rightarrow y = 4 \;\; ; \; (0,4)$

Cortes con OX : $y = 0 \Rightarrow \; 4 - x^2 = 0 \; \begin{cases} x = 2 & (2,0) \\ x = -2 & (-2,0) \end{cases}$

Vértice : $x_0 = -\dfrac{b}{2a} = 0 \;\Rightarrow\; y_0 = 4 \;\; ; \; (0,4)$

Luego, restringimos el dominio al intervalo $(-1\,,\,2)$



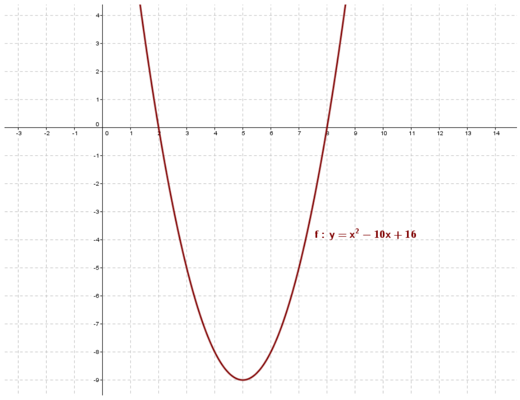
En la parábola $y = x^2 - 10x + 16$, *analizamos* :

Corte con OY : $x = 0 \Rightarrow y = 16 \;\; ; \; (0,16)$

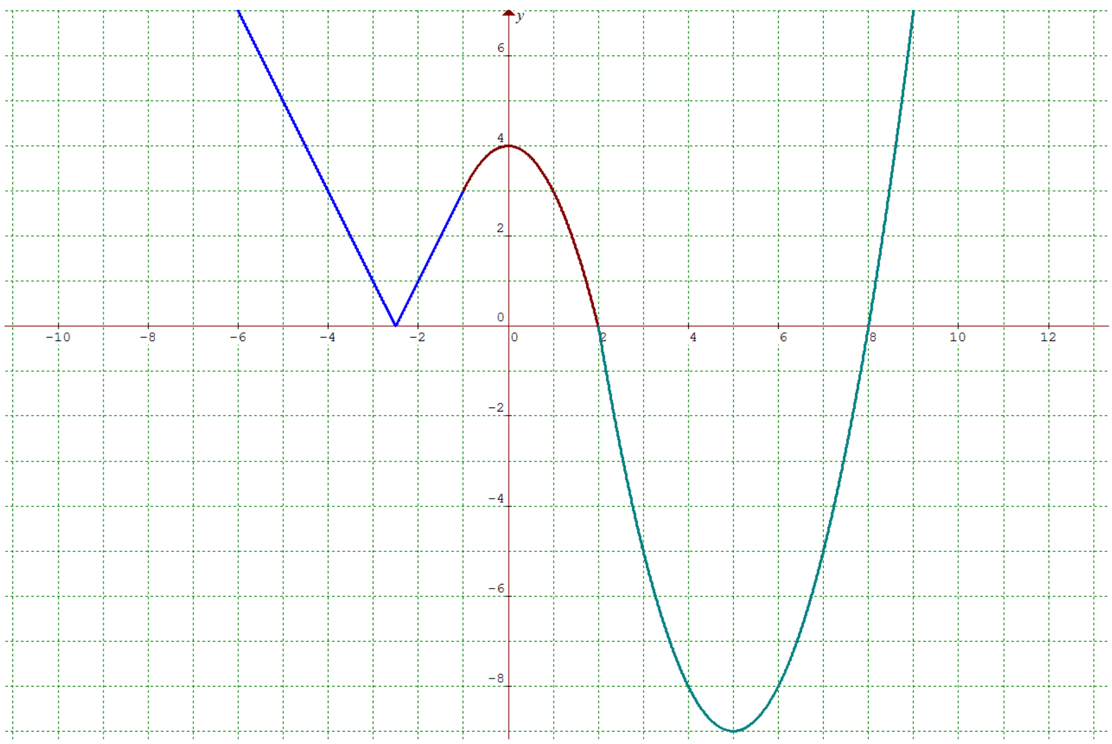
Cortes con OX : $y = 0 \Rightarrow \; x^2 - 10x + 16 = 0 \; \begin{cases} x = 2 & (2,0) \\ x = 8 & (8,0) \end{cases}$

Vértice : $x_0 = -\dfrac{b}{2a} = 5 \;\Rightarrow\; y_0 = -9 \;\; ; \; (5,-9)$

Luego, restringimos el dominio al intervalo $[2\,,\,+\infty)$



Uniendo los trozos, la gráfica quedará :



$f(x)$ *es una función continua, con mínimos en los puntos de abscisa* $x = -\dfrac{5}{2}$ *y* $x = 5$, *y máximo en el punto* $x = 0$.